ΠΟ´ΡΙΣΜΑ.

Ε'πεὶ δέδεικται ἡ ΔΝ ἴση τῇ ΔΜ, ῥᾶςος ἄρα ἐντεῦθεν ἀναφαίνεται τρόπος τῆ Υ'περβολὴν ἰσοσκελῆ καταγράψαι. Συςάσης γὰρ πρὸς τῷ Γ ὡς ἔτυχε ληφθέντι ὀρθῆς γωνίας τῆς ΝΓΔ, ἀπειράριθμοι εὐθεῖαι ΝΔ, ΝΖ κτλ. ἐπὶ τὴν ΓΔ κλιθήσονται, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Δ, Ζ κτλ. ἐὰν ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΓΝ ϗ ἴσαι ταῖς εἰρημέναις κεκλιμέναις ΝΔ, ΝΖ κτλ. αἱ ΔΜ, ΖΕ κτλ. τὰ σημεῖα Μ, Ε, Ν ἐπὶ τῆς Υ'περβολικῆς ἰσοκελῦς καμπύλης ἔσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΗ´.

Σχημ. 117. 118. Ε'ὰν ἄξονι μὲν πλαγίῳ τῷ αὐτῷ τῇ ἰσοσκελεῖ ὑπερβολῇ ΝΕΜ, τῦτ' ἔςι τῷ ΝΞ, ὀρθίᾳ δὲ πλευρᾷ ἑτέρᾳ τῇ ΝΘ καταγραφῇ Ὑπερβολὴ ἑτέρα ἡ ΝΑΒΚ, ϗ ληφθῇ ἡ ΝΤ μέση ἀνάλογον τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΘ ϗ τῆς πλαγίας ΝΞ, ἢ τῆς ὀρθίας ΝΡ τῆς ἰσοσκελῦς ὑπερβολῆς ΝΕΜ, ἔςαι τὸ χωρίον ΝΒΚ πρὸς τὸ ΝΜΚ, ὡς ἡ ΝΘ πρὸς τὴν ΝΤ.

Τετάχθω εὐθεῖα τις ἑτέρα ἡ ΑΗ τέμνουσα τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν κατὰ τὸ Ε, ϗ ἔσεται δὴ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τετράγωνον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΞΚΝ, τῦτ᾿ ἔςι τὸ ἀπὸ τῆς ἐν τῇ ἰσοσκελεῖ ὑπερβολῇ τεταγμένης ΚΜ τετράγωνον, ὅπερ ἀξιςῦται τῷ ὀρθογωνίῳ ἐκείνῳ, ὕτως ἡ ΝΘ πρὸς τὴν ΝΞ ἢ τὴν ΝΡ (Πορ. τῆς Ε΄.). Ἀλλ᾿ ὡς ἡ ΝΘ πρὸς τὴν ΝΡ, ὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ, ἥτις ὑπετέθη μέση ἀνάλογος τῶν ΝΘ, ΝΡ. Ἄρα (ἐπεὶ $BK^2 : KM^2 = N\Theta^2 : NT^2$.) ϗ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΜ, ὕτως ἡ ΝΘ πρὸς ΝΤ. Καὶ τῷ αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται ὅτι ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ, ὕτως ἡ ΝΘ πρὸς ΝΤ. Ὡς ἄρα (12 τῦ Ε΄.) πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι τῦ Ὑπερβολικῦ χωρίυ ΝΒΚ, πρὸς ἁπάσας τὰς εὐθείας τῦ ἑτέρυ ΝΜΚ, τῦτ᾿ ἔςι τὸ χωρίον τῆς καταγραφείσης Ὑπερβολῆς ΝΒ πρὸς τὸ τῆς ἰσοσκελῦς ΝΜ, ὕτως ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΘ τῆς πρώτης πρὸς τὴν ΝΤ μέσην ἀνάλογον αὐτῆς τῆς ΝΘ, ϗ τῆς πλαγίας, ΝΞ ἢ τῆς ΝΡ ὀρθίας πλευρᾶς τῆς ἑτέρας Ὑπερβολῆς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΘ΄.

Τὸ παραβολικὸν χωρίον ΓΒΑΚ, ἴσον ἐςὶ δυσὶ τριτημορίοις τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου — ΙΗΓΚ. Σχημ. 119.

Τετάχθω ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΕ ἡ ΒΔ, καὶ

διὰ τῦ Β ἀχθείσης παρὰ τὴν διάμετρον τῆς εὐθείας ΖΒΛ, ἐπιζεύχθω ἡ ΑΓ τέμνυσα τὴν μὲν ΒΔ κατὰ τὸ Θ, τὴν δὲ ΛΖ κατὰ το Μ. Καὶ ἐκ τῆς περὶ τὴν ΑΗ περιαγωγῆς τῦ παραλληλογράμμυ ΛΗΓΕ ϗ τῦ τριγώνυ ΑΓΗ ἐπινενοήσθω ἀπογεννᾶσθαι Κύλινδρος τριπλάσιος Κώνυ (10 τῦ ΙΒ΄.). Καὶ ἐπεὶ ἐςιν ὡς ὁ κύκλος, ὗ ἀκτὶς ἡ ΛΖ ἢ ἡ ΜΓ, πρὸς τὸν κύκλον ὗ ἀκτὶς ἡ ΜΛ, ὕτως τὸ ἀπ᾽ ἐκείνης τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ταύτης (12 τῦ ΙΒ΄.), ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ, ἢ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τῦτ᾽ ἔςιν ἡ αὐθεῖα ΕΑ πρὸς τὴν ΑΔ (Προτ. Δ΄.) ἢ ἡ ΖΛ πρὸς τὴν ΛΒ. Ὡς ἄρα πάντες οἱ ἴσοι κύκλοι τῦ Κιλύνδρυ ἐκείνυ πρὸς ἅπαντας τὺς κύκλυς τῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένυ, ὕτω πᾶσαι αἱ ἴσαι εὐθεῖαι τῦ παραλληλογράμμυ πρὸς ἁπάσας τὰς εὐθείας τῦ παραβολικῦ τριγράμμυ ΑΒΓ (τῦτ᾽ ἔςιν ὡς ὁ Κύλινδρος ὁ ἐκ τῦ παραλληλογράμμυ ΑΓ πρὸς τὸν ἐκ τῦ τριγώνυ ΑΓΗ Κῶνον, ὕτω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ πρὸς τὸ τρίγραμμον ΑΒΓΗ)· ὥσπερ ἄρα ὁ Κύλινδρος ἐςὶ τριπλάσιος τῦ Κώνυ, ὕτω ϗ τὸ παραλληλόγραμμον τριπλάσιόν ἐςι τῦ τριπλεύρυ ΑΒΓΗ. Τὸ λοιπὸν ἄρα παραβολικὸν χωρίον ΑΒΓΕ ἴσον ἐςὶ δυσὶ τριτημορίοις τῦ εἰρημένου παραλληλογράμμυ ΑΕΓΗ, ϗ ἑκατέρων τῶν χωρίων διπλασιασθέντων, ὅλον τὸ παραβολικὸν χωρίον ΓΑΚ ἴσον ἐςι δυσὶ τριτημορίοις ὅλυ τῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένε παραλληλογράμμε ΙΝΓΚ, ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Α΄.

Δῆλον ἄρα ὅτι ἡ Παραβολή ἐςιν ἐπίτριτος τῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένε τριγώνε, ἤτοι ὡς 4 πρὸς 3. Ἐπεὶ γὰρ ἡ παραβολὴ ἐςὶ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ὡς 2 πρὸς 3. καὶ τὸ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ τρίγωνον ὡς 2 πρὸς 1. ἔσεται ἄρα ἡ παραβολὴ πρὸς τὸ τρίγωνον ἐν λόγῳ συγκειμένῳ ἔκτε τῦ 2 πρὸς 3, ϗ τῦ 2 πρὸς 1. ὅθεν ὡς 4 πρὸς 3 (141).

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Β΄.

Ἡ δὲ παραβολὴ ΑΒΓΕ πρὸς τὸ μέρος ΑΒΔ τὸ τετμημένον ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΒΔ ἐςὶν ὡς ὁ Κύβος τῆς ΕΓ πρὸς Κύβον τῆς ΒΕ. Ἐπεὶ γὰρ ϗ τὸ ΑΒΔ ἐξισῦται δυσὶ τριτημορίοις τῦ παραλληλογράμμε ΑΔΒΛ, ἔςι δὴ ΑΒΓΕ πρὸς ΛΒΔ, ὡς ΑΕΓΗ πρὸς ΑΔΒΛ, ἤτοι ἐν λόγῳ συγκειμένῳ ἔκ τε τῦ λόγε τῶν βάσεων ΕΓ, ΔΒ ϗ τῦ τῶν ὑψῶν

---

141) ΑΒΓΕ : ΑΕΓΗ = 2 : 3 (ἐκ τῆς παρέσης Προτάσεως). Ἀλλὰ ϗ ΑΕΓΗ : ΑΕΓ = 2 : 1 (34 τῦ Α΄. τῦ Εὐκλείδε)· ἄρα Α≤ΓΕ × ΑΕΓΗ : ΑΕΓΗ × ΑΕΓ = 2 × 2 : 3 × 1 (σημ. 22)· ἢ διαιρέσει τῶν ὅρων ἑκατέρων τῦ πρώτε λόγε διὰ τῦ αὐτῦ ΑΕΓΗ, ἔσεται ΑΒΓΗ : ΑΕΓ = 2 × 2 : 3 × 1 = 4 : 3.

ΕΑ, ΔΑ. Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς ΕΑ πρὸς ΔΑ ἐςὶ διπλασίων τοῦ λόγου τῆς ΕΓ πρὸς ΔΒ (ἐςὶ γὰρ ΕΑ: ΔΑ=ΕΓ²:ΔΒ² αἱ τεταγμέναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τετμημένων τετράγωνα)· ἄρα τὰ χωρία ταῦτα ἐςὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι, ἤπερ αἱ τεταγμέναι ΕΓ, ΔΒ, ὅθεν ὡς οἱ αὐτῶν Κύβοι (*).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ν'.

Σχημ. 120. Κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΠ ἴσος ἐςὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ τῷ ΓΑΒ, οὗ ὕψος μὲν ἡ ἀκτὶς ΑΓ, βάσις δὲ ἡ ΑΒ ἴση τῇ περιφερείᾳ ΠΑ.

Καταγραφείσης γὰρ δι' οὑτινοσοῦν σημείου ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ληφθέντος Δ, τῆς ὁμοκέντρου περιφερείας ΔΖ· καὶ ἀχθείσης ἐν τῷ τριγώνῳ τῆς εὐθείας ΔΕ παραλλήλου τῇ βάσει, ἐςὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ περιφέρεια ΠΑ πρὸς τὴν περιφέρειαν ΔΖ (Θεωρημ. Ἀρχιμ.) Ἐπειδὴ καὶ αὗται καὶ ἐκεῖναι εἰσὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ. Ὅθεν ὥσπερ ἡ

---

*) Ἐπεὶ ΑΒΓΕ = ⅔ ΑΕΓΗ, καὶ ΑΒΔ = ⅔ ΑΔΒΑ, ἄρα ΑΒΓΕ : ΑΒΔ = ΑΕΓΗ : ΑΔΒΑ· ἀλλὰ ΑΕΓΗ : ΑΔΒΑ = $\frac{\text{ΕΓ : ΔΒ},}{\text{ΕΑ : ΔΑ},}$ καὶ ΕΑ : ΔΑ = ΕΓ² : ΔΒ². Ἀντικαταςάντος ἄρα ἀντὶ τοῦ λόγου ΕΑ : ΔΑ τοῦ αὐτῷ ἴσου ΕΓ² : ΔΒ², ἔςαι ΑΕΓΗ : ΑΔΒΑ = $\frac{\text{ΕΓ : ΔΒ}}{\text{ΕΓ}^2 : \text{ΔΒ}^2}$ = $\overline{\text{ΕΓ}}^3 : \overline{\text{ΔΒ}}^3$

ΑΒ ἐξισοῦται τῇ περιφερείᾳ ΑΠ, οὕτω καὶ ἡ ΔΕ ἐξισοῦται τῇ περιφερείᾳ ΔΖ. Τοῦτο δὲ συμβαίνει ἀεί. Πᾶσαι ἄρα αἱ εὐθεῖαι τοῦ τριγώνου ΓΑΒ, ἐξισωθήσονται ἁπάσαις ταῖς ὁμοκέντροις περιφερείαις τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος ἄρα ἴσος τῷ τριγώνῳ, ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΌΡΙΣΜΑ.

Ὁ κύκλος ἄρα ἐςὶν ἴσος ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ τῆς περιφερείας ὅλης καὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος, τοῦτ' ἔςι τοῦ τετάρτου τῆς διαμέτρου περιεχομένῳ. Ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸν τοῦ Ἀρχιμήδου λογισμὸν ἡ περιφέρειά ἐςι πρὸς τὴν διάμετρον σχεδὸν ὡς 22 πρὸς 7. ἔσεται ἄρα ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, ὡς $38\frac{1}{2}$ πρὸς 49, ἢ ὡς 77 πρὸς 98, τοῦτ' ἔςιν ὡς 11 πρὸς 14. (142).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΝΑ΄.

Ἡ Ἔλλειψις ΝΕΞ πρὸς κύκλον τὸν ΝΒΞ ἐπὶ τοῦ μείζονος ἄξονος ΝΞ τῆς Ἐλ- Σχημ. 12.

---

142) Οὔσης τῆς διαμέτρου $= 7$· ἔσεται ἡ περιφέρεια ὡς ἔγγιςα $= 22$. Ὅθεν ἐπεὶ ὁ κύκλος ἐςὶν ἴσος ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς περιφερείας καὶ τοῦ τετάρτου τῆς διαμέτρου περιεχομένῳ, ἔσεται ἄρα ἴσος $22 \times \frac{7}{4} = \frac{154}{4} = \frac{77}{2} = 38\frac{1}{2}$. Ἔτι ἐπεὶ τὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον ἐςὶν ἴσον $49 =$

λείψεως γραφέντα, ἐστὶν ὡς ὁ ἐλάσσων ἄξων πρὸς τὸν μείζονα.

Τεταγμένης διὰ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς εὐθείας ΕΓ, ἥτις ἔσται καὶ ἐλάσσων ἄξων τῆς Ἐλλείψεως, καὶ προεκβληθείσης ἕως τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ Β, καὶ δὴ καὶ ἑτέρας οἱασοῦν τῆς ΚΜ ἕως τοῦ κύκλου καὶ αὐτῆς προεκβληθείσης ἐπὶ τὸ Δ, ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΞΚΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΓΝ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ ΔΚ (ἴσον τῷ ὑπὸ ΞΚΝ) πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ (ἴσον τῷ ὑπὸ ΞΓΝ) ὃ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ. Καὶ ἐπομένως ὡς ἡ ΜΚ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς ΒΓ. Πᾶσαι ἄρα αἱ τῆς Ἐλλείψεως εὐθεῖαι πρὸς πάσας τὰς τοῦ κύκλου εἰσὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΓΒ, καὶ ὅλον τὸ χωρίον τῆς Ἐλλείψεως πρὸς ὅλον τὸ τοῦ κύκλου ἐστὶν ὡς ὁ ἐλάσσων ἡμιάξων ΓΕ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΓΒ τοῦτ' ἔστι τὸν μείζω ἡμιάξονα ΓΞ· τοιγαροῦν καὶ ὡς ὁ ἐλάσσων ἄξων πρὸς τὸν μείζονα, ο. ε. δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἀχθεισῶν δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῶν εὐθειῶν ΓΜ, ΓΔ ἔσται ὁ Ἐλλειπτικὸς τομεὺς ΓΜΞ πρὸς

$\frac{98}{2}$. ὁ κύκλος ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον ἐστιν ὡς $\frac{77}{2} : \frac{98}{2} = 77 : 98 = 11 : 14$ (διαιρέσει ἑκατέρου τοῦ ὅρου διὰ 7.)

τὸν κυκλικὸν ΓΔΞ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τȣ̃ ἐλάσσονος ἄξονος πρὸς τὸν μείζονα. Τὸ γάρ τοι τμῆμα ΜΚΞ πρὸς τὸ τμῆμα ΔΚΞ, τό,τε τρίγωνον ΓΜΚ πρὸς τὸ αὐτῷ ἰσοϋψὲς ΓΔΚ ἐςὶν ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΔΚ. Τοιγαρȣ̃ν ϗ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΓΒ ἢ τὴν ΓΞ (=ΓΒ). Ἔςι γὰρ ἐκ τῆς Προτάσεως ΜΚ : ΔΚ = ΓΕ : ΓΒ. Ὁ τομεὺς ἄρα ΓΜΞ πρὸς τὸν ΓΔΞ ἐςὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΓΞ (ια τȣ̃ Ε′.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΝΒ′.

Ἐὰν οἱαδήτις Κωνικὴ Τομὴ ΑΕΒ, ἧς αἱ Σχημ. 122.
μὲν ἀπὸ τῶν περάτων τῆς βάσεως ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι ΑΕ, ΒΗ συμπίπτοιεν τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ ΕΗ κατὰ τὰ Ζ, Η· ἐπὶ δὲ τὸ μεσαίτατον σημεῖον τῆς βάσεως Δ εἶεν ἐπεζευγμέναι εὐθεῖαι αἱ ΖΔ, ΗΔ, περὶ τὸν ἴδιον αὐτῆς ἄξονα ΕΔ περιαχθῇ· ἔσεται ἡ Κωνοῒς, τȣ̃τ' ἔςι τὸ ςερεὸν τὸ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τȣ̃ ΔΕΝΒ ἀπογεννώμενον, ἴση τῷ ςερεῷ τῷ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα περιαγωγῆς τȣ̃ τριγώνȣ ΔΗΒ ἀπογεννωμένῳ. Τό,τε ςερεὸν τὸ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα περιαγωγῆς τȣ̃ τριπλεύρȣ

ΕΝΒΗ ἀπογεννώμενον, ἴσον τῷ ἐκ τῆς Περιαγωγῆς τȣ̃ τριγώνȣ ΕΔΗ ἀπογεννωμένῳ ςερεῷ.

Α᾿χθείσης γὰρ οἱασȣ̃ν εὐθείας τῆς ΛΚ παραλλήλȣ τῇ τε κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ ΕΗ ϗ τῇ βάσει ΑΔ, ἥτις δὴ τεμεῖ τὸν μὲν ἄξονα κατὰ τὸ Ι, τὰς δὲ ἐφαπτομένας κατὰ τὰ Λ, Κ· τήν τε καμπύλην κατὰ τὰ Μ, Ν ϗ τὰς εὐθείας ΖΔ, ΗΔ κατὰ τὰ Ο, Π. Ε῎ςαι ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ, ὕτω τὸ ἀπὸ ΕΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ (Προτ. Ιϛ΄.) ϗ ἐναλλάσσοντι ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, ὕτω τὸ ἀπὸ ΚΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, τȣ̃τ᾿ ἔςι τὸ ἀπὸ ΔΙ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ ἢ τὸ ἀπὸ ΙΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ (ἔςιν ἄρα $MKN : EH^2 = I\Pi^2 : EH^2$). Τὸ ἄρα ἀπὸ ΙΠ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ ΜΚΝ, τȣ̃τ᾿ ἔςι τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΙΚ, ΙΝ (6 τȣ̃ Β΄.). Τοιγαρȣ̃ν ϗ ὁ κύκλος, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΙΠ, ἴσος ἐςὶ τῇ διαφορᾷ τῶν κύκλων, ὧν ἀκτῖνες αἱ ΙΚ, ΙΝ (143) τȣ̃τ᾿ ἐςὶ τῷ κυκλικῷ δακτυλίῳ τῷ ἐν τῇ περὶ τὸν

---

143) *Κύκλος ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΙΚ πρὸς Κύκλον, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΝΙ ἐςιν ὡς $IK^2 : IK^2$ (2. τȣ̃ ΙΒ΄.). Ε῎υθεντοι κύκλος ὁ πρῶτος πλὴν τȣ̃ δευτέρȣ πρὸς τὸν δεύτερον ἐςιν ὡς $IK^2 - IN^2 : IN^2$· ἤτοι ὁ δακτύλιος ὁ ὑπὸ τῆς ΚΝ πρὸς κύκλον, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΙΝ, ὡς $I\Pi^2 : IN^2$, ὡς κύκλος, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΙΠ πρὸς κύκλον, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΙΝ. Ο῾ κύκλος ἄρα, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΙΠ ἐςιν ἴσος δακτυλίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΚΝ γεγραμμένῳ.*

ἄξονα ΕΔ περιαγωγῇ τȣ̃ τριπλεύρȣ ΕΝΒΗ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΝΚ γραφομένῳ. Καὶ ἐπεὶ τȣ̃το ἀεὶ ξυμβαίνει, ὁ Κῶνος ἄρα ὁ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τȣ̃ τριγώνȣ ΕΔΗ περὶ τὸν ἄξονα ΕΔ περιαχθέντος ἀπογεννώμενος, ὅπερ αἱ τομαὶ εἰσὶν ἀεὶ κύκλοι, ὧν ἀκτῖνες αἱ ΙΠ, ἴσος ἐςὶ τῷ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα περιαγωγῆς τοῦ τριπλεύρου ΕΝΒΗ ἀπογεννωμένῳ ςερεῷ, ὅπερ αἱ τομαὶ εἰσὶν ἀεὶ δακτύλιοι οἱ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΝΚ καταγραφόμενοι, ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Ἀλλὰ τὸ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τȣ̃ τριπλεύρȣ ΕΝΒΗ ἀπογεννώμενον ςερεὸν, μετὰ τῆς ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ΕΔ περιαγωγῆς τῆς κωνικῆς τομῆς ΕΝΒΔ Κωνοΐδος, ἐςὶν ἴσον τοῖς ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ΕΔ περιαγωγῆς τῶν τριγώνων ΕΔΗ, ΔΗΒ ἀπογεννομένοις ςερεοῖς ἅμα ληφθεῖσιν. Ὥσπερ ἄρα τὸ ἐκ τȣ̃ τριπλεύρȣ ΕΝΒΗ ἀπογεννώμενον ςερεὸν, ἐςὶν ἴσον τῷ ἐκ τȣ̃ τριγώνου ΕΔΗ ἀπογεννωμένῳ Κώνῳ, ὅτω ϗ̀ τὸ λοιπὸν ςερεὸν τὸ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τȣ̃ ΕΝΒΔ ἀπογεννόμενον ἴσον ἐςὶ λοιπῷ τῷ ἐκ τῆς περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα περιαγωγῆς τȣ̃ ΔΗΒ τριγώνȣ ἀπογεννωμένῳ ςερεῷ· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον (144).

---

144) Τὸ αὐτὸ δήπȣ ξυμβαίνει κἂν τῷ σφαιρικῷ τμήματι $AMEB$ (σχημ. 13. τῶν Σημειώσεων) ἐπεὶ γάρ ἐςι τὸ $BK^2 =$ τῷ $M \cap N$ (36. τȣ̃ Γ.) ϗ̀ $HE^2 = Hb^2$ (Πορ. 2. τῆς αὐτῆς) ἔςιν ἄρα $MKN : EH^2 = bK^2 : HB^2 = \Delta I\Pi^2$

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Α΄.

Προαχθεισῶν τῶν κατὰ πλευρὰν ἐφαπτομένων ΑΖ, ΒΗ ἕως ὅτου τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Θ συμπέσωσι· τῆςτε βάσεως τμηθείσης κατὰ τὸ Σ, ὡς εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΣ τετράγωνον ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΖΕ τετραγώνων, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΘΣ, ἔσεται ἡ ἐκ τῆς περὶ τὸν ΕΔ ἄξονα περιαγωγῆς τοῦ ΕΝΒΔ ἀπογεννωμένη Κωνοῒς, ἴση τῷ ἐκ τῆς περὶ τὸν ΔΘ ἄξονα περιαγωγῆς τοῦ τριγώνου ΣΘΔ ἀπογεννωμένῳ Κώνῳ. Ὁ γὰρ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ ΑΔΘ τριγώνου ἀπογεννώμενος Κῶνος τριτημόριόν ἐστι τοῦ Κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν κύκλος, οὗ ἀκτὶς ἡ ΑΔ· ὕψος δὲ ἡ ΔΘ (345)· Ὁ δὲ ἐκ τοῦ ΖΕΘ τριγώνου ἀπογεννώμενος Κῶνος ἅμα τῷ ἐκ τοῦ τριγώνου ΖΕΔ ἀπογεννωμένῳ, τριτημόριόν ἐστι Κυλίνδρου, βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον,

---

: $ΔΗ^2 = ΙΠ^2 : ΕΗ^2$· ὡς ἄρα $ΜΚΝ : ΕΗ^2 = ΙΠ^2 : ΗΕ^2$ καὶ $ΜΚΝ = ΙΠ^2$· Κατὰ δὴ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα δειχθήσεται κἀν τῷ σφαιρικῷ τμήματι ὅπερ δέδεικται ἐν τῇ Κωνοΐδι παραληφθείσης, καὶ ὧδε τῆς αὐτῆς δείξεως.

345) Τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ κύκλου, οὗ ἀκτὶς ἡ ΔΑ, καὶ τῆς ΔΘ, κυλίνδρῳ ἐξισοῦται, οὗ βάσις μὲν ὁ ἀκτῖνι τῇ ΑΔ γραφεὶς κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΔΘ (πορ. τῆς 15. τοῦ ΙΒ΄.) τοῦ δὲ κυλίνδρου τούτου τριτημόριόν ἐστιν ὁ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ τριγώνου ΑΔΘ ἀπογεννώμενος Κῶνος (10. τοῦ ΙΒ΄.). Ὁ ἄρα Κῶνος οὗτος τριτημόριόν ἐστι τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ ἀκτῖνι τῇ ΔΑ γραφέντος κύκλου καὶ τῆς ΔΘ εὐθείας· τοῦτ᾿ ἔστι τοῦ εἰρημένου κυλίνδρου.

οὗ ἀκτὶς ἡ ΕΖ, ὕψος δὲ συναμφοτέρας τὰς ΘΕ, ΕΔ, τοῦτ' ἔςι τὴν ΔΘ (ἣ ἀχθείσης παρὰ τὴν ΔΕ τῆς εὐθείας ΖΞ, τριτημόριόν ἐςι, κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν ὁ ἀκτῖνι τῇ ΔΞ γραφεὶς κύκλος, ὕψος δὲ ΔΘ). Ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τοῦ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΘ ἀπογεννωμένου Κώνου, ᾗ ὑπερέχει τῶν ἔκ τε τοῦ ΖΕΘ καὶ τοῦ ΖΕΔ ἀπογεννωμένων Κώνων, ὅ ἐςι τὸ ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονα ΔΕ περιαγωγῆς τοῦ τριγώνου ΑΖΔ, ἢ ΔΗΒ ἀπογεννώμενον ςερεὸν, τοῦτ' ἔςιν ἡ Κωνοῒς ἡ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ ΕΝΒΔ ἀπογεννωμένη, ἴση ἐςὶ τριτημορίου Κυλίνδρου, βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν ὑπεροχὴν τοῦ κύκλου, οὗ ἀκτὶς ἡ ΔΑ, ᾗ ὑπερέχει τοῦ κύκλου, οὗ ἀκτὶς ἡ ΕΖ, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ (146). Τοιγαροῦν ὥσπερ τὸ ἀ-

---

146) Ὁ ἐκ τοῦ τοῦ *ΑΔΘ* Κῶνος ἴσος ἐςὶ τριτημορίῳ κυλίνδρου, οὗ ὕψος μὲν ἡ *ΔΘ*, βάσις δὲ ὁ ἀκτῖνι τῇ *ΑΔ* γραφεὶς κύκλος. Οἱ δὲ ἐκ τῶν τριγώνων *ΘΖΕ*, *ΔΖΕ* Κῶνοι ἅμα ληφθέντες ἴσοι εἰσὶ τριτημορίῳ κυλίνδρου, βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον, οὗ ἀκτὶς ἡ *ΕΖ* ἢ *ΔΞ*, ὕψος δὲ τὴν *ΔΘ*. Τοιγαροῦν ὁ ἐκ τοῦ *ΑΔΘ* Κῶνος, πλὴν τῶν ἐκ τῶν *ΘΖΕ*, *ΔΖΕ* Κώνων, τοῦτ' ἔςιν ἡ ἐκ τοῦ *ΝΕΔΒ* Κωνοῒς ἴση ἐςὶ τριτημορίῳ κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν ὁ ἀκτῖνι τῇ *ΔΑ* γραφόμενος κύκλος, ὕψος δὲ ἡ *ΔΘ*, πλὴν τοῦ τριτημορίου κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν τὸν ἀκτῖνι τῇ *ΔΞ* γραφόμενον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ *ΔΘ* ἔχοντος, ἢ τριτημορίῳ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ἐκ τοῦ *ΘΔΑ* κύλινδρος τοῦ ἐκ τοῦ *ΘΔΞ* κυλίνδρου. Ἀλλ' ὁ ἐκ τοῦ *ΑΔΘ* κύλινδρος πλὴν τοῦ ἐκ τοῦ *ΘΔΞ* κυλίνδρου ἴσος ἐςὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν κύκλων, ὧν ἀκτῖνες αἱ *ΔΑ*, *ΔΞ* καὶ

πὸ τῆς ΔΣ τετράγωνον ἐςὶν ὑπεροχὴ τῶν ἀπὸ ΔΑ, ΕΖ· οὕτω ϗ ὁ κύκλος, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΔΣ ἐςὶν ὑπεροχὴ τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΔΑ, ᾗ ὑπερέχει τȣ̃ ἀκτῖνι τῇ ΕΖ γραφομένȣ κύκλȣ. Ὁ ἄρα ἐκ τȣ̃ ΣΘΔ τριγώνȣ ἀπογεννώμενος Κῶνος ἴσος ἐςὶ ταύτῃ τῇ τῷ Κωνοΐδι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'

Ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη ΑΕΝΒ Παραβολὴ ᾖ, ἡ ἐξ αὐτῆς ἀναφυομένη Κωνοῒς τριπλασία ἔςαι τοῦ ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονα ΕΔ περιαγωγῆς τȣ̃ τριγώνȣ ΘΕΔ ἀπογεννωμένȣ ςερεȣ̃. Ἐπεὶ γὰρ ἡ Ὑφαπτομένη ΔΘ ἐςὶ διπλασία τῆς ΘΕ (Πορ. ς'. τῆς Θ'.) ἡ ΑΔ ἔςαι διπλασία τῆς ΕΖ. Τὸ ἀπ' ἐκείνης ἄρα τετράγωνον, τετραπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ ταύτης τετραγώνȣ. Ὁ κύκλος ἄρα, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΔΣ, τριπλάσιος τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΕΖ (147). Τοι-

---

τȣ̃ ὕψȣς ΘΔ, τȣ̃τ' ἔςι τῷ γενομένῳ ἐκ τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΔΞ, ϗ τȣ̃ αὐτȣ̃ ὕψος ΔΘ· ἡ ἄρα ἐκ τȣ̃ ΕΝΔΒ Κωνοῒς ἴση ἐςὶ τριτημορίῳ τȣ̃ αὐτȣ̃ γινομένȣ, τȣ̃τ' ἔςι τȣ̃ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τȣ̃ τριγώνȣ ΣΘΔ ἀπογεννωμένȣ Κώνȣ (3. τȣ̃ ΙΒ'.).

147) $ΔΑ^2 = 4ΕΖ^2$· ἄρα ὁ κύκλος, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΔΑ τετραπλάσιος τȣ̃ ἀκτῖνι τῇ ΕΖ. Ὅθεν ὁ ἀκτῖνι τῇ ΔΑ κύκλος, πλὴν τȣ̃ ἀκτῖνι ΕΖ, τριπλάσιος τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΕΖ. Ἀλλ' ὁ ἀκτῖνι τῇ ΔΣ κύκλος, ἐςὶ διαφορὰ τῶν ἀκτῖσι ταῖς ΔΑ, ΕΖ κύκλων, ὁ ἀκτῖνι ἄρα τῇ ΔΣ τριπλάσιός ἐςι τȣ̃ ἀκτῖνι τῇ ΕΖ.

γαρῦν ὁ ἐκ τῦ ΣΘΔ Κῶνος, τριπλάσιος τῦ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τῦ ΘΕΔ ςερεῦ, ὅπερ ἐςὶν ἴσον Κώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι κύκλον, ἧ ἀκτὶς ἡ ΕΖ, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ (2 τῦ ΙΒ΄.)

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ΄.

Οἱ αδῆτις Κωνοῖς ἔςαι πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐκ τῦ τριγώνυ ΔΕΒ περὶ τὸν ἄξονα ΕΔ περιςραφέντος ἐγγεγραμμένον Κῶνον, ὡς τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως ΒΔ ϗ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΕΗ πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΔ. Α'κτῖνι γὰρ τῇ ΒΔ καταγραφέντος τῦ κύκλυ ΒΥΑ, ϗ ἀχθείσης τῆς ΗΥ παραλλήλυ τῷ ἄξονι ΕΔ, ἥτις τεμεῖ τὴν μὲν βάσιν κατὰ τὸ Τ, τὸν δὲ κύκλον κατὰ τὸ Υ, τῆς τε ΤΙ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΔΥ ἐπιζευχθεῖσαν καταχθείσης, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς ΤΥ τετράγωνον ἴσον τῇ ὑπεροχῇ τῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ, ᾗ ὑπερέχεται ὑπὸ τῦ ἀπὸ τῆς ΤΔ τετραγώνυ (47 τῦ Α΄.), ἤ- Σχημ. 128.

---

148. Ληφθεισῶν οἱωνδήποτε ἀναλογιῶν $A:B=\Gamma:\Delta$, $A:E=\Gamma:Z$, $A:H=\Gamma:I$, ὧν οἱ ἡγέμενοι ἀεὶ ἴσοι, τὰ κεφάλαια τῶν ἡγεμένων ϗ τὰ τῶν ἑπομένων ἀνάλογον ἔσεται· ἐναλλάσσοντι γὰρ ἔσεται

$$A:\Gamma=B:\Delta$$
$$A:\Gamma=E:Z$$
$$A:\Gamma=H:I$$

ἄρα (12. τῦ Ε΄.) $A:\Gamma=B+E+H:\Delta+Z+I$. Ὅ ἐςι $3A:3\Gamma=B+E+H:\Delta+Z+I$. ἢ $3A:B+E+H=3\Gamma:\Delta+Z+I$.

τοι τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΔΒ, ΕΗ, Ὅθεν ἐπεὶ ἡ ἐκ τοῦ ΔΕΝΒ Κωνοῒς ἐξισοῦται τῷ Κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ ἀκτῖνι τῇ ΤΥ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΔΘ (Πορ. Α΄. τῆς παρούσης). Ἔσεται ἄρα ἡ Κωνοῒς αὕτη πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἀκτῖνι μὲν τῇ ΒΔ ὕψει δὲ τῇ ΔΕ ἐγγεγραμμένον Κῶνον, ἐν λόγῳ συγκειμένῳ (Σχολ. τῆς 15 τοῦ ς΄.), ἔκ τε τοῦ λόγου τοῦ ἀπὸ ΤΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ἢ τὸ αὐτῷ ἴσον ΔΥ, καὶ τοῦ τῆς εὐθείας ΘΔ πρὸς ΔΕ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΤΥ ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΔΥ, ΥΙ περιεχομένῳ (Πορ. 2 τῆς 8, τοῦ ς΄.), καὶ ἑπομένως $ΤΥ^2 : ΔΥ^2 = ΔΥ \times ΥΙ : ΔΥ \times ΔΥ = ΥΙ : ΔΥ$. Ἀντικαταστάσει ἄρα τοῦ λόγου $ΥΙ : ΔΥ$ ἀντὶ τοῦ $ΤΥ^2 : ΔΥ^2$, ἔσεται ἡ ἐκ τοῦ ΔΕΝΒ Κωνοῒς πρὸς τὸν ἐκ τοῦ ΔΕΒ Κῶνον ἐν λόγῳ συγκειμένῳ, ἐκ τῶν λόγων τῆς τε ΥΙ πρὸς ΔΥ, καὶ τῆς ΔΘ πρὸς ΔΕ· αἵγε εἰσὶν ὡς ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ΘΗ, ἢ ὡς ἡ ΔΒ ἢ ΔΥ πρὸς τὴν ΒΥ (ἐστι γὰρ $ΔΒ = ΔΥ$, καὶ $ΘΒ : ΒΗ = ΔΒ : ΒΥ$). Ἀλλ' ὁ λόγος ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν λόγων τῆς τε ΥΙ πρὸς ΔΥ, καὶ τῆς ΔΥ πρὸς ΒΥ, ἐστιν ὡς ἡ ΥΙ πρὸς ΒΥ (Σημ. 141)· ἄρα ἡ Κωνοῒς πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον Κῶνον ἐστιν ὡς ἡ ΥΙ πρὸς ΒΥ. Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς ΥΙ πρὸς ΒΥ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΑΥ πρὸς ΔΥ, εἴγε τῶν ὀρθογωνίων ΙΥΔ, ΑΥΒ ἑκάτερον ἐξισοῦται τῷ ἀπὸ τῆς ΤΥ τετραγώνῳ (Πορ. 2 τῆς 4 τοῦ ς΄. καὶ Πορ. τῆς 17 τοῦ αὐτοῦ). Ὁ λόγος ἄρα τῆς Κωνοΐδος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον κῶνον ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῆς ΑΥ πρὸς ΔΥ, ὅ ἐςι τῷ τῆς ΔΒ σὺν τῇ ΕΗ πρὸς ΔΒ. Ταῦτα δὲ ἔχει ἐφαρμόσασθαι ϗ τῷ σφαιρικῷ τμήματι, ὡς δῆλον ἐκ τῶν προῤῥηθέντων.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Δ'.

Ο῞θεν ἡ Κωνοῒς πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον Κῶνον ἔσεται ὡσαύτως ὡς ΔΘ σὺν ΘΕ πρὸς τὴν αὐτὴν ΔΘ (εἴγε $\Delta\Theta : \Theta E = \Delta B : EH$· καὶ $\Delta\Theta + \Theta E : \Theta\Delta = \Delta B + EH : \Delta B$)· ἢ προαχθέντος τῦ ἄξονος ἐπὶ τὸ πρὸς τὸ Ρ ὡς εἶναι ΘΡ ἴσην ΘΕ, ἔσεται ἡ Κωνοῒς πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον Κῶνον ὡς ἡ ΔΡ πρὸς ΔΘ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Ε'.

Η῾ παραβολικὴ ἄρα Κωνοῒς ἔσεται ἡμιόλιον τῦ ἐγγεγραμμένυ Κώνυ. Εἴγε ἡ ΔΡ ἐςι τριπλασία τῆς ΔΕ, ἧς διπλασία ἡ ΔΘ (Πορ. ϛ'. τῆς Θ'.). Ο῞θεν ἡ ΔΡ πρὸς τὴν ΔΘ ἐςιν ὡς 3 πρὸς 2. Καὶ ἐπειδὴ ὁ περὶ τὴν Κωνοΐδα περιγεγραμμένος Κύλινδρος ἐςι τριπλάσιος τῦ ἐγγεγραμμένου Κώνυ (10 τῦ ΙΒ'.), ἐςιν ἄρα διπλάσιος τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης παραβολικῆς Κωνοΐδος. Ε'πεὶ γὰρ ὁ Κύλινδρός ἐςι πρὸς τὸν Κῶνον ὡς 6 πρὸς 2, καὶ ὁ Κῶνος πρὸς τὴν Κωνοΐδα ὡς 2 πρὸς 3, ἔσεται ἄρα δι' ἴσυ ὁ Κύλινδρος πρὸς πρὸς τὴν Κωνοΐδα, ὡς 6 πρὸς 3, τῦτ' ἐςι διπλάσιος τῆς Κωνοΐδος.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛʹ.

Σχημ. 124. Ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη ΑΕΒ ἡμικύκλιον ᾖ, ἢ ἡμιέλλειψις, ἐπεὶ αἱ κατὰ πλευρὰν ἐφαπτόμεναι αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τοῦ ἑτέρου ἄξονος ΑΒ ἀχθεῖσαι ΑΖ, ΒΗ εἰσὶ παράλληλοι τῷ ἄξονι ΕΔ, ἔσεται ἡ ἐφαπτομένη ΕΗ ἴση τῷ ἡμιάξονι ΔΒ· ἄρα ἡ ΔΒ σὺν τῇ ΕΗ ἔσεται διπλασία τῆς ΔΒ, ὅθεν τὸ ἡμισφαίριον ἢ τὸ ἐλλειπτικὸν ἡμισφαιροειδὲς ἔσεται διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου Κώνου (Πορ. Δʹ. τῆς παρέσης). Ὁ δὲ περὶ τὸ ἡμισφαίριον ἢ περὶ τὸ ἡμισφαιροειδὲς περιγεγραμμένος Κύλινδρος ἔσεται αὐτοῦ ἡμιόλιον. Εἴγε ὁ Κύλινδρος πρὸς τὸν Κῶνον ἐςὶν ὡς 3 πρὸς 1 (10 τοῦ ΙΒʹ.) ὁ δὲ Κῶνος πρὸς τὸ ἡμισφαίριον ὡς 1 πρὸς 2. ἄρα ὁ Κύλινδρος πρὸς τὸ ςερεὸν ἡμισφαίριον ἢ ἡμισφαιροειδὲς διʼ ἴσου ἐςὶ ὡς 3 πρὸς 2. Ταὐτὸν δέ ἐςι καὶ περὶ τοῦ περὶ τὴν ὁλοχερῆ σφαῖραν ἢ σφεροειδὲς περιγεγραμμένου Κυλίνδρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΝΓʹ.

Σχημ. 125. Ἐὰν τὸ μεταξὺ τῆς Ὑπερβολῆς ΒΗ, καὶ τῆς ἀσυμπτώτου ΓΙ μεσοσυλαβοῦν χωρίον ΒΗΙΓ περὶ τὸν ἄξονα ΒΕ περιαχθῇ, τὸ ἐντεῦθεν ἀπογεννώμενον ςερεὸν ἐξισοῦται κυλίνδρῳ ἰσοϋψεῖ, βάσιν ἔχοντι κύκλον, οὗ ἀκτὶς ἡ ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὀρθογώνιον ΙΗΘ, ὅ ἐστιν ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΕΙ, ΕΗ (5 τοῦ Β΄.) ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΒΓ τετραγώνῳ (Πορ. Δ΄. τῆς ΛΖ΄.) ἢ τῷ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΕΚ· ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν κύκλων, ὧν ἀκτῖνες αἱ ΕΙ, ΕΗ, εἴτ᾽ οὖν ὁ κυκλικὸς δακτύλιος ὁ ἐκ τῆς εὐθείας ΗΙ ἐν τῷ περιάγεσθαι τὸ χωρίον ΒΗΙΓ περὶ τὸν ἄξονα ΒΕ ἀπογεννώμενος ἴσος ἐστὶ κύκλῳ, τῷ ἀκτῖνι τῇ ΕΚ (2 τοῦ ΙΒ΄.) ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΚΕ ἐν τῷ Κυλίνδρῳ καταγραφέντι, τοῦτο δὲ ξυμβαίνει ἀεί. Ἅπαντες ἄρα οἱ κυκλικοὶ δακτύλιοι τοῦ στερεοῦ ἐκείνου ἴσοι εἰσὶν ἅπασι τοῖς κύκλοις τοῦ Κυλίνδρου τούτου, καὶ δὴ τὸ στερεὸν ἐκεῖνο, ἴσον τούτῳ τῷ Κυλίνδρῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ἡ ὑπερβολικὴ ἄρα Κωνοῒς ἡ ἐκ τῆς περὶ τὸν ἄξονα ΒΕ περιαγωγῆς τῆς τομῆς ΒΗΕ ἀπογεννωμένη ἴση ἐστὶ τῷ δακτυλίῳ, τῷ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ τριγώνου ΓΕΙ περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ἀπογεννωμένῳ. Ὁ γὰρ δακτύλιος οὗτος μετὰ τοῦ ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΚΕ ἀναφυομένου Κυλίνδρου ἴσος ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ ΒΗΕ ἀπογεννωμένῃ Κωνοΐδι σὺν τῷ ἐκ τοῦ ἀσυμπτωτικοῦ χωρίου ΒΗΙΓ ἀπογεννωμένῳ στερεῷ. Καὶ ἐπειδὴ τοῦτό ἐστιν ἴσον τῷ εἰρημένῳ Κυλίνδρῳ, καὶ ἡ Ὑπερβολικὴ ἄρα Κωνοῒς ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ δακτυλίῳ.