Εἰς τοὺς ἀναγινώσκοντας

Ἡρωελεγεῖον

Τλησιπόνε γαίης πολυπαθέα λείψανα
Μυσῶν
Πρῶτον ἀθρεῦντα κλέος, μήσονα χί-
ζετ' ἔτι.
Μέλπετε δ' ΙΩΝΑΝ πολυΐδμονα, ὅς τόδ'
ὀπάζει
Νόσιμον ἦσι Βίβλοις, ἄσπετον οἷς κα-
μάτοις.

Ἀργύριος παπᾶ Ῥίζυ.

Ἕτερον πρὸς τὺς αὐτύς.

Ἰαμβικόν

Θέλων νοῆσαι πενταπλᾶς τομὰς Κώνυ,
Οὐκ ἂν δυνήσῃ ταῦτα πέντε μὴ φέρων·
Φύσιν, πόνον, κλίσιν τε, καὶ ὁδηγίαν
Πάντως κατατρίψεις δὲ καιρὸν εἰς μάτην.

Ἀνδρόνικος Γεωργίυ Θεσσαλονικεύς.

,,Παιδεία δὲ τῶν ἐν ἡμῖν μόνου ἐςὶν ἀθανάτον καὶ θεῖον.

Πλούτ. περὶ Παίδ. ἀγωγ.

ΣΥΝΟΨΙΣ
ΤΩΝ
ΚΩΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΩΝ.

ΟΡΟΙ ΠΡΩΤΟΙ.

α΄. Ἐὰν διὰ σημείου μένοντος τοῦ Α, εὐθεῖα διήκου- Σχημ. 1.
σα ἡ ΒΑΖ ἐφ᾽ ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ περὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΒΕΔ, ὃς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ τὸ σημεῖον Α, φερομένη, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἑκατέρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης παρ᾽ ἑκάτερον τοῦ μεμενηκότος σημείου Α γραφεῖσα, *Κωνικὴ* καλεῖται ἐπιφάνεια.

β΄. Τὸ δὲ περιεχόμενον στερεὸν ὑπό τε τοῦ κύκλου ΒΕΔ ἢ τοῦ βεδ, καὶ τῆς μεταξὺ τοῦ μεμενηκότος σημείου Α, καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΒΕΔ ἢ βεδ, Κωνικῆς ἐπιφανείας, καλεῖται *Κῶνος*.

γ΄. Τὸ μεμενηκὸς δὲ σημεῖον Α, *Κορυφὴ* τῆς τε Κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ Κώνου.

δ΄. Κύκλος δὲ ὁ ΒΕΔ ἢ βεδ, εἰς ὃν ὁ Κῶνος ἀποτερματίζεται, *βάσις* τȣ̃ Κώνȣ καλεῖται.

ε΄. Ἡ δ' ἀπὸ τῆς κορυφῆς τȣ̃ Κώνȣ ἐπὶ τὸ κέντρον τȣ̃ κύκλȣ, ὅ ἐϛιν αὐτȣ̃ βάσις, ἀγομένη εὐθεῖα, *ἄξων* καλεῖται τȣ̃ Κώνȣ.

ϛ΄. Καὶ οἱ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι τȣ̀ς ἄξονας, *ὀρθοὶ* Κῶνοι καλȣ̃νται.

ζ΄. Οἱ δὲ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι τȣ̀ς ἄξονας, *Σκαληνοί.*

ΕΠΟΜΕΝΑ.

α΄. Δῆλον ȣ̃ν ὡς τῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων Κωνικῶν ἐπιφανειῶν ΒΑΔ, βΑδ ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται, τῆς γραφȣ́σης εὐθείας εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα προσεκϐαλλομένης.

β΄. Ληφθέντος ἐπὶ τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας σημείȣ ὁτινοσȣ̃ν τȣ̃ Η, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ σημεῖον τȣ̃το ἀγομένη εὐθεῖα, ἐν τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἐϛι. Συμπίπτει γὰρ τῇ ΑΕ εὐθείᾳ, ἥτις τὴν Κωνικὴν ἐπιφάνειαν γράφȣσα, δι' ἑκαϛȣ̃ αὐτῆς ἥκει σημείȣ ἐπομένως δὲ καὶ διὰ τȣ̃ Η.

γ΄. Ὅθεν καὶ οἱαδήτις εὐθεῖα ΑΗ ἀπὸ τῆς τȣ̃ Κώνȣ κορυφῆς Α ἐφ' οἱονδήποτε σημεῖον Η τῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας ἐπιζευγνυμένη, προσεκϐληθεῖσα ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν, ἐπί τι αὐτῆς σημεῖον τὸ Ε πεσεῖται.

Σχημ. 2. δ΄. Ἐὰν ἐπὶ τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας δύω σημεῖα ληφθῇ τὰ Η, Ι, καὶ ἐπὶ ταῦτα τὰ σημεῖα ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα ἡ Η Ι, μὴ διέρχηται διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἐντὸς πεσεῖται τȢ Κώνȣ. Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΑΙ, προσεκβαλλόμεναι, πεσȣ̃νται ἐπὶ τὴν τȣ̃ κύκλȣ περιφέρειαν κατάγε τὰ Ε, Β (ἐπόμ. γ΄.). ϗ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΒ ἔςαι ἐντὸς τȣ̃ κύκλȣ (2. τȣ Γ΄ τῶν ςοιχείων). τὸ ἄρα ἐπίπεδον τȣ̃ ΕΑΒ τριγώνȣ ἐντός ἐςι τȣ̃ Κώνȣ· τέμνει γὰρ αὐτȣ̃ τὴν βάσιν. ϗ ἡ ΗΙ ἄρα εὐθεῖα ἐν αὐτῷ ȣ̃σα τῷ ἐπιπέδῳ (12. τȣ̃ ΙΑ΄.) ϗ δίω σημεῖα τῶν τȣ̃ τριγώνȣ πλευρῶν ἐπιζευγνύȣσα, ἐντὸς πίπτει τȣ̃ Κώνȣ, πλὴν δυοῖν αὐτῆς σημείων τῶν Η, Ι, ἅπερ ἐςὶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ. Προσεκβληθεῖσα δὲ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ πρὸς τὰ Η, Ι, ἐκτὸς πεσεῖται τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας.

ε΄. Ἐὰν Κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἡ τομὴ τρίγωνον ἔςαι. Ἑκάςη γὰρ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΑΒ, ΑΔ, αἵγε κοιναὶ τομαί εἰσι τῆς τε τοῦ Κώνου ἐπιφανείας ϗ τῶν τεμνόντων ἐπιπέδων ΑΒΕ, ΑΒΔ, συμπίπτει ἀεὶ τῇ κατὰ τȣ̃ κύκλȣ φερομένῃ εὐθείᾳ ΑΒ, ἥτις τὴν Κωνικὴν ἐπιφάνειαν γράφȣσα διὰ τῶν σημείων Β, Ε, Δ διήκει. ἀλλὰ ϗ ἡ ΕΒ ἢ ΔΒ κοινὴ τομή ἐςι τȣ̃ τε τέμνοντος ἐπιπέδȣ, ϗ τῆς βάσεως (3. τȣ̃ ΙΑ΄.). Τὰ ἄρα ΑΒΕ, ΑΒΔ. τρίγωνά ἐςιν εὐθύγραμμα (ὅρ. 24. τȣ̃ Α΄. τῶν ςοιχ.).

Σ Χ Ο΄ Λ Ι Α.

α΄. Βȣλομένοις ὧδε πρὸς ταῖς καμπύλαις τομαῖς τȣ̃ Κώνȣ, ϗ περὶ τῶν Τριγωνικῶν πραγματεύσασθαι,

σκεπτέον ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τομῶν τρίγωνα διττῶς ἂν ἔχοι ἀπογεννᾶσθαι· ἤτοι γὰρ ἐπιπέδοις διὰ τοῦ ἄξο-
Σχημ. 3. νος, οἷα τὰ ΑΒΔ, ΑΖΕ, ἢ ἐπιπέδοις μὴ διὰ τοῦ ἄξονος διϊοῦσιν, ἀλλ' ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ χορδὰς οἱασδήποτε τὰς ΒΕ, ΒΛ ἄνισα τόξα ὑποτεινούσας διηγμένοις. Καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ πτώσει τὰ τρίγωνα πάντα πάντως ἀλλήλοις ἴσα. Ἔχει γὰρ βάσεις ἴσας τὰς διαμέτρους ΒΔ, ΖΕ, καὶ ὕψος ταὐτὸν τὸν ἄξονα ΑΓ, ὃς τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως, καὶ δὴ καὶ ἁπάσαις ταῖς διὰ τοῦ Γ σημείου διϊούσαις εὐθείαις ἐστὶ κάθετος (ὅρ. 3 τοῦ ΙΑ΄.).

Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ πτώσει οὐ πάντα πάντως ἀλλήλοις ἴσα τὰ τρίγωνα. Ἐνταῦθα γὰρ τὰ τρίγωνα ΑΒΛ, ΑΒΕ ἔχει μὲν ταῖς ΑΒ, ΑΕ, ΑΛ πλευρὰς ἀλλήλαις ἴσας, εἴγε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἐξισοῦται τοῖς ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῶν ἀκτίνων τοῦ κύκλου. Κάθετος γὰρ ὢν ὁ ἄξων τῇ κωνικῇ βάσει, κάθετός ἐστι καὶ ταῖς ἐν αὐτῇ εὐθείαις. ΓΒ, ΓΕ, ΓΛ (ὅρ. 3 τοῦ ΙΑ΄.). Ἔστιν ὅμως ἄνισα διὰ τὸ ἀνίσους ἔχειν τὰς βάσεις ΒΕ, ΒΛ, αἵγε μετὰ τῶν ἴσων πλευρῶν ἀνίσους πρὸς τῇ κορυφῇ Α γωνίας τὰς ΒΑΕ, ΒΑΛ, ἃς ὑποτείνουσι, συνιστῶσι (25 τοῦ Α΄.), ὧν καὶ τὰ ὀρθὰ ἡμίτονα ΕΝ, ΛΟ ἄνισα ἔσεται (1). Καὶ παραβαλλό-

---

Σχημ. 1. τῶν ὑποσημειώσεων. Πίν: ΙΒ.

1) Τὰ ὀρθὰ ἡμίτονα ΕΝ, ΛΟ ἄνισα ἔσεται· εἴγε τὰ τρίγωνα ΒΑΛ, ΒΑΕ ἐστὶν ἰσοσκελῆ, καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΛ, ΒΑΕ ἄνισοι. Εἰ γὰρ τὰ τρίγωνα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κείμενα ἐπινοηθείη, καὶ ἀκτῖνι, τῇ ΑΛ κύκλος γραφείη, οὗτος

μενα ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΒΛ πρὸς τὴν κοινὴν βάσιν ΑΒ, ἔσεται ὡς τὰ ἄνισα αὐτῶν ὕψη ΕΝ, ΛΟ.

β΄. Ἐὰν ἄρα ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία ΒΑΔ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ᾖ ὀρθὴ ἢ ὀξεῖα, αἱ γωνίαι τῶν μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τοσούτῳ ἐλάσσους ἔσονται, ὅσῳ ἐλάσσους χορδὰς τὰς ΒΕ, ΒΛ τύχωσιν ἐπιβεβηκυῖαι (25 τοῦ Α΄.). Μέγιστον ἄρα ἁπάντων τὸ διὰ τοῦ ἄξονος (2). Τῶν δὲ λοιπῶν ἐκεῖνο μᾶλλον ἔλασσον, ὃ πλεῖον τοῦ ἄξονος ἀφέστηκε, καὶ μᾶλλον ἐλάσσω χορδὴν βάσιν ἔχει.

Ἐὰν δὲ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἀμβλεῖα ᾖ, οὐκ ἔσται τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἁπάντων τὸ μέγιστον, ἀλλ' εὑρεθήσεται ἕτερον, ὅπερ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος πίπτει, ἐκείνου μεῖζον. Τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ΒΔ, ἥτις τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ΒΑΔ ὑποτείνει, τετράγωνον, μεῖζον ἔσται

δὴ διὰ τῶν σημείων Ε, Β διελεύσεται· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ἐστὶ μείζων τῆς ὑπὸ ΛΒΕ, καὶ τὸ ΒΛ ἄρα τόξον μεῖζον ἔσται τοῦ ΒΕ (πόρ. τῆς 23. τοῦ Α.). Τοιγαροῦν καὶ τὸ ΛΕΒλ, ὅπερ ἐστὶ διπλάσιον τοῦ ΒΛ, μεῖζον ἔσται τοῦ ΕΒε, ὅ ἐστι διπλάσιον τοῦ ΒΕ. καὶ ἡ χορδὴ ἄρα Λλ, μεῖζον ἔσται τῆς χορδῆς Εε. Ἀλλὰ τὰ ἡμίσεα ἤτοι αἱ κάθετοι ΕΝ, ΛΟ εἰσὶν ἡμίσειαι τῶν χορδῶν τούτων (3 τοῦ Γ΄.) ἄρα ἡ κάθετος ΛΟ, μείζων ἐστὶ τῆς ΕΝ.

2) Τὰ γὰρ ἡμίσεα, ἃ καταμετρεῖ τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας, ὡς εἴρηται ἐν τῇ δείξει τοῦ ἀνωτέρω πορίσμ., τοσούτῳ μείζω τυγχάνει, ὅσῳ μείζους εἰσὶν αἱ γωνίαι· αἱ δέ γε γωνίαι τοσούτῳ μείζους, ὅσῳ μείζους αἱ χορδαί, αἷς ὑποτείνονται.

τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΔ τετραγώνων ὁμοῦ ληφθέντων (12 τοῦ Β΄.)· χορδή τις ἄρα ἑτέρα ἐλάσσων τῆς διαμέτρου εὑρεθήσεται ἡ ΒΛ (3), ἀφ' ἧς τὸ τετράγωνον, τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΛ, ὁμοῦ ληφθεῖσιν ἐξισωθήσεται. Γενήσεται δὲ τοῦτο ἔνθα ἂν ἡ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινομένη γωνία ὀρθὴ ἀποβῇ (48. τοῦ Α΄.). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΒΑΛ, ὃ μὴ διὰ τοῦ ἄξονος, μεῖζον ἔσται τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος. Λειφθείσης γὰρ ὡς βάσεως τῆς ΑΒ εὐθείας, ἡ ΑΛ ἔσεται ὕψος τοῦ ΒΑΛ τριγώνου, ἥτις ὡς μὲν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ Κώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς αὐτοῦ βάσεως ἠγμένη, ἴση ἐστὶ τῇ ΑΔ· ὡς δὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΔΑΜ ὑποτείνουσα, μείζων τῆς καθέτου ΔΜ (ιγ. τοῦ Α΄.), ἥτις ἐστὶν ὕψος τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ΒΑΔ, ἤτοι ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΜΑΔ ὀξείας, ἐπομένως δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ ἀμβλείας. Διὰ δὴ ταῦτα τὸ τρίγωνον ΒΑΛ, οὗπερ ἡ πρὸς τῇ τοῦ Κώνου κορυφῇ γωνία ἐστὶν ὀρθή, ὡς ἔχον ὕψος ἁπάντων μέγιστον, μεῖζον ἔσται οἱουδήποτε ἑτέρου τριγώνου εἴτε διὰ τοῦ ἄξονος, εἴτε καὶ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος.

Εἰ δὲ γένοιτο ἐκτὸς τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἕτερον τὸ ΒΑΕ, οὗπερ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ Κώνου κειμένη

---

3) Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἐστὶν ἀμβλεῖα καὶ ἁπασῶν μεγίστη, αἵ τε πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ Κώνου γωνίαι ἀπομειοῦνται κατὰ λόγον, ὃν αἱ χορδαὶ ΒΔ, ΒΛ, ΒΕ, Δυνατὸν ἄρα καὶ ἐπὶ ὀρθήν ποτε ἀφικέσθαι τὴν ὑπὸ ΒΑΛ, ἧς τινος βάσις ἔσται ἡ χορδὴ ΒΛ διαμέτρου ἐλάσσων.

γωνία εἴη ὀξεῖα ϗ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΑΜ ἐφεξῆς τῆς τȣ̃ διὰ τȣ̃ ἄξονος τριγώνȣ ΒΑΔ ἀμβλείας, τὸ τρίγωνον τȣ̃το ΒΑΕ, ἔσεται ἴσον τῷ διὰ τȣ̃ ἄξονος τριγώνῳ ΒΑΔ (4.). Τηνικαῦτα γὰρ αἱ κάθετοι ΕΝ, ΔΜ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, ȣ̃σαι γωνιῶν ἴσων ὀρθὰ ἡμίτονα.

γ΄. Ἐὰν δὲ ὁ Κῶνος σκαληνὸς ᾖ, καταχθείσης ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον τῆς καθέτȣ ΑΞ, ϗ διαχθέντος ἐπιπέδȣ τινὸς διά τε τȣ̃ ἄξονος ΑΓ ϗ τῆς καθέτȣ ΑΞ, ὅπερ τρίγωνον διὰ τȣ̃ ἄξονος ὀρθὸν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ τὸ ΑΒΔ ποιήσει (18. τȣ̃ ΙΑ΄.), δῆλον ὡς πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθεισῶν εὐθειῶν, αἵτινες ϗ πλευραὶ καλȣ̃νται τȣ̃ Κώνȣ, μία μὲν ἐςὶ μεγίςη ἡ πορρωτάτω τῆς καθέτȣ (ὡς ἡ ΑΒ)· μία δὲ ἐλαχίςη ἡ ἐγγυτάτω τῆς καθέτȣ (ὡς ἡ ΑΔ)· δύω δὲ μόναι ἴσαι παρ᾽ ἑκάτερον τῆς ἐλαχίςης ϗ τῆς μεγίςης. ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς μεγίςης, τῆς ἀπώτερόν ἐςιν μείζων. Σχημ. 4. ϗ 5.

Τῶν γὰρ ἀπὸ τȣ̃ σημείȣ Ξ ἐπὶ τὴν τȣ̃ κύκλου περιφέρειαν διαχθεισῶν εὐθειῶν, μεγίςη μὲν ἐςιν ἡ

4.) Ληφθείσης τῆς ΑΔ ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης ΑΕ ὡς ὁλικȣ̃ ἡμιτόνȣ, ἔσεται ἡ μὲν ΔΜ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΔΑΜ γωνίας, ἡ δὲ ΕΝ, ἡμίτονον τῆς ἴσης ὑπὸ ΕΑΝ. Ἀλλὰ τὰ ἡμίτονα τῶν ἴσων γωνιῶν, ἐὰν τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον ᾖ τὸ αὐτὸ, ἐςὶν ἴσα· ἄρα ἡ κάθετος ΕΝ ἐςὶν ἴση τῇ καθέτῳ ΔΜ.

διὰ τȣ̃ κέντρȣ ΞΒ, ἐλαχίςη δὲ ἡ μεταξὺ τȣ̃ σημείȣ Ξ ϗ τῆς περιφερείας τῆς κυκλικῆς βάσεως ἡ ΔΞ· αἱ δὲ λοιπαὶ ΞΖ, ΞΕ, μείζȣς ἢ ἐλάσσȣς ὡς τῆς μεγίςης ἢ τῆς ἐλαχίςης ἔγγιον (7 ϗ 8 τȣ̃ Γ′.). Ὅθεν ϗ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα μέγιςα ϗ ἐλάχιςα, μείζω ἢ ἐλάσσω ἀμοιβαδὸν ἔσεται. Δύω δὲ οἱαδήποτε τὰ ἀπὸ δυεῖν εὐθειῶν ΞΟ, ΞΕ ἐπίσης τῆς μεγίςης ΞΒ παρ᾽ ἑκάτερον ἀφιςαμένων ϗ διὰ τȣ̃το ἀλλήλαις ἴσων, ἔσεται ἴσα (7 ϗ 8 τȣ̃ Γ′.). Ἔνθεντοι προκειμένȣ ἑκάςῳ τȣ́των τȣ̃ ἀπὸ τῆς καθέτου ΞΑ προκύψει μέγιςον μὲν ἁπάντων τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἐλάχιςον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΑΖ, μείζω ἢ ἐλάσσω ὡς τῆς μεγίςης ἔγγιον ἢ ἀπώτερον (47 τȣ̃ Α′.). Δύω δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΑΕ, αἵγε τῶν περάτων τῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΒ τεταγμένης ΕΗΟ καθάπτωνται, ἔσεται ἴσα (5.). Δῆλον ἄρα ὡς μεγίςη μὲν ἁπασῶν τῶν τȣ̃ Κώνου πλευρῶν ἡ ΑΒ, ἥτις ἐςὶ πόῤῥωτάτω τῆς καθέτȣ ΑΞ· ἐλαχίςη δὲ ἡ ταύτης ἐγγιτάτω ΑΕ. Αἱ δὲ λοιπαὶ μείζȣς ἢ ἐλάσσȣς, ὡς τῆς μεγίςης ἔγγιον ἢ ἀπώτερον. ἢ ἴσαι ἀλλήλαις, εἴπερ ἴσον ἐκείνης ἀφίςαν-

---

5.) Ἐπεὶ γὰρ ἡ τεταγμένη ΕΗΟ ἐξ ὑποθέσεως δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Η ὑπὸ τῆς διαμέτρȣ ΔΒ, ϗ πρὸς ὀρθὰς ἄρα τέτμηται (3. τȣ̃ Γ′.)· αἱ γωνίαι ἄρα ΟΗΞ, ΕΗΞ ὀρθαὶ ϗ ἑπομένως ἴσαι· κοινὴ δὲ ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων ΞΟΗ, ΞΕΗ ἡ ΗΞ. ἄρα ϗ ἡ ΞΟ ἴση ἐςὶ τῇ ΞΕ (4. τȣ̃ Α′.). ϗ $ΞΟ^2 = ΞΕ^2$ · ϗ $ΞΟ^2 + ΞΑ^2 = ΞΕ^2 + ΞΑ^2$. ἤτοι $ΑΟ^2 = ΑΕ^2$ · ϗ ἡ πλευρὰ ΑΟ = τῇ ΑΕ.

ται παρ' ἑκάτερον, ὡς αἱ ΑΟ, ΑΕ καὶ ὅσαιοῦν ἄλλαι ἐφ' οἱασδήποτε τεταγμένης τὰ πέρατα ἀχθήσονται, ἐξ ὧν δὴ καὶ μόνων τρίγωνον ἰσοσκελὲς οἷον τὸ ΕΑΟ συνίσαται, τὰ δ' ἐκ τῶν λοιπῶν ἀεὶ σκαληνά, εἰμήτῳ ξυμβῇ τὴν βάσιν μιᾷ τινι τῶν πλευρῶν ἴσην ἔχειν.

δ'. Ἐὰν ἐν σκαληνῷ Κώνῳ τριγώνου τινος διὰ τοῦ ἄξονος ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία ὀρθὴ ᾖ, καὶ τῶν λοιπῶν ἁπάντων τριγώνων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαι, ὀρθαὶ ἔσονται καὶ ἑπομένως ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΔ ἡμικύκλιον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου γραφῇ, τοῦτο δὴ διὰ τῆς κορυφῆς Α διελεύσεται, διὰ τὸ εἶναι ὀρθὴν τὴν ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἐκεῖ συνισαμένην γωνίαν (31 τοῦ Γ'.). Οὔσης δὲ τῆς ΑΓ ἴσης ταῖς ἀκτῖσιν ΓΕ, ΓΖ, καὶ αἱ ΑΕ, ΑΖ ἄρα πλευραὶ ὀρθὴν γωνίαν (31 τοῦ Α'.) ἐκεῖ περιέξουσιν (6).

6.) *Ἐὰν δύω τρίγωνα τὰ ΑΕΒ, ΑΓΒ ἔχῃ τὰς γωνίας ἐν τῷ Γ καὶ Ε ἴσας· ἔχῃ δὲ καὶ βάσιν τὴν αὐτὴν ἢ ἴσην τὴν ΑΒ, λέγω ὅτι δυνατὸν διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Ε κύκλον διελθεῖν. Διὰ τριῶν γὰρ σημείων δοθέντων τῶν Α, Β, Γ, κύκλος διελεύσεται (4. τοῦ Γ'.) ἐγὼ δὲ λέγω ὅτι αὐτὸς οὗτος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ Ε. Εἰ δὲ μή, διελθέτω, εἰ δυνατόν, κατωτέρω τοῦ Ε, διὰ τοῦ Δ φέρε· καὶ ἀχθείσης τῆς ΑΔ ἔσεται δὴ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ ἴση τῇ ΑΓΒ, (21. τοῦ Γ'.). Ἔσι δὲ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ = τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ἡ ἐκτὸς ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ ἔσεται ἴση τῇ ἐντὸς ὑπὸ ΑΕΒ, ὅπερ ἀντίκειται τῷ α' πορίσματι τῆς 32. τοῦ Γ'. τῶν σοιχείων. Οὐκ ἄρα κατωτέρω τοῦ Ε* Σχημ. 2. τῶν ὑποσ.

Ε'ὰν δὲ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία ΒΑΔ ἦ ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, τὰ λοιπὰ διὰ τῦ ἄξονος τρίγωνα ἀνί-

---

διελεύσεται ὁ κύκλος, ἐ μὴν ἀλλ' ἐδὲ ἀνωτέρω διὰ τῦ Ζ φέρε. Διελθέτω γὰρ διὰ τῦ Ζ εἰ δυνατὸν, ϗ ἀχθείσης τῆς AZ, ἔςαι δὴ ἡ ὑπὸ AZH ἴση τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἴση τῇ ὑπὸ AEB, ἤτοι ἡ ἐκτὸς AZB ἴση τῇ ἐντὸς AEB ἐναντίον τῦ αὐτῦ πορίσματος. Ο' κύκλος ἄρα ὁ διὰ τῶν σημείων A, B, Γ διελεύσεται δήπε ϗ διὰ τῦ B· ϗ ἐὰν τρίγωνα δύω, κτ.

Σχημ. 3. 7. Ε'ὰν δὲ ἐν δυσὶ τριγώνοις ΣAZ, ΣEZ μὴ ὦσι
τῶν ὕψοσ. μὲν ὀρθογωνίοις ἐν τοῖς A, E· ἔχωσι δὲ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ΣZ, τὰς δὲ λοιπὰς πλευρὰς ἀνίσως, τὸ κεφάλαιον τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῦ ἑτέρυ τετραγώνων, ἴσον ἦ τῷ κεφαλαίῳ τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῦ ἑτέρυ, ἤτοι ἐὰν ἦ $\Sigma A^2 + AZ^2 = \Sigma E^2 + EZ^2$, λέγω ὅτι διὰ τῶν σημείων Σ, Z, E, A κύκλος ἐκ ἂν διελεύσεται. Διελθέτω γὰρ, εἰ δυνατὸν, ϗ ἀπὸ τῦ κέντρυ N ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΣZ βάσει ἡ NO, ἥτις διχοτομήσει τὴν ΣZ κατὰ τὸ O (3. τῦ Γ'.). ἐπεζεύχθω δὲ ϗ ἡ AE, ἥτις τμηθήσεται ὑπὸ τῆς διαμέτρυ $HONM$ κατὰ τὸ K. ϗ ἀχθεισῶν τῶν AO, OE ἔςαι κατὰ τὸ ἑπόμενον ε': σχόλιον $A\Sigma^2 + AZ^2 = 2AO^2 + 2ZO^2$. ϗ $\Sigma E^2 + EZ^2 = 2EO^2 + 2ZO^2$. ϗ ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως $A\Sigma^2 + AZ^2 = \Sigma E^2 + EZ^2$, ἔσεται δὴ καὶ $2AO^2 + 2ZO^2 = 2EO^2 + 2ZO^2$· ϗ τῦ κοινῦ ἑκατέρωθεν ἀρθέντος, $2AO^2 = 2EO^2$, καὶ $AO = EO$. αἱ ἄρα AO, EO ἐπίσης πρὸς τὴν διάμετρον $HONM$ νεύεσι (7. τῦ Γ'.) ϗ ἑπομένως ἡ ὑπὸ $AKO =$ τῇ ὑπὸ EKO· κοινὴ δὲ ἡ KO ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων AOK, EOK· ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ $AKO =$ τῇ ὑπὸ EKO (4. τῦ Α'.)· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· παράλληλοι ἄρα αἱ AE, ΣZ (29. τῦ Α'.)· ϗ ἡ ὑπὸ $AE\Sigma =$ τῇ ὑπὸ $E\Sigma Z$· ἄρα ἡ $EZ =$ τῇ $A\Sigma$ (21. τῦ Γ'.), ϗ $EZ^2 = A\Sigma^2$· Ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως $A\Sigma^2 + AZ^2 = EZ^2 + E\Sigma^2$, ἔ-

τυς ἕξει πρὸς τῇ κορυφῇ Α τὰς γωνίας (9), πλὴν εἰμήγ' αἱ αὐτῶν βάσεις ἐπίσης ἑκατέρωθεν πρὸς τὴν διάμετρον ΒΔ νεύυσιν (11.).

σεται ἄρα ϗ $AZ^2 = E\Sigma^2$ ϗ ἡ $AZ =$ τῇ $E\Sigma$· ἄρα ἡ $A\Sigma =$ τῇ EZ, ϗ ἡ $AZ =$ τῇ $E\Sigma$ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Κύκλος ἄρα διὰ τῶν σημείων Σ. A. E, Z ὐ διελεύσεται.

8. Δῆλον δ'ὅτι αἱ γωνίαι ΣAZ, ΣEZ ἄνισοι. Εἰ γὰρ ἴσαι εἶεν, κύκλος διὰ τῶν σημείων Σ, A, E, Z διήρχετο κατὰ τὴν 6 ὑποσημείωσιν.

9) Φανερὸν δὴ ἐκ τέτων ὅτι ἐὰν ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία ᾖ ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, τὰ λοιπὰ διὰ τῦ ἄξονος τρίγωνα ἀνίσυς ἕξει πρὸς τῇ κορυφῇ τὰς γωνίας. Εἴγε τὰ τρίγωνα, φέρε, ZAE. $\Sigma A\Pi$ ἔχοντα τὰς βάσεις ZE, $\Sigma\Pi$ ἴσας, ϗ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν ZA, AE τετραγώνων, ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπὸ τῶν ΣA, $A\Pi$ (ϰολ. ε'.) ἀνίσυς ἕξει τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας ZAE, $\Sigma A\Pi$ (σημ. ἀνωτερ.)

10. Ἐὰν αἱ διάμετροι $Z\Gamma E$, $O\Gamma\epsilon$ ἐπίσης νεύωσι πρὸς τὴν διάμετρον $\Delta\Gamma B$, ὡς εἶναι δηλαδὴ τὰς ὑπὸ $Z\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma\epsilon$ ἀλλήλαις ἴσας, αἱ OE, $Z\epsilon$ εὐθεῖαι, τεταγμέναι ἔσονται ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔB· Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ $Z\Gamma\Delta =$ τῇ ὑπὸ $\epsilon\Gamma\eta$, ἥτε $\epsilon\Gamma =$ τῇ ΓZ, ϗ ἡ $\Gamma\eta$ κοινὴ ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων $Z\Gamma\eta$, $\epsilon\Gamma\eta$· ἄρα αἱ ὑπὸ $\Gamma\eta\epsilon$, $\Gamma\eta Z$, ἀλλήλαις ἴσαι (4. τῦ Α'.) ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ϗ ἡ $Z\eta =$ τῇ $\eta\epsilon$. ἡ $Z\epsilon$ ἄρα τεταγμένη ἐςὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον $B\Delta$. Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ὅτι ϗ ἡ OE τεταγμένη ἐπὶ τὴν αὐτὴν $B\Delta$.

11) Ἐξ ὧν συνάγεται ὡς ἐν τοῖς τριγώνοις ZAE, ϵAO ἡ ὑπὸ EAZ ἔςιν ἴση τῇ ὑπὸ $OA\epsilon$. Ἡ γὰρ AO πλευρὰ τῦ τριγώνυ ϵAO ἔςιν ἴση τῇ AE πλευρᾷ τῦ ZAE (ϰολ. γ'.) ϗ ἡ AZ πλευρὰ τῦ ZAE, ἴση τῇ ϵA πλευρᾷ

ε΄. Τὰ δὲ κεφάλαια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν πλευρῶν οἱωνδήποτε τριγώνων διὰ τῦ ἄξονος ἔσεται ἀεὶ ἴσα. Ἐν παντὶ γὰρ τριγώνῳ τὰ ἀπὸ δυεῖν πλευρῶν τετράγωνα ὁμῦ ληφθέντα ἐξισῦται τῷ δὶς ἀπὸ εὐθείας, τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ μεσαίτατον σημεῖον τῆς βάσεως καταχθείσης τετραγώνῳ, σὺν τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμιβάσεως (12), ὡς δέδεικται ἐν τῇ τῆς ἡμετέρας Γεωμετρίας εἰσαγωγῇ. Ὅθεν τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΔ τετράγωνα ὁμῦ ληφθέντα, ἐξισῦται τῷ δὶς ἀπὸ τῦ ἄξονος ΑΓ τετραγώνῳ, σὺν τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος ΓΒ. Ὡ-

---

τῦ εΑΟ· ἔςι δὲ ϗ ἡ ΕΖ βάσις ἴση τῇ εΟ· ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση τῇ ΟΑε.

Σχημ. 4. τῶν ὑποσ. 12.) Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς *Α* οἱαςδήποτε τριγώνυ *ΒΑΠ* καταχθεῖσα εὐθεῖα ἡ *ΑΓ* δίχα τέμνῃ τὴν βάσιν *ΒΠ* κατὰ τὸ *Γ*. ἔσεται $AB^2 + A\Pi^2 = 2\Gamma\Pi^2 + 2A\Gamma^2$. Καταχθεῖσα γὰρ ἡ *ΑΖ* κάθετος, πιπτέτω μεταξὺ τῶν σημείων *Γ*, *Π*. ϗ ἔσεται δὴ ἡ μὲν ὑπὸ *ΑΓΒ*, ἀμβλεῖα. ἡ δὲ ὑπὸ *ΑΓΠ*, ὀξεῖα. Ὅθεν $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + 2\Pi\Gamma^2 \times \Gamma Z$ (12. τῦ *Β*.). ϗ $A\Pi^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Pi^2 - 2\Pi\Gamma \times \Gamma Z$ (13. τῦ αὐτῦ). Τοιγαρῦν $AB^2 + A\Pi^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + 2B\Gamma \times \Gamma Z + A\Gamma^2 + \Gamma\Pi^2 - 2\Pi\Gamma \times \Gamma Z = 2A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Pi^2 + 2B\Gamma \times \Gamma Z - 2\Pi\Gamma + \Gamma Z$. Ἔςι δὲ ἐξ ὑποθέσεως $B\Gamma = \Gamma\Pi$, καὶ ἑπομένως $B\Gamma^2 = \Gamma\Pi^2$. Καὶ δη καὶ $B\Gamma \times \Gamma = \Pi\Gamma \times \Gamma Z$, ἄρα $AB^2 + A\Pi^2 = 2A\Gamma^2 + 2B\Gamma^2 + B\Gamma \times \Gamma Z - 2B\Gamma \times \Gamma Z = 2A\Gamma^2 + 2B\Gamma^2 = 2A\Gamma^2 + 2\Gamma\Pi^2$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τὸ αὐτὸ δὴ τῦτο ξυμβαίνει ϗ ἐὰν ἡ κάθετος, *ΑΖ* μὴ πίπτῃ μεταξὺ τῶν σημείων *Γ*, *Π*· ἤ, ὅπερ ἐςι ταυτὸν, ἐὰν ἡ γωνία *ΒΑΠ* τύχῃ ὖσα ἀμβλεῖα, ὡς τῷ σαύτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΑΖ ὁμᾶ ληφθέντα, ἐξισᾶται τῷ δὶς ἀπὸ τᾶ αὐτᾶ ἄξονος σὺν τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος ΓΕ ἴσης τῇ ΓΒ. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΔ ὁμᾶ ληφθέντα ἐξισᾶται τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΑΖ, ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΠ, ΑΣ ὁμᾶ ληφθεῖσι· καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΔ ὁμᾶ ληφθέντα, ἐξισᾶται τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΠ, ΑΣ ὁμᾶ ληφθεῖσιν, ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΑΖ. καὶ τὰ ἀπὸ δυεῖν πλευρῶν οἱεδήποτε τριγώνε ὁμᾶ ληφθέντα ποσότης ἄρα ἐστι σταθερά.

ς΄. Τῶν δὲ διὰ τᾶ ἄξονος τετωνὶ τριγώνων ἐλάχιστον μέν ἐστιν, ᾗ τὸ ἐπίπεδον διὰ τῆς καθέτε ΑΞ διήκει καὶ δι᾽ αὐτὸ τᾶτο τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ κάθετον, οἷον τὸ ΒΑΔ· μέγιστον δὲ, ᾗπερ ἡ βάσις ΕΖ τῇ διαμέτρῳ ΒΔ κάθετος, οἷον τὸ ΕΑΖ. τῶν δὲ λοιπῶν μείζω μὲν τὰ τᾶ μεγίστε ἔγγιον· ἐλάσσω δὲ τὰ τέτε ἀπώτερον. Σχημ. 6. καὶ 7.

Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ΞΓ εὐθείας τῆς μεταξὺ τῆς καθέτε καὶ τᾶ ἄξονος ὡς ἐπὶ διαμέτρε, κύκλος ὁ ΓΣΞ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τᾶ Κώνε βάσεως γραφῇ, ᾗτος ἔσεται τόπος ἁπασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τᾶ Κώνε Α ἐφ᾽ οἱονδήποτε τριγώνων διὰ τᾶ ἄξονος τὰς βάσεις καταχθησομένων εὐθειῶν. Ἡ γὰρ ΕΓΖ κάθετος ᾖσα ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΒ, ἅπτεται ἄρα τᾶ κύκλε ΞΓΣ κατὰ τὸ Γ (16 τᾶ Γ΄.). Ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ

προσέχοντι δῆλον. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῆς κορυφῆς οἱεδήποτε τριγώνε κτ.

ΕΑΖ τρίγωνον ἴσας ἔχει τὰς πλευρὰς ΑΖ, ΑΕ (σχολ. γ΄.), ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΓ δίχα τέμνουσα τὴν ΕΖ βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, κάθετός ἐστιν ἐπὶ ταύτην. Ἐπειδὰν δὲ ἑτέρα διάμετρος ἡ ΠΛ φέρε, τέμνῃ τὸν αὐτὸν κύκλον κατὰ τὸ Σ, καταχθεῖσα ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ Σ ἡ ΑΣ, ἔσεται δὴ καὶ αὕτη κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΛ διάμετρον. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΞΣ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΓ τετράγωνον ἔσεται ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΓΣ ὁμοῦ ληφθεῖσιν (47 τοῦ Α΄.). Δι' ὃ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ὅπερ διὰ τὴν αὐτὴν ἐξισοῦται τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΞΓ, ἔσεται ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΞΣ, ΣΓ ὁμοῦ ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΞΣ ἐξισοῦται τῷ ἀπὸ τῆς ΑΣ (ὅρ. 3 τοῦ ΙΑ΄.)· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΣ, ΣΓ ὁμοῦ ληφθεῖσιν, διὰ δὴ τοῦτο ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΣΓ (48 τοῦ Α΄.). Ἐπεὶ δὲ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου ΣΓΞ περιφέρειαν καταγομένων εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΑΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΞ, τῶν δὲ λοιπῶν ΑΣ κτ. ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς μεγίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων (ὡς εἴρηται ἐν τῷ ε΄. σχολίῳ περὶ τῶν τοῦ Κώνου πλευρῶν)· καὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος ἄρα τριγώνων, ὡς ἴσας ἐχόντων τὰς βάσεις ΕΖ, ΒΔ, ΠΛ, μέγιστον μέν ἐστιν, οὗ ὕψος ἡ μεγίστη ΑΓ οἷον τὸ ΕΑΖ, ἐλάχιστον δὲ, οὗ ὕψος ἡ ἐλαχίστη ΑΞ, οἷον τὸ ΒΑΔ, ὅπερ διὰ τῆς καθέτου διήκει. Τοῦ δὲ ΠΑΛ (οὗ ὕψος ἡ ΑΣ) τὸ μέγεθος· ἔσται μεῖζον ἢ ἔλασσον κατὰ τὴν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ μεγίστου μείζω ἢ ἐλάσσω ἀπόστασιν.

ϛ΄. Ἐν μὲν τῷ ὀρθῷ Κώνῳ, οὗπερ ὁ ἄξων ἴσος τῇ ἀκτῖνι τῆς βάσεως, ἢ ϗ μείζων ταύτης, ἤτοι ἐν ᾧ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία τῦ διὰ τῦ ἄξονος τριγώνυ εἴη ἂν ὀρθὴ ἢ ὀξεῖα, τὰ μὴ διὰ τῦ ἄξονος τρίγωνα δέδεικται (σχολ. β′.) ἐλάσσω ἀεὶ οἱυδήποτε τῶν διὰ τῦ ἄξονος. Ἐν δὲ τῷ σκαληνῷ, ἐάντε ἀμβλεῖα ᾖ τῦ διὰ τῦ ἄξονος τριγώνυ ΒΑΔ, ἢ ΕΑΖ, ἢ ΠΑΛ ἡ γωνία, ἐάντε ὀρθὴ, ἐάντε ὀξεῖα, τῶν μὴ διὰ τῦ ἄξονος τριγώνων, ἃ μὲν ἔσεται ἐλάσσω οἱυδήποτε τῶν διὰ τῦ ἄξονος, ἃ δὲ ϗ τῦ μεγίςυ ἐκείνων ΕΑΖ μείζω, ἃ δὲ ἐκείνῳ ἴσα. Σχημ. 8.

Ἀχθεῖσα γὰρ τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΘΟ, τεταγμένη ἔσεται ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κατὰ τὸ Η. ἐπὶ δὲ ταύτην ἀχθέντος ἐπιπέδυ τινος διὰ τῆς κορυφῆς Α, τρίγωνον ἀποσχηματισθήσεται τὸ ΘΑΟ, ὅπερ ἔσεται ἰσοσκελὲς κατὰ τὰ ἐν τῷ γ′. σχολίῳ ῥηθέντα· ϗ ἡ ΑΗ ἔσεται ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτῦ κάθετος. Ὁ γῦν λόγος, ὃν ἔξει αὕτη ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΑΓ ἔσεται ἤτοι ἴσος ἢ μείζων τῦ, ὃν ἔχει ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΘΟ, ἢ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΗ (13). τὸ τρίγωνον

13.) *Ποιείσθω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΕΓ. ὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τετάρτην ἀνάλογον ζητκμένην τὴν ΑΗ. εἶτα αἱ τῶν ὑποσ. μὲν ΑΓ, ΑΗ κατὰ τὰ Γ, Η περατέμεναι, ὕτως ἀλλήλαις προσκεκλίσθωσαν, ὥςε συμπεσεῖν κατὰ τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ δὲ τῦ σημείυ τῆς συμπτώσεως Α ὡς ἀπὸ κορυφῆς γεγράφθω Κῶνος ὁ ΑΔΕΒΖ· λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΑΖ ἴσον ἔςαι τῷ τριγώνῳ ΘΑΟ. Ἐπεὶ γάρ ἐςιν ΑΓ : ΑΗ = ΘΗ : ΕΓ (ἐκ κατασκευῆς)· ἔσεται δὴ ΑΓ × ΓΕ = ΑΗ × ΗΘ (10. τῦ ϛ′.). Ἔςι δὲ τὸ μὲν τρίγωνον* Σχημ. 5.

ἄρα ΘΑΟ ἔσεται ἤτοι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ΕΑΖ, ὅπερ ἐςὶ μέγιςον ἁπάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος ΑΓ.

Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν Τριγωνικῶν Τομῶν ἱκανῶς ἂν ἔχοι τὰ εἰρημένα· ἐν τοῖς ἑξῆς δὲ πραγματευτέον περὶ τῶν Κωνικῶν.

$EAZ =$ τῷ $AΓ \times ΓE$· τὸ δὲ $ΘAO =$ τῷ $AH \times HΘ$ εἴγε αἱ βάσεις τῶν τριγώνων EZ, $ΘO$ διπλάσιαι εἰσὶ τῶν $EΓ$, $HΘ$ βάσεων τῶν παραλληλογράμμων. Τὸ τρίγωνον ἄρα EAZ ἴσον ἐςὶ τῷ τριγώνῳ $ΘAO$.

Εἶτα δὲ ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ $Γ$, διαςήματι δὲ τῷ $AΓ$ γραφῇ τόξον τὸ $αAM$, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν $αH$, $αΓ$, συςαθῇ Κῶνος ὁ $αΔEBZ$, οὗ τῇ βάσει κάθετος ἡ $αξ$, λέγω ὅτι τηνικαῦτα τὸ τρίγωνον $ΘαO$ μεῖζον ἔσεται τοῦ τριγώνου $EαZ$. Ἔσεται γὰρ $αH^2 = αΓ^2 + ΓH^2 + 2HΓ \times Γξ$ (11. τοῦ Β') καὶ $AH^2 = AΓ^2 + ΓH^2 + 2HΓ \times ΓΞ$. Ἐπεὶ δὲ $αΓ^2 + ΓH^2 = AΓ^2 + ΓH^2$, καὶ $2HΓ \times Γξ > 2HΓ \times ΓΞ$· ἔςαι δὴ καὶ $αH^2 > AH^2$, καὶ ἡ $αH$ μείζων τῆς AH. Τοιγαροῦν ἡ $αH$ πρὸς τὴν $αΓ$ μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ AH πρὸς τὴν $AΓ$. Καὶ ἐπεί ἐςιν $AH : AΓ = EΓ : ΘH$ (ἐκ κατασκευῆς), ἡ $αH$ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν $αΓ$, ἤπερ ἡ $EΓ$ πρὸς τὴν $ΘH$. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $αH$, $HΘ$ μεῖζόν ἐςι τοῦ $αΓ \times ΓE$· καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα $ΘαO$ μεῖζόν ἐςι τοῦ τριγώνου $EαZ$.

Ἐὰν δὲ ἡ τοῦ Κώνου κορυφὴ ᾖ πρὸς τῷ M, ἡ MH ἐλάσσων ἔςαι τῆς AH. Δι' ὃ δὴ ἡ MH ἐλάσσονα λόγον ἕξει πρὸς $MΓ$, ἤπερ ἡ AH πρὸς τὴν $AΓ$, καὶ ἡ $EΓ$, πρὸς τὴν $ΘH$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ὑπὸ $MHΘ$ ἔλασσον ἔςαι τοῦ ὑπὸ $MΓE$· καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα $ΘMO$ ἔλασσόν ἐςι τοῦ EMZ. Δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.