ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Ἐὰν ὁ ποτεροσοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν Κώνων ΑΒΔ, ΑΖΘ, ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἡ τομὴ ΖΗΘ ἢ ζηθ κύκλος ἔσαι, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Σχημ. 9.

Ἤχθω ὁ ἄξων ΑΓ συμβάλλων τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Λ. διὰ δὲ τοῦ ἄξονος ΑΓ τετμήσθω ὁ Κῶνος ἐπιπέδῳ τριγωνικῷ τῷ ΒΑΔ, οὗπερ ϗ τοῦ προτέρου τέμνοντος ἐπιπέδου ἡ κοινὴ τομὴ ΖΘ παράλληλος ἔσεται τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ (16 τοῦ ΙΑ΄.): ϗ ληφθέντος ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς τομῆς οἱουδήτινος σημείου τοῦ Η, ἐπεζεύχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἡ ΑΗ, ἥτις προεκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως κατὰ τὸ Ε. ϗ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΓ, ΗΛ, ἔσονται κοιναὶ τομαὶ τοῦτε τριγώνου ΑΓΕ, ϗ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΒΕΔ, ΖΗΘ. ἔνθεντοι τὰ τρίγωνα ΑΓΕ, ΑΛΗ ἀλλήλοις ὅμοια (16 τοῦ ΙΑ΄. ϗ 2 τοῦ ϛ΄.)· ὡσαύτως δὲ ϗ τὰ ΓΒΑ, ΛΖΑ. Ὅθεν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΛΗ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΛΑ (1 πόρισμ. τῆς 4 τοῦ ϛ΄.). ϗ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΛΑ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΛ. ὡς ἄρα ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΛΗ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΛ (11 τοῦ Ε΄.). ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΒΓ (ἀκτῖνες γὰρ τοῦ αὐτοῦ κύκλου)· ἴση ἄρα ϗ ἡ ΛΗ τῇ ΛΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ϗ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τȣ̃ Λ πρὸς τὴν ΖΘΗ γραμμὴν προσπίπτȣσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· Κύκλος ἄρα ἐςὶν ἡ ΖΗΘ τομὴ, κέντρον ἔχων τὸ Λ ἐπὶ τȣ̃ ἄξονος ΑΓ. Πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπ᾽ αὐτȣ̃ ἐπὶ τὴν περίμετρον τῆς τομῆς προσπίπτȣσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις δειχθήσονται. Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται κύκλος εἶναι ϗ ἡ τομὴ ζηθ (14).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Σχημ. 10. Ἐὰν Κῶνος σκαληνὸς ὁ ΑΒΕΔ, ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒΔ τμηθῇ διὰ τȣ̃ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει· τμηθῇ δὲ ϗ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ΚΗΜ, πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τȣ̃ ἄξονος τριγώνῳ ΑΒΔ, ἀφαιρȣ̃ντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον τὸ ΚΑΜ ὁ-

---

14.) Αἱ γὰρ τοι ΕΓ, ηλ κοιναὶ τομαὶ ȣ̃σαι τȣ̃ τε διὰ τȣ̃ ἄξονος τριγωνικȣ̃ ἐπιπέδȣ ϗ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΒΕΔ, ζηθ, ἔσονται ἀλλήλαις παράλληλοι. Διὰ δὴ τȣ̃τȣ τὰ τρίγωνα ΓΑΕ, λΑη, ἀλλήλοις ὅμοια· ϗ ἑπομένως ΓΕ : λη = ΓΑ : ΑΛ. ὅμοια δὲ ϗ τὰ τρίγωνα ΓΑΒ, λΑζ. ἄρα ϗ ΓΑ : ΑΛ = ΓΒ : λζ· ϗ δὴ ΓΕ : λη = ΓΒ : λζ· ἐςὶ δὲ ἡ ΓΕ = τῇ ΓΒ· ἄρα ϗ ἡ λη, ἴση τῇ λζ. Τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ δειχθήσεται ϗ οἱαδήτις ἄλλη εὐθεῖα ἀπὸ τȣ̃ λ πρὸς τὴν περίμετρον τῆς τομῆς προσπίπτȣσα, ἴση εἶναι τῇ λη. Κύκλος ἄρα ἐςὶ ϗ ἡ τομὴ ζηθ κέντρον ἔχων τὸ λ ἐπὶ τȣ̃ ἄξονος. Ἐὰν ἄρα ὁποτεροσȣ̃ν κτ.

μόιον μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ ΑΒΔ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον· ὡς εἶναι δηλαδὴ τὴν ὑπὸ ΑΜΚ ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὅτε δὴ ϗ τὴν ὑπὸ ΑΜΚ συμβαίνει εἶναι ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, διὰ τὸ εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α ἑκατέρῳ κοινήν· ϗ αὕτη ἡ τομὴ κύκλος ἐϛι. καλείσθω δὲ τομὴ *Υ'ΠΕΝΑΝΤΙΑ.*

Ἀφ' οἱουδήποτε σημείου τοῦ Η ληφθέντος ὡς ἔτυχεν ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς οὕτω γεγεννημένης τομῆς ΚΜ, ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ΑΒΔ ἡ ΗΙ, ἥτις δὴ πεσεῖται ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ΚΜ, ϗ ἔϛαι αὐτῇ κάθετος (3 ϗ 8 τοῦ ΙΑ'.). Διὰ δὲ τοῦ σημείου Ι ἤχθω τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ παράλληλος ἡ ΖΘΙ, ϗ διὰ τῶν ΖΘ, ΗΙ διήχθω ἐπίπεδον τὸ ΖΗΘ, ὅπερ ἔσεται παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως, ἥτις διήκει διὰ τῆς ΒΔ ϗ τῆς αὐτῇ καθέτου ΕΡ, αἵτινές εἰσι ταῖς ΖΘ, ΗΙ παράλληλοι (15). Κύκλος ἄρα

15.) Ἡ εὐθεῖα *ΒΔ* κοινὴ τομή ἐϛι τοῦ ἐπιπέδου *ΒΑΔ*, ϗ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως· ὀρθὸν δὲ τὸ ἐπίπεδον *ΒΑΔ* τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως, ὀρθὴ ἄρα ϗ ἡ *ΕΡ* τῷ ἐπιπέδῳ *ΒΑΔ*, οὖσα ὀρθὴ ϗ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ *ΒΔ*· ὀρθὴ δὲ αὐτῷ ϗ *ΗΙ* (ἐκ κατασκευῆς)· αἱ ἄρα *ΗΙ*, *ΕΡ*, ἀλλήλαις παράλληλοι (6. τοῦ *ΙΑ'*.)· τέμνουσι δὲ ϗ τὰς πα-ἐστιν ἡ ὑπ' αὐτοῦ τομὴ ΖΗΘ, κέντρον ἔχων τὸ Λ, καθ' ὃ ὁ ἄξων τέμνει τὴν αὐτοῦ διάμετρον ΖΘ. Τετμήσθω ἤδη ϗ ἡ ΚΜ δίχα κατὰ τὸ Ο, ϗ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΗΛ, ΗΟ, ἔσεται δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἀκτῖνος ΛΘ. ἔστι δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΛΘ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΖΙΘ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΛΙ (5 τοῦ Β΄.)· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΛ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΙ, ΗΙ (47 τοῦ Α΄.) ὁμοῦ ληφθεῖσιν· (ὀρθὴ γὰρ οὖσα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔ ἡ ΗΙ (ἐκ κατασκευῆς), ὀρθὴ ἔσεται ϗ ταῖς ΜΙΚ, ΖΙΘ εὐθείαις, ὧν προσψαύει κατὰ τὸ Ι (ὁρ. 3 τοῦ ΙΑ΄.), ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΙΛ. Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΛΙ, ΗΙ ὁμοῦ ληφθέντα, ἴσα ἔσεται τῷ ὑπὸ τῶν ΖΘΙ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΛΙ· κοινοῦ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΙ ἀφαιρεθέντος, τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ ἔσται ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΙΘ. Ὑπόκειται δὲ ϗ ἡ ὑπὸ ΑΚΜ (ἐκ κατασκευῆς) ἴση τῇ ὑπὸ ΛΔΒ ϗ δὴ ϗ τῇ ὑπὸ ΜΘΙ τῇ ἐκτὸς τῶν παραλλήλων (27 τοῦ Α΄.), ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ ΘΜΙ ἴση τῇ ὑπὸ ΖΙΚ (πορ. 3 τῆς 32 τοῦ Α΄.)· ϗ τὰ τρίγωνα ΘΙΜ, ΚΙΖ, ὅμοια. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΙ πρὸς τὴν ΖΙ, οὕτως ἡ ΙΘ πρὸς τὴν ΙΜ (4 τοῦ ς΄.)· ϗ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΙΘ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΚΙΜ (17 τοῦ αὐτοῦ.). ϗ προσκειμένου κοινῇ τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΙ, τὸ ὑπὸ τῶν ΖΙΘ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΟΙ ἔσται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΚΙΜ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΟΙ.

ραλλήλους *ΖΘ*, *ΒΔ*· τὸ ἄρα διὰ τῶν *ΗΙ*, *ΖΙ* ἐπίπεδον, παράλληλόν ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως (15. τοῦ *ΙΑ΄.*) ἤτοι τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν εὐθειῶν *ΒΔ*, *ΕΡ*.

ἀλλὰ ὑπὸ ΖΙΘ ἐδείχθη ἀνατέρω ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΗΙ· ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΙ, ΟΙ ὁμȣ̃ ληφθέντα, ἔσεται ἴσα τῷ ὑπὸ ΚΙΜ σὺν τῷ ἀπὸ ΟΙ. Ἔςι δὲ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΗΙ, ΟΙ ὁμȣ̃ ληφθέντα ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΟΗ (47 τȣ̃ Α΄.)· τὸ δὲ ὑπὸ ΚΙΜ σὺν τῷ ἀπὸ ΟΙ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΜ (5 τȣ̃ Β΄.)· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΟΗ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΜ, ϗ ἡ ΟΜ ἴση τῇ ΟΗ. Καὶ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ὅτι ϗ οἱαδήτις ἑτέρα εὐθεῖα ἀπὸ τȣ̃ Ο ἐπὶ τὴν περίμετρον ΚΗΜ καθ᾽ ὁ,τιȣ̃ν αὐτῆς σημεῖον προσπίπτȣσα, ἴση ἔςαι ταῖς ΟΜ, ΟΗ. κύκλος ἄρα ἐςὶ ϗ ἡ τοιαύτη τομή. Καὶ ἐὰν Κῶνος σκαληνὸς κτ.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Α΄.

Ὅθεν ἕπεται ὅτι ἐν κύκλῳ τὸ ἀπὸ τῆς ἀφ᾽ οἱȣδήποτε σημείȣ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον πρὸς ὀρθὰς καταχθείσης τετράγωνον ἀείἐςιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρȣ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (οἷον ἐν τῷ κύκλῳ ΘΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ ΖΙΘ)· ϗ ἀνάπαλιν, ἐν ὁποιῳδήποτε σχήματι, ἐὰν τὸ ἀπὸ τῆς ἀφ᾽ οἱȣδήποτε σημείȣ τῆς περιμέτρȣ Η ἐπὶ τὴν βάσιν ΚΜ πρὸς ὀρθὰς καταχθείσης ΗΙ τετράγωνον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΚΙΜ, τὸ σχῆμα τοῦτο κύκλοςἐςιν, ȣ̃ διάμετροςἐςιν ἡ βάσις ΚΜ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Ἐὰν δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον μήτε παράλληλον ᾖ τῇ βάσει τοῦ Κώνου, μήτε μὴν τρίγωνον, ὅμοιον μὲν, ὑπεναντίως δὲ κείμενον τῷ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τριγώνῳ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀφαιρῇ, ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος. Ἀνίσων γὰρ οὐσῶν τηνικαῦτα τῶν γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ΖΙΚ, ΘΙΜ οὐκ ἔσεται ὅμοια· ὅθεν οὐδὲ ἡ ΚΙ ἔσται πρὸς τὴν ΖΙ, ὡς ἡ ΘΙ πρὸς τὴν ΙΜ· ἐπομένως δὲ οὐδὲ τὸ ὑπὸ ΖΙΘ, ἢ τὸ ἀπὸ ΗΙ ἴσον τῷ ὑπὸ ΚΙΜ, οὐδὲ προστκειμένου κοινῇ τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΙ, τῷ ἀπὸ τῆς ΟΗ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΜ. Οὐδὲ ἄρα ἡ ΟΜ ἔσται ἴση τῇ ΟΗ· ἄνισοι ἄρα αἱ ἀκτῖνες, ϗ ἡ τομὴ ἄρα οὐκ ἔστι κύκλος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ἐν τῇ ὑπεναντίᾳ τομῇ ἐπεὶ τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα ΑΚΜ, ΑΔΒ ἐστὶν ὅμοια, ϗ ἡ ΔΑ ἐστὶ πρὸς τὴν ΑΒ, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΑΜ· τὰ ὀρθογώνια ΔΑΜ, ΒΑΚ ἐστὶν ἴσα· ϗ κύκλος διὰ τῶν σημείων Β, Κ, Μ, Δ διελεύσεται (16). Ἐὰν δὲ

Σχημ. 6. τῶν ὑλοσ. 16.) Ὁ γὰρ διὰ τῶν σημείων *Β*, *Δ*, *Μ* διϊὼν κύκλος, διελεύσεται δήπου ϗ διὰ τοῦ *Κ* εἰδὲ μὴ, διελθέτω εἰ δυνατὸν ἤτοι κατωτέρω τοῦ *Κ* διὰ τοῦ *Γ* φέρε, ἢ ἀνωτέρω διὰ τοῦ *Ο*· ϗ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ὑποθέσει ἔσεται τὸ ὀρθογώνιον *ΒΑΓ* ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ *ΔΑΜ* (Πορ. 1. τῆς 36. τοῦ Γ΄.) Ἔστι δὲ ἐξ ὑποθέσεως τὸ ὑπὸ τῶν *ΔΑΜ*, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν *ΒΑΚ*· τὸ ἄρα ὑπὸ *ΒΑΓ* ἔσεται ἴσον ἀχθῇ τῇ ΚΜ παράλληλος ἡ ΒΝ, ὁ κύκλος ὁ περὶ τὸ ΒΝΔ τρίγωνον περιγεγραμμένος τῆς πλευρᾶς ΑΒ πρὸς τῷ Β ἐφάψεται. Ὁμοίων γὰρ ὄντων τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΑΒΝ (ἔχει γὰρ τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν κοινὴν καὶ τὴν ὑπὸ ΑΒΝ = τῇ ἐκτὸς ὑπὸ ΑΚΜ = τῇ ὑπὸ ΑΔΒ). ἔσαι ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΝ. ϗ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΔΑΝ (16 τοῦ ς΄.). Ἡ ἄρα ΑΒ ἐφάπτεται τοῦ διὰ τῶν σημείων Β, Ν, Δ διερχομένου κύκλου (17).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

Ἅπασαι αἱ τομαὶ αἱ ἐπιπέδοις τῷ αὐτῷ κύκλῳ ΚΗΜ παραλλήλοις ἀπογεννώμεναι κύκλοι ἔσονται· ϗ ἐπιζευχθεῖσα ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν κορυφὴν Α ἡ εὐθεῖα ΟΑ διὰ τῶν κέντρων ἁπάντων τῶν αὐτῷ παραλλήλων κύκλων διελεύσεται. Ἁπά-

---

ε τῷ ὑπὸ *ΒΑΚ*, ὅπερ ἄτοπον. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ· τὸ ὑπὸ *ΒΑΟ* ἔσεται ἴσον τῷ ὑπὸ *ΔΑΜ*· ἀλλὰ τὸ ὑπὸ *ΔΑΜ* ὑπετέθη ἴσον τὸ ὑπὸ *ΒΑΚ*, ἄρα τὸ ὑπὸ *ΒΑΟ* ἔσεται τῷ ὑπὸ *ΞΑΚ* ἴσον, ὅπερ ἐπίσης ἄτοπον· δι' οὐδετέρου ἄρα τῶν *Γ*, *Ο* διελεύσεται· διελεύσεται ἄρα διὰ τοῦ *Κ*.

17.) Εἰ γὰρ ἡ *ΑΒ* τοῦ *ΒΔΜ* κύκλου μὴ ἐφάπτεται, Σχημ. 7. ἐφαπτέσθω αὐτοῦ ἑτέρα τις ἡ *ΑΜ*· τεμνέτω δὲ αὐτὸν ἡ τῶν ὑποσ. *ΑΒ* κατὰ τὸ *Ο*· ϗ ἔσεται δὴ $AM^2 = \Delta AN$ (37. τοῦ Γ΄.) ἄρα $AM^2 = AB^2$ ἀλλὰ $AM^2 = BAO$ (διὰ τὴν αὐτὴν) ἄρα $AB^2 = BA\Theta$. ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα *ΑΒ* ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἐξ ἀρχῆς ὑπετίθετο.

σας γὰρ τὰς τῇ ΚΜ παραλλήλȣς εὐθείας δίχα τεμεῖ, ὡς αὐτήν τε ταύτην κατὰ τὸ Ο, ϗ τὴν ΒΝ κατὰ τὸ Σ. Ἔσεται γὰρ (Πορ. 2 τῆς 4 τȣ̃ ς΄.) ἡ ΚΟ πρὸς τὴν ΟΜ, ὡς ἡ ΒΣ πρὸς τὴν ΣΝ. ἴση δὲ ἡ ΚΟ τῇ ΟΜ, ἄρα ϗ ἡ ΒΣ ἴση τῇ ΣΝ. Ἔσεται ἄρα τȣ̃ Κώνȣ τȣ́τȣ ϗ ἕτερος ἄξων ὁ ΑΟ, ὅςτις εἰς ἄνισα τεμεῖ τὴν διάμετρον τῆς βάσεως κατὰ τὸ Ρ. Τοιγαρȣ̃ν, τῶν μὲν σκαληνῶν Κώνων, ὧν εἷς καὶ ὁ ΑΒΔΞ, ἔσονται δύω ἄξονες οἱ ΑΓ, ΑΡ διὰ τῶν κέντρων τῶν κατ' αὐτȣ̀ς κύκλων διήκοντες· τῶν δὲ ὀρθῶν, εἷς ἄξων ϗ μόνος.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Ε΄.

Τεμȣ̃σι δὲ οἱ δύω ἄξονες ȣ̃τοι, ὁ μὲν δεύτερος ΑΡ τὴν τῆς βάσεως διάμετρον ΒΔ κατὰ τὸ Ρ, ȣ̃τως ὡς εἶναι τὴν ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ϗ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· 18). Ὁ δὲ πρῶτος ΑΓ τὴν τȣ̃ ὑπεναντίως κειμένȣ κύκλȣ διάμετρον ΒΝ κατὰ τὸ Ξ ὡς εἶναι τὴν ΒΞ πρὸς τὴν ΞΝ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΞ. ὅθεν ϗ ἔσεται ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, ὡς ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΒ.

---

18) Ἐπεὶ γάρ ἐςιν $A\Delta : AB = AB : AN$, ἔςαι δὴ ϗ ἀνάπαλιν $AB : A\Delta = AN : AB$· ϗ (24. τȣ̃ ς΄.) $AB^2 : A\Delta^2 = AN^2 : AB^2$· ἐὰν ἄρα ᾖ BP πρὸς τὴν $P\Delta$, ὡς τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Delta$, ἔσονται δὴ ϗ ὡς τὸ ἀπὸ AN πρὸς τὸ $A\Delta$·

Ἐὰν γὰρ ἀχθῇ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΝΠΤ, ἔσεται τὸ τρίγωνον ΒΣΡ ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΝΣΤ. καὶ ὡς ἡ ΒΣ πρὸς τὴν ΣΝ, οὕτως ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΝΤ. ἴση δὲ ἡ ΒΣ τῇ ΣΝ (Πόρισμ. δ΄. τῆς παρούσης)· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΡ τῇ ΝΤ. Ὅθεν (ἐὰν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ΒΡ : ΡΔ = ΒΡ : ΡΔ τεθῇ ἐν τῷ δευτέρῳ λόγῳ ἀντὶ τῆς ΒΡ ἡ αὐτῇ ἴση ΝΤ, ἔσεται) ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, ὡς ἡ ΝΤ πρὸς τὴν ΡΔ. ἀλλ᾽ ἡ ΝΤ πρὸς τὴν ΡΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΝ πρὸς τὴν ΑΔ. καὶ ἡ ΑΝ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ (ἐδείχθησαν γὰρ ἀνωτέρω (Πόρισμ. γ΄.) αἱ ΑΝ, ΑΒ, ΑΔ συνεχῶς ἀνάλογον). ἡ ἄρα ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ὁμοίως ἡ ΒΞ πρὸς τὴν ΞΝ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΝΠ (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΒΞΓ, ΠΝΞ.), ἢ ὡς ἡ ΔΓ (ἧτινι ἴση ἡ ΒΓ) πρὸς τὴν ΝΠ, ἤτοι ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΔΝ (Πορ. 1 τῆς 4 τοῦ ϛ΄.), ἢ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ (διὰ τὸ εἶναι τὰς ΑΔ, ΑΒ, ΑΝ συνεχῶς ἀνάλογον ὡς ἀνωτέρω Πορ. γ΄. δέδεικται). Ἐδείχθη δὲ ἀνωτέρω ὅτι ὡς τὸ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ (σημ. 18). ὡς ἄρα ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΔ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Γ΄.

Ἐὰν Κῶνος ὁ ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τριγωνικῷ Σχημ. 11
τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι ση-

μεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ Η, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ ἡ ΗΙΛ παράλληλος εὐθείᾳ τινὶ τῇ ΕΖ, ἥτις ἐστὶ κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου τὴν καὶ διάμετρον τῆς τοῦ Κώνου βάσεως· ἡ οὕτως ἠγμένη εὐθεῖα συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ι ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ Κώνου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον Η ἡ ΑΗ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως κατὰ τὸ Μ· καὶ ἀπὸ τοῦ Μ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΚΘ, ἥτις τεμεῖ τὴν διάμετρον πρὸς ὀρθὰς καὶ τμηθήσεται ὑπ' αὐτῆς δίχα κατὰ τὸ Κ (3 τοῦ Γ'.) ἐπεζεύχθω καὶ ἡ ΑΘ, ἥτις ἐν τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ οὖσα (ἑπομ. β'.), συμπεσεῖται τῇ ΗΙΛ κατὰ τὸ Λ (19). Τῇ γὰρ τρίτῃ ΕΖ παράλληλοι οὖσαι αἱ

19.) Ἐπεὶ γὰρ αἱ παράλληλοι *ΜΘ*, *ΗΛ* ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, ὥσπερ ἡ *ΑΘ* συνέπεσε τῇ *ΜΘ* κατὰ τὸ Θ σημεῖον τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, οὕτω δὴ

ΗΛ, ΘΜ, ϗ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι, ϗ ἑπομένως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τȣ̃ τριγώνȣ ΜΑΘ (9 τȣ̃ Γ΄.)· ϗ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΚ, ἔςαι κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν τριγώνων ΒΑΔ, ΜΑΘ· διὰ δὴ τȣ̃το διελεύσεται διὰ τȣ̃ Ι κοινȣ̃ σημείȣ ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων (20). Τȣ́των δὲ ȣ̃τω κατασκευασθέντων, ἔσεται (3 τȣ̃ ς΄.) ἡ ΜΚ πρὸς ΗΙ, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΙ, ἤτοι ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΙΛ. ἴση δὲ ἡ ΜΚ τῇ ΚΘ, ἴση ἄρα ϗ ἡ ΗΙ τῇ ΙΛ. δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΗΛ ὑπὸ τȣ̃ διὰ τȣ̃ ἄξονος τριγώνȣ. Ἐὰν ἄρα Κῶνος κτ.

ΠΌΡΙΣΜΑ Α΄.

Ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι ἐὰν Κῶνος τριγώνῳ τμηθῇ διὰ τȣ̃ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ διὰ τῆς εὐθείας ΜΘ, καθέτȣ τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ, ἡ κοινὴ τομὴ τȣ́τȣ ϗ τȣ̃ προτέρȣ ἐπιπέδȣ ἡ ΚΝ, ἁπάσας τὰς τῇ ΘΜ παραλλήλως ἐν τῇ τομῇ ταύτῃ ἀγομένας εὐθείας ΗΛ ϗ λοιπὰς δίχα τεμεῖ (21). Σχημ. 12.

συμπεσεῖται ϗ τῇ *ΗΛ* κατὰ τὸ *Λ* σημεῖον τῆς αὐτῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

20.) Ἐπεὶ τὸ *Ι* σημεῖον, σημεῖόν ἐςι τῆς συμπτώσεως τȣ̃ τριγώνȣ *ΒΑΔ*, ϗ τῆς εὐθείας *ΗΙΛ*, κοινὸν ἄρα ἐςὶ τῷ τε *ΑΒΔ* ἐπιπέδῳ ϗ τῷ *ΜΑΘ*, ἐν ᾧ κεῖται ἡ *ΗΙΛ*· ἔσεται ἄρα ἐπὶ τῆς εὐθείας *ΑΚ*, ἥτις ἐςι κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τȣ́των. διὰ τȣ̃ *Ι* ἄρα διελεύσεται ἡ *ΑΚ*.

21.) Ἐπεὶ ὀρθή ἐςιν ἐπὶ τὴν *ΒΔ* διάμετρον ἡ εὐ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Καὶ ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΜΘ, δι' ἧς τὸ ἐπίπεδον ΜΝΘ, οὐ μόνον τῇ διαμέτρῳ ΒΔ, ἀλλὰ δὲ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ᾖ κάθετος (ὅπερ συμβαίνει ἔνθα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἐστὶ

θεῖα ΜΚΘ, καὶ τῇ ΗΛ (ἐξ ὑποθέσεως) παράλληλος. Ἐὰν ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΗ, ἐκβληθῇ ἕως οὗ τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως κατὰ τὸ μ ἀπαντήσειεν, ἀπὸ δὲ τοῦ μ ἀχθῇ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ ἡ μκϑ τῇ ΜΚΘ παράλληλος, καὶ ἀπὸ τοῦ ϑ ἐπιζευχθῇ ἡ Αϑ, ἥτις ἐν τῇ κωνικῇ οὔσα ἐπιφανείᾳ, διελεύσεται δήπου (κατὰ τὰ προδεδειγμένα) διὰ τοῦ Δ, ἡ ΗΛ (διὰ τὴν παροῦσαν πρότασιν) δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ι, σημεῖον τῆς συμπτώσεως αὐτῆς τε καὶ τοῦ τριγώνου ΒΑΔ, ὅπερ ἔσεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΝ κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΒΑΔ, ΜΗΝΛΘ (σημ. 20.) δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΗΛ ὑπὸ τῆς ΝΚ, ὅπερ συμβαίνει ἀεὶ πάσαις ταῖς τῇ ΜΘ παραλλήλως ἀγομέναις εὐθείαις· δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

22.) Λῆμμα. Ἐὰν τῶν ὁμοίων ἢ ἴσων λόγων $A : B$ καὶ $\Gamma : \Delta$ οἱ μὲν ἡγούμενοι ὅροι τῷ αὐτῷ E, οἱ δὲ ἑπόμενοι τῷ αὐτῷ Z ἐπιπολλαπλασιασθῶσι, τὰ ἐκ τῶν πολλαπλασιασμῶν τούτων γινόμενα, ἐν τῷ αὐτῷ ἔσεται λόγῳ ἀεί. ἤτοι ἔσεται $A \times E : B \times Z = \Gamma \times E : \Delta \times Z$.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν $A : B = \Gamma : \Delta$· ἔσται καὶ $A : \Gamma = B : \Delta$· ἀλλὰ $A : \Gamma$ ἐστὶν ὡς $A \times E : \Gamma \times E$ (1. τοῦ ϛ.) ἄρα $A \times E : \Gamma \times E = B : \Delta$· ἔστι δὲ καὶ $B : \Delta = B \times Z : \Delta \times Z$ (διὰ τὴν αὐτήν)· ἄρα $A \times E : \Gamma \times E = B \times Z : \Delta \times Z$· καὶ ἐναλλάσσοντι $A \times E : B \times Z = \Gamma \times E : \Delta \times Z$.

23.) Λῆμμα. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη A, B, Γ, Δ ἀνάλογον ᾖ. ὦσι δὲ καὶ ἄλλα τοσαῦτα E, Z, H, Θ· ἀνάλογον (ὡς εἶναι $A : B = \Gamma : \Delta$ καὶ $E : Z = H : \Theta$)

κάθετον τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ), τότε δὴ αἱ εὐθεῖαι ΜΘ, ΗΛ οὐ μόνον δίχα, ἀλλὰ ϗ πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τομῆς ΝΚ τμηθήσονται. Ὀρθὴ γὰρ ἔςαι τηνικαῦτα οὐ μόνον ἡ ὑπὸ ΜΚΔ. ἀλλὰ ϗ ἡ ὑπὸ ΜΚΝ (ὅρ. 3 τοῦ ΙΑ.), καὶ ἡ αὐτὴ ἴση ΗΙΝ (27 τοῦ Α΄.). Ἐὰν δὲ ἡ εὐ-

---

ϗ τῶν δυοῖν τούτων ἀναλογιῶν ἐπιπολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἡγούμενοι τῆς ἑτέρας τοῖς ἡγουμένοις τῆς ἑτέρας ϗ οἱ ἑπόμενοι τοῖς ἑπομένοις ἕκαςος ἑκάςῳ, τὰ γινόμενα πρὸς ἄλληλα ἀνάλογον ἔσεται· ἤτοι ἔσεται $A\times E : B\times Z = \Gamma\times H : \Delta\times\Theta$.

Ἐπεὶ γάρ ἐςιν ἐξ ὑποθέσεως $A : B = \Gamma : \Delta$, καὶ $E : Z = H : \Theta$, ἔσεται δὴ ϗ $E : Z = E : Z$, ϗ $\Gamma : \Delta = \Gamma : \Delta$· ἔσεται ἄρα κατὰ τὴν 22 σημείωσιν $A\times E : B\times Z = \Gamma\times E : \Delta\times Z$· ϗ διὰ ϗ $\Gamma\times E : \Delta\times Z = H\times\Gamma : \Theta\times\Delta$ ἄρα $A\times E : B\times Z = \Gamma\times H : \Delta\times\Theta$.

24.) Σχόλιον. Ὁ δὲ τοιοῦτος λόγος, λόγος καλεῖται συγκείμενος παρὰ Γεωμέτραις. Ὁ γὰρ λόγος τοῦ $A\times E$ πρὸς τὸ $B\times Z$ σύγκειται ἐκ δυοῖν λόγων τῶν $A : B$, ϗ $E : Z$· ὡσαύτως ϗ ὁ λόγος τοῦ $\Gamma\times H$ πρὸς τὸ $\Delta\times\Theta$, σύγκειται ἐκ τῶν $\Gamma : \Delta$, ϗ $H : \Theta$. Ἐπεὶ γὰρ λόγος συγκείμενος ἐκ δυοῖν ἢ πλειόνων καλεῖται ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ γινόμενον ἐκ δυοῖν ἢ πλειόνων ἡγουμένων πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν αὐτοῖς ἑπομένων, ϗ τὸ $A\times E$ γινόμενόν ἐςιν ἐκ τῶν ἡγουμένων τῶν λόγων $A : B$ ϗ $E : Z$, τό,τε $B\times Z$, γινόμενον ἐκ τῶν ἑπομένων τῶν αὐτῶν λόγων, ἔσεται ἄρα τὸ $A\times E$ πρὸς τὸ $B\times Z$ ἐν λόγῳ συγκειμένῳ ἐκ τῶν λόγων $A : B$, καὶ $E : Z$· τὸ αὐτὸ ῥητέον καὶ περὶ τοῦ λόγου τοῦ $\Gamma\times H$. $\Delta\times\Theta$, ὅς τις σύγκειται ἐκ τῶν λόγων $\Gamma : \Delta$, ϗ $H : \Theta$.

θεῖα ΜΚΘ μὴ ᾖ κάθετος τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ, ἤτοι ἐὰν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον μὴ ᾖ ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ Κώνου ὀρθὸν, διὰ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει καταχθείσης εὐθείας ΑΞ διερχόμενον, τηνικαῦτα ἡ ΚΝ δίχα μὲν ἁπάσας τὰς ἐν τῇ τομῇ ἀγομένας παραλλήλους ΗΛ, ΜΘ, οὐμὴν δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς, ἀλλὰ λοξὰς γωνίας τεμεῖ, ὡς ἔχει λοξότητος ἡ εὐθεῖα ΜΚ πρὸς τὴν ΚΝ.

ὍΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

Σχημ. 13. 14. 15. 16. α΄. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΚΝ, ἥτις πάσας τὰς ἐν τομῇ ἀγομένας εὐθείας ΗΛ εὐθείᾳ τινὶ τῇ ΜΘ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ, καλεῖται *διάμετρος* τῆς τομῆς.

β΄. Τὸ δὲ ταύτης πέρας Ν, ἢ τὸ ἀντικείμενον Ξ (εἴπερ εἴη) τὸ πρὸς τῇ τομῇ, *κορυφὴ* τῆς τομῆς καλεῖται.

γ΄. Αἱ δὲ παράλληλοι εὐθεῖαι ΗΛ, ΜΘ, καὶ δὴ καὶ τὰ αὐτῶν ἡμίση ΛΙ, ΜΚ, *τεταγμέναι* ἐπὶ τὴν διάμετρον ΚΝ καλοῦνται.

δ΄. Καὶ ἐὰν ἡ ΚΝ οὐ μόνον δίχα, ἀλλὰ καὶ πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνῃ τὰς τεταγμένας, πρὸς τῷ διάμετρος ὀνομάζεται εἰδικωτέρῳ ὀνόματι καὶ *ἄξων* τῆς τομῆς.

Ἐν δέγε τοῖς ἑξῆς ἀποδώσομεν κατά γε τὴν χρείαν καὶ ἑτέρους ὅρους ἔντε ταῖς Προτάσεσι καὶ τοῖς αὐτῶν Πορίσμασι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄

Ἐὰν Κῶνος ὁ ΑΔΜΒ ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι μὲν τὴν βάσιν τοῦ Κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΜΘ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ, καὶ δίχα ὑπ' αὐτῆς τεμνομένην κατὰ τὸ Κ, διηγμένῳ δὲ διὰ εὐθείας ἑτέρας τῆς ΚΝ μιᾷ πλευρᾷ τῇ ΑΒ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου παραλλήλου, ἐν τῇ τοιαύτῃ τομῇ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ΚΜ, ΙΗ τετράγωνα, ἀνάλογον ἔσεται ταῖς ἀπὸ τῆς κορυφῆς τετμημέναις ΝΚ, ΝΙ. Ἡ δὲ τοιαύτη τομὴ καλείσθω *ΠΑΡΑΒΟΛΗ*. Σχημ. 17.

Διὰ οὑτινοσοῦν σημείου Ι ληφθέντος ὡς ἔτυχεν ἐπὶ τῆς τῶν ἐπιπέδων κοινῆς τομῆς ΚΝ, ἐφ' ἣν τεταγμένως κατηγμένη ἡ ΗΙΛ, ἤχθω τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ παράλληλος εὐθεῖα ἡ ΠΙΤ· διὰ δὲ τῶν εὐθειῶν ΠΤ, ΛΙ διήχθω ἐπίπεδον τὸ ΠΗΤ, ὅπερ ἔσεται παράλληλον τῇ τοῦ Κώνου βάσει, ἥτις διὰ τῶν εὐθειῶν ΒΔ, ΜΘ ταῖς ΠΤ, ΛΗ παραλλήλων διήκει (15 τοῦ ΙΑ΄.). Τὸ ἄρα διὰ τῶν ΠΤ, ΛΗ ἐπίπεδον κύκλος ἔσαι (Προτασ. Α΄.), οὗ διάμετρος ἡ ΠΤ, καὶ ἔσιν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΗΙ· ἐπεὶ καὶ ἡ

ΜΚ ἐπὶ τὴν ΒΔ. ϗ ἑπομένως τὸ ὑπὸ τῆς ΗΙ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΠΙΤ. ἔστι δὲ ϗ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ (Πορ. Α΄. τῆς Β΄.)· ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΙΤ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΤ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΙΤ (1 τοῦ ϛ΄.)· ἴση γὰρ ἡ ΚΒ τῇ ΠΙ· εἴγε τὸ ΒΠΙΚ, παραλληλόγραμμον, ὡς ὑπὸ εὐθειῶν ὧν αἱ ἀντικείμεναι ἀλλήλαις παράλληλοι, περιεχόμενον. Ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΙΤ. ἔστι δὲ διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΝΚΔ, ΝΙΤ ὁμοιότητα, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΙΤ, οὕτως ἡ ΚΝ πρὸς ΝΙ (Πορ. 1 τῆς 4 τοῦ ϛ΄.)· ϗ ὡς ἄρα ἡ ΚΝ πρὸς τὴν ΝΙ. ἤτοι τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα, ὡς τὰ μέρη τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ν τετμημένης διαμέτρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ὅθεν ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΚΜ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς τετάρτην ζητουμένην τὴν ΝΖ, κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΚΝ πρὸς τῇ κορυφῇ Ν. Ὥσπερ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ τετράγωνον ἐστὶν ἴσον τῷ ΚΝΖ ὀρθογωνίῳ (16 τοῦ ϛ΄.), οὕτω ϗ τὸ ἀφ᾽ οἱσδήποτε ἑτέρας τεταγμένης ΗΙ τετράγωνον ἴσον ἔσεται τῷ ὑπὸ ΙΝΖ ὀρθογωνίῳ. Τὰ γὰρ ὀρθογώνια ταῦτα ἔχοντα ὕψος ταυτὸν τὴν ΝΖ, ἔσεται ὡς αἱ τετμημέναι ΚΝ, ΙΝ (1 τοῦ ϛ΄.), ϗ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ΜΚ, ΙΗ τετράγωνα τὰ ταύταις ἀνάλογα (ὅθεν $MK^2 : HI^2 = KNZ : INZ$. ϗ ἐπεὶ $MK^2 = KNZ$, ἄρα ϗ $HI^2 = INZ$). Σταθερὰ ἄρα ἡ εὐθεῖα ΝΖ, ἥτις τοῖς μὲν ἀρχαίοις ἐκαλεῖτο πλευρὰ ὀρθία, ϗ παρ' ἣν δύνανται αἱ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμέναι· ἡμῖν δὲ καλείσθω *Παράμετρος* ϗ *ὀρθία* πλευρά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἀχθείσης ὁιασδήποτε εὐθείας ΕΝ παραλλήλυ μὲν τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ, περατυμένης δὲ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῦ διὰ τῦ ἄξονος τριγώνυ, ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ, ἢ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΝ, ὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ζητυμένην τὴν ΝΖ· ἡ ΝΖ ἔσεται τῆς παραβολῆς πλευρὰ ὀρθία ἢ Παράμετρος. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΚ ἴση ἐσὶ τῇ ΕΝ (ὄντος παραλληλογράμμυ τῦ ΒΕΝΚ σχήματος), ἔσεται ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΝΖ, ὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΕΝ· ἢ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΕΑΝ, ΝΚΔ ὄντων ἀμφοτέρων ὁμοίων τῷ ΑΒΔ) ἡ ΝΚ πρὸς ΚΔ. ϗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΚΝΖ· (16 τῦ ϛ'.). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ ἐσὶν ἴσον τῷ ἀπὸ ΜΚ (Πορ. Α'. τῆς Β'.)· ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ, ἴσον τῷ ὑπὸ ΚΝΖ. ἡ ἄρα ΝΖ Παράμετρός ἐσι τῆς Παραβολῆς (Πορ. Α'. τῆς παρύσης).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἡ παράμετρος (ΝΖ) εὑρεθήσεται ϗ ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΒΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως ΒΔ τετράγωνον, οὕτως ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ Κώνου ἕως τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ΑΝ πρὸς ΝΖ. Τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν ΒΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΕ, διὰ τὸ εἶναι τὰς εὐθείας ταύτας πρὸς ἐκείνας ἀνάλογον (25). Ἀλλὰ (Πορ. προηγ.) τὸ ἀπὸ τῆς ΕΝ τετράγωνον ἐστὶν ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς παραμέτρου ΝΖ (διὰ τὸ εἶναι τὰς ΕΑ, ΕΝ, ΕΖ συνεχῶς ἀνάλογον)· Ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΕΑΝ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑ, ΝΖ. δι' ὃ καὶ ὡς ἡ ΑΝ πρὸς ΝΖ (1 τοῦ ϛ'.). Κοινὸν γὰρ ἑκατέρῳ τῶν ὀρθογωνίων τούτων τὸ ὕψος ΕΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ε'.

Σχημ. 18. Ἐὰν Κῶνος οἱοσοῦν ὁ ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ, τέμνοντι μὲν τὴν βάσιν τοῦ Κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΜΘ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν

---

20) Τὸ ὑπὸ $BA\Delta : B\Delta^2 = EAN : EN^2$· εἴγε
$BA : B\Delta = EA : EN$ καὶ
$A\Delta : B\Delta = AN : EN$· συνθέσει ἄρα (σημ. 23.)
$BA \times A\Delta : B\Delta \times B\Delta = EA \times AN : EN \times EN$ ἤτοι
$BA\Delta : B\Delta^2 = EAN : EN^2$.

τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ, ἠγμένῳ δὲ δι᾽ εὐθείας τῆς ΝΚ μὴ ἔσης ἤδη παραλλήλȣ μιᾷ τῶν πλευρῶν τȣ̃ διὰ τȣ̃ ἄξονος τριγώνȣ ΒΑΔ, ἀλλὰ συμπιπτȣ́σης τῇ μὲν, τȣ́των κατωτέρω τῆς τȣ̃ Κώνȣ κορυφῆς κατάγε τὸ Ν, τῇ δὲ ἀνωτέρω κατὰ τὸ Ξ· τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς τοιαύτης τομῆς καταγομένων εὐθειῶν ΜΚ, ΗΙ τετράγωνα, ἔσεται ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς κατὰ τὴν τομὴν διαμέτρȣ προσεκβαλλομένης ἐπὶ τὸ Ξ, τῶν ἀπολαμβανομένων ἀπ᾽ αὐτῶν τῶν τεγαμένων ἕως ἑκατέρȣ τῶν Ν, Ξ περάτων τῆς κατὰ τὴν τομὴν διαμέτρȣ, ἤτοι ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ, ΞΙΝ. Καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν κατὰ κορυφὴν κειμένην κωνικὴν ἐπιφάνειαν προεκβληθῇ, ἀναφυήσεται καὶ ἐν ἐκείνῃ τομὴ ὁμοία τῇ ΜΝΘ ἡ λΞη, ἐν ᾗ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὴν διάμετρον τετράγωνα εἴτε ἀλλήλοις, εἴτε τοῖς ἀπὸ τῶν ἐν τῇ ΜΝΘ τεταγμένων τετραγώνοις παραβαλλόμενα, ἔσεται ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῶν τῆς διαμέτρȣ τμημάτων τῶν μεταξὺ αὐτῶν τῶν τεταγμένων ϗ ἑκατέρας τῆς κορυφῆς Ξ, Ν περιεχόμενα.

Καλείσθω δὲ ἑκατέρα μὲν τῶν τοιȣ́των τομῶν ΥΠΕΡΒΟΛΗ· πρὸς ἀλλήλας δὲ τομαὶ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑΙ· ἡ δὲ ΝΞ μέρος ȣ̉σα τῆς διαμέτρȣ μεταξὺ τῶν δυεῖν κορυφῶν ἀπολαμβανόμενον· καλείσθω πλευρὰ ΠΛΑΓΙΑ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τȣ̃ Ι σημείȣ (καθ' ὃ ὁιαδήτις τεταγμένη ΗΙ συμβάλλει τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς.) ἡ εὐθεῖα ΠΙΥ τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ΒΔ παράλληλος· ἔςι δὴ καὶ ἡ ΗΙ παράλληλος τῇ ΜΚ. Τὸ ἄρα διὰ τῶν ΗΙ, ΠΙΥ, ἐπίπεδον παράλληλόν ἐςι τῷ διὰ τῶν ΜΚ, ΒΔ, τȣ̃τ' ἔςι τῇ βάσει τȣ̃ κώνȣ (15 τȣ̃ ΙΑ΄.). Κύκλος ἄρα ἐςὶν ἡ τομὴ ΠΗΥ (Προτασ. Α΄.), ȣ̃ διάμετρος ἡ ΠΙΥ. ϗ ἐςὶν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΗΙ. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΙ, ἐςὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΙΥ. τȣ̃τ' ἔςιν ὡς τὸ ΒΚ×ΚΔ πρὸς τὸ ΠΙ×ΙΥ. Ἀλλ' ὁ λόγος τȣ̃ ΒΚ×ΚΔ πρὸς τὸ ΠΙ×ΙΥ σύγκειται ἔκ τε τȣ̃, ὃν ἔχει ἡ ΒΚ πρὸς ΠΙ, τȣ̃τ' ἔςιν ἡ ΞΚ πρὸς ΞΙ (ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα ΒΞΚ, ΠΞΙ) ϗ ἡ ΚΔ πρὸς ΙΥ, τȣ̃τ' ἔςιν ἡ ΚΝ πρὸς ΝΙ (ὅμοια γὰρ ϗ τὰ τρίγωνα ΚΝΔ, ΙΝΥ.). Ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν λόγων, τȣ̃τ' ἔςι τȣ̃ τῆς

ΞΚ πρὸς ΞΙ, καὶ τῆς ΚΝ πρὸς ΝΙ σύγκειται καὶ ὁ τῦ ΞΚΝ πρὸς τὸ ΞΙΝ (23 τῦ ϛ'. ϗ σημ. 24). ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΥ, ὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΙΝ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΙΥ ἐςιν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΙ, ὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΞΙΝ (26). Τὸ αὐτὸ δὴ δειχθήσεται καὶ περὶ τῶν ἐν τῇ τομῇ λΞη τεταγμένων (27)· δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐὰν γένηται ὡς ἡ ΚΝ πρὸς ΚΜ, ὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ζητεμένην τὴν ΚΧ, ϗ εὑρεθεῖσα ἡ ΚΧ, συναφθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΚΝ πρὸς τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ Κ, ἐπιζευχθείσης τε τῆς ΞΧ, ἀχθῶσιν ἐπ'

---

26) *Δειχθείη ἂν ϗ ὕτως ἡ Πρότασις.*

Ἐπεί ἐςιν $BK : \Pi I = K\Xi : \Xi I$

καὶ $K\Delta : I\Upsilon = KN : NI$, *ἔσεται δὴ* (σημ. 23.) ϗ $BK \times K\Delta : \Pi I \times I\Upsilon = \Xi K \times KN : \Xi I \times IN$ · ἀλλὰ $BK \times K\Delta : \Pi I \times I\Upsilon = MK^2 : HI^2$, ἄρα $MK^2 : HI^2 = \Xi K \times KN : \Xi I \times IN$.

27) Ἐν ταῖς ἀντικειμέναις τομαῖς ΜΝΘ, λ Ξ η ἔσεται $HI^2 : \eta\iota^2 = \Xi IN : \Xi\iota N$. Ἀχθείσης γὰρ διὰ τῦ σημείυ ι, τῆς εὐθείας π ι υ παραλλήλυ τῇ διαμέτρῳ τῆς τῦ Κώνυ ΑΒΔΘ βάσεως, ϗ διὰ τῶν π υ, η λ παραλλήλων τοῖς ΒΔ, ΜΚ διαχθὲν ἐπίπεδον τὸ π η υ, ἔσεται παράλληλον τῇ βάσει τῦ Κώνυ ΑΒΔΘ (15. τῦ ΙΑ'.) Κύκλος ἄρα ἡ τομὴ π η υ (14. σημ.) Ὅθεν $HI^2 : \Pi I\Upsilon = \eta\iota^2 : \pi\iota\upsilon$ (Πορ. Α. τῆς Α'.). Ἔτι ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι υπ, ΥΠ, τὰ τρίγωνα ἄρα ιΝυ, ΙΝΥ ὅμοια· ὅμοια δὲ καὶ τὰ ΙΠΞ, ιπΞ· ἄρα