ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Α΄.

Ἡ ἐπιζευγνῦσα τὰ σημεῖα τῆς ἁφῆς ΝΙ, ὡς οὖσα διάμετρος τοῦ παραλληλογράμμου ΓΝΤΙ, δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτου ΓΤ κατὰ τὸ Ρ. Ἐπεὶ ἡ ΓΤ ἐστὶν ἑτέρα διάμετρος τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Β΄.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΝΙ ἐστὶ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΑΖ (Πορ. Δ΄. τῆς προηγουμένης), ἄρα καὶ οἱαδήτις ἄλλη εὐθεῖα ΥΕ ἐπιζευγνῦσα τὰ σημεῖα τῆς ἁφῆς, ἑτέρων ἐφαπτομένων ΠΕ, ΠΥ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Π τῆς κοινῆς ἀσυμπτώτου ἀχθεισῶν, παράλληλος ἔσται τῇ ΑΖ (131), καὶ δίχα τμηθήσεται καὶ αὕτη κατὰ τὸ Φ. Οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῶν ΝΡ πρὸς ΡΙ, καὶ ΥΦ πρὸς ΦΕ (Προτ. ΜΑ΄.).

γωνίου, οὕτω δὴ καὶ τὸ ἀπὸ ΗΧ ἐξισοῦται τῷ αὐτῷ ὀρθογωνίῳ. Διὰ δὴ ταῦτα (κατὰ τὴν αὐτὴν ΛΖ΄.) αἱ εὐθεῖαι ΠΓΧ, ΑΓΖ ἔσονται ἀσύμπτωτοι τῶν ὑπερβολικῶν τομῶν ΗΚ, ΝΥ· ἄρα (Πορ. Α. τῆς ΛΖ΄.) αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι ἔσονται ἀσύμπτωτοι καὶ τῶν Ὑπερβολῶν ΕΙ, ΞΘ.

131) Ἡ εὐθεῖα ΥΕ ὅτι ἐστὶ παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ ΑΖ δῆλον ἐντεῦθεν. Ἐπεὶ γὰρ (Προτ. ΛΗ΄.) ΠΥ=ΥΛ, καὶ ΠΕ=ΕΜ, ἄρα ΠΥ:ΥΛ=ΠΕ:ΕΜ, καὶ ἑπομένως (1. τοῦ ς΄.) ἡ ΔΖ παράλληλος τῇ ΥΕ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

Ε'πεὶ δὲ ϗ ἡ ΓΠ δίχα ἐςὶ τετμημένη κατὰ τὸ Φ, ὥσπερ δὴ ἡ ἐφαπτομένη ΠΕΜ κατὰ τὸ Ε, (Προτ. ΛΗ'.) αἱ ἄρα ἀπὸ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὰς ἀφὰς ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι ΓΕ, ΓΥ παράλληλοι ἔσονται ταῖς ἐφαπτομέναις ΠΥ, ΠΕ (132)· ὅθεν ἔσονται συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῶν Ὑπερβολῶν τύτων. Ε'πειδὴ ἡ ΠΕ ἐξισῦται τῇ αὐτῆς παραλλήλῳ ΓΥ, ϗ ἡ ΠΥ τῇ παραλλήλῳ ΓΕ. Ο῞θεν ἡ ΓΥ παράλληλός ἐςι ταῖς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΓΕ τεταγμέναις, ϗ ἡ ΓΕ τῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΓΥ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Δ'.

Τὰ δὴ παραλληλόγραμμα ταῦτα ΓΝΤΙ, ΓΥΠΕ, ἀεὶ ἐςὶν ἀλλήλοις ἴσα. Ἴσων ὄντων ἀλλήλοις ϗ τῶν τριγώνων ΓΝΡ, ΓΥΦ (Πορ. Β'. τῆς Μ'.), ἅτινά ἐςι τεταρτημόρια τῶν αὐτῶν.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Ε'.

Καὶ ὁποιονδήποτε παραλληλόγραμμον ΠΛΣΜ (ἢ ΡΛΣΜ ἐν τῷ 111 σχήματι) ἐν ταῖς ταύταις

---

132) Ε'πεὶ ΓΦ=ΦΠ, ϗ ΥΦ=ΦΕ (Πορ. Β'), ἄρα ΥΦ : ΦΓ=ΦΕ : ΦΠ· ἄρα (6. τῦ ϛ'.) τὰ τρίγωνα ΓΥΦ, ΕΦΠ ὅμοια, ϗ αἱ γωνίαι ΥΓΦ, ΦΠΕ, ϗ αἱ ΓΥΦ, ΠΕΦ, ἴσαι. Τοιγαρῦν (28. τῦ Α'.) αἱ εὐθεῖαι ΓΕ, ΓΛ εἰσὶ παράλληλοι ταῖς ΠΛ, ΠΕ.

Ὑπερβολαῖς ἐγγεγραμμένον ϗ ταῖς πρὸς τοῖς πέρασι τῶν συζυγῶν διαμέτρων ἀχθείσαις ἐφαπτομέναις περατύμενον, ἀξισωθήσεται οἱῳδήποτε παραλληλογράμμῳ ΑΤΖΧ, ἑτέραις ἐφαπτομέναις πρὸς τοῖς πέρασιν ἑτέρων συζυγῶν διαμέτρων ἀχθείσαις περατυμένῳ. Τὰ γὰρ παραλληλόγραμμα ταῦτα ἔσεται τετραπλάσια τῶν ἴσων τριγώνων ΓΛΠ (ἢ ΓΛΡ ἐν τῷ 111 σχήματι), ΓΑΤ (Πορ. Δ΄. τῆς Μ΄.), ἢ τῶν ἴσων παραλληλογράμμων ΓΤΠΕ (ἢ ΓΤΡΕ τῷ 111 σχήματι) ΓΝΤΙ (Πορ. Δ΄. τῆς ΜΒ΄.).

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ ϛ΄.

Ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν συζυγῶν διαμέτρων ἐπαφῶν, ἀναφύεται τὸ παραλληλόγραμμον ΚΤΕΘ, ἴσον τῷ ἑτέρῳ ΗΝΙΞ. Ἔςι γὰρ τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα ἡμίσεα τῶν ἑτέρων ΡΛΣΜ, ΑΤΖΧ ἀλλήλοις ἴσων. Εἴγε ϗ τὰ τρίγωνα ΓΝΙ, ΓΤΕ ἅπερ ἐςὶ τεταρτημόρια τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων ΚΤΕΘ, ΗΝΙΞ, ἡμίσεά ἐςι τῶν παραλληλογράμμων ΓΝΤΙ, ΓΤΡΕ, ἅπερ ἐςὶ τεταρτημόρια τῶν ΡΛΣΜ, ΑΤΖΧ (133).

---

133) Ὅτι δὲ τὰ Σχήματα ΚΥΕΘ, ΗΝΙΞ ἐςὶ παραλληλόγραμμον δῆλον ἐκ τούτου. Αἱ γὰρ εὐθεῖαι ΥΕ, ΝΙ εἰσὶ παράλληλοι τῇ ἀσυμπτώτῳ ΑΖ (Πορ. Δ. τῆς ΜΑ.), ἥτις κατὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμά ἐςι παράλληλος ταῖς

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓʹ.

Ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει τὰ ὑπὸ τῶν πρὸς τοῖς πέρασι δυεῖν συζυγῶν διαμέτρων ΘΥ, ΚΕ. ἢ ΝΞ, ΗΙ ἀχθεισῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενα παραλληλόγραμμα ΡΛΣΜ, ΑΤΖΧ ἀεὶ ἔςαι ἀλλήλοις ἴσα. Καὶ δὴ καὶ τὰ εἰς τὴν αὐτὴν Ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένα παραλληλόγραμμα ΚΥΕΘ, ΗΝΙΞ, ἃ ταῖς τὰ πέρατα δυεῖν συζυγῶν διαμέτρων ἐπιζευγνύσαις εὐθείαις περατοῦται, ἴσα ἔςαι ἀλλήλοις. Σχημ. 1 Πιν. Γ

Ἐπεζεύχθω γὰρ δύω σημεῖα τυχόντα τὰ Υ, Ι, καὶ διὰ μὲν τοῦ Υ τετάχθω ἐπὶ τὴν διάμετρον ΝΞ ἡ εὐθεῖα ΥΠ τέμνουσα τὴν ἐφαπτομένην ΙΓ κατὰ τὸ Φ· διὰ δὲ τοῦ Ι τετάχθω ἐπὶ τὴν διάμετρον ΕΚ ἡ εὐθεῖα ΙΒ συμβάλλουσα τῇ ἐφαπτομένῃ ΤΡ κατὰ τὸ Ο, καὶ ἔσεται δὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΤΟΒ, ἴσον τῷ ἑτέρῳ ΓΠΦΙ. Ἑκά-

---

τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς ἐπιζευγνύσαις ΗΞ, ΚΘ. Ὅθεν αἱ ΥΕ, ΚΘ, καὶ ΗΞ, ΝΙ εἰσὶ παράλληλοι. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσονται καὶ αἱ ΚΥ, ΘΕ, καὶ ΗΝ, ΞΙ, εἶναι ἀλλήλαις παράλληλοι. Τὰ ἄρα ΚΥΕΘ, ΗΝΙΞ ἐςὶ παραλληλόγραμμα.

τερον γὰρ (41 τȣ̃ Α΄.) διπλάσιόν ἐςι τȣ̃ εἰς αὐτὰ ἐγγεγραμμένȣ τριγώνȣ ΓΥΙ (Ἔςι γὰρ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΥΟΒ ϗ τὸ τρίγωνον ΓΥΙ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΓΥ, ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΓΥ, ΒΟ. Ὡσαύτως τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΓΥΙ ϗ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΠΦΙ ἐςιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΓΙ κἀν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΓΙ, ΠΦ. Ἑκάτερον ἄρα τῶν παραλληλογράμμων διπλάσιόν ἐςι τȣ̃ τριγώνȣ ΓΥΙ, ὅθεν ΓΥΟΒ=ΓΠΦΙ) Ἀλλὰ συνελθȣ́σης τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ΓΕ τῇ ἐφαπτομένῃ ΙΖ κατὰ τὸ σημεῖον Δ, τῆς τε ΓΝ τῇ ΥΛ κατὰ τὸ Ψ, ϗ δὴ ϗ τῶν ἐφαπτομένων ΥΛ, ΙΔ ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, ἔςιν ὡς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΓΨΩ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕΡΥ, ȣ̃τω τὸ αὐτὸ ΓΕΡΥ πρὸς τὸ ΓΥΟΒ. Ἔχει γὰρ τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα τὸ αὐτὸ ὕψος ϗ τὰς βάσεις ΓΔ, ΓΕ, ΓΒ συνεχῶς ἀνάλογον (Πορ. Β΄. τῆς Θ΄.) ϗ ὡς τὸ αὐτὸ ΔΓΨΩ πρὸς τὸ ΓΝΤΙ, ȣ̃τω τὸ αὐτὸ ΓΝΤΙ πρὸς τὸ ΓΠΦΙ. Ἔχει γὰρ ϗ ταῦτα τό,τε ὕψος ταὐτὸ ϗ τὰς βάσεις ΓΨ, ΓΝ, ΓΠ συνεχῶς ἀνάλογον (κατὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα). Ἔςιν ἄρα μεταξὺ τȣ̃ ΔΓΨΩ καὶ τȣ̃ ΓΥΟΒ, ἢ τȣ̃ αὐτῷ ἴσȣ ΓΠΑΙ μέσον ἀνάλογον τό,τε ΓΕΡΥ, ϗ τὸ ΓΝΤΙ. Τοιγαρȣ̃ν τὸ ΓΕΡΥ ἴσον ἐςι τῷ ΓΝΤΙ. Ἔςι δὲ ταῦτα τεταρτημόρια τῶν παραλληλογράμμων ΡΑΣΜ, ΑΤΖΧ, ἄρα ϗ ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις, ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον. Τὰ δὲ λοιπὰ ΚΤΕΘ, ΗΝΙΞ, ἅπερ ἐγγέγραπται εἰς τὴν Ἔλλειψιν, εἰσὶν ἡμίσεα τῶν εἰρημένων ΡΑΣΜ, ΑΤΖΧ (εἴγε τὸ τρίγωνον ΓΕΤ ἥμισύ ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου ΓΕΡΤ, τό,τε ΓΝΙ τοῦ ΓΝΤΙ, ἅπερ τρίγωνα ἐστι τεταρτημόρια τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων τῶν εἰς τὴν Ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένων)· ἄρα καὶ ταῦτα τὰ εἰς τὴν Ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένα παραλληλόγραμμά ἐστιν ἀλλήλοις ἴσα, ὥσπερ δὴ καὶ ἕτερ ἅττα περιγεγραμμένα· ἅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

Δῆλον δ᾽ ὅτι ἡ ΓΕ τέτμηται κατὰ τὸ Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἐν ᾧ ἡ ΓΝ κατὰ τὸ Π. Ἔστι γὰρ ὡς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΓΦΩ πρὸς τὸ ΓΥΟΒ, οὕτω τὸ αὐτὸ ΔΓΦΩ πρὸς τὸ ΓΠΦΙ (= τῷ ΓΥΟΒ). Ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΔΓΦΩ πρὸς τὸ ΓΥΟΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, (1 τοῦ ϛ'.) ὡς δὲ τὸ ΔΓΦΩ πρὸς τὸ ΓΠΦΙ, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς τὴν ΓΠ (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον), ἄρα ὁ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῆς ΓΦ πρὸς τὴν ΓΠ. Ἀλλὰ τῶν λόγων τούτων ὁ μὲν πρῶτος ἐστι διπλασίων τοῦ λόγου τῆς ΓΕ πρὸς ΓΒ, ὁ δὲ δεύτερος διπλασίων τοῦ ΓΝ πρὸς ΓΠ (οὐσῶν τῶν ΓΔ, ΓΕ, ΓΒ, καὶ τῶν ΓΦ, ΓΝ, ΓΠ συνεχῶς ἀνάλογον), ἄρα ὁ λόγος τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΓΒ ἐστιν ἴσος τῷ λόγῳ τῆς ΓΝ πρὸς τὴν ΓΠ. Ὁσάκις ἄρα ἂν ὦσι δύω ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων ΚΕ, ΤΘ καὶ ΝΖ, ΗΙ· ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος Υ τῆς μιᾶς τοῦ ἑνὸς ζεύγους ΥΘ ἀχθῇ τεταγμένη ἐπὶ τὴν μίαν τοῦ ἑτέρου ζεύγους ΝΞ ἡ ΥΠ, καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος Ι τῆς ἑτέρας τοῦ ζεύγους τούτου ταχθῇ τῇ ἑτέρα τοῦ ζεύγους ἐκείνου ΚΕ, ἡ ΙΒ, αὗται δὴ αἱ τεταγμέναι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τεμοῦσι τὰς διαμέτρους ΝΞ, ΚΕ, ἐφ' ἃς τεταγμένως κατήχθησαν. Εἴγε (ἐπεὶ ἐστι ΓΕ : ΓΒ = ΓΝ : ΓΠ) ἐστιν ὡς ἡ ΓΞ διπλασία τῆς ΓΝ, πρὸς τὴν ΓΠ, οὕτως ἡ ΚΕ διπλασία τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΓΒ, ἢ λοιπὴ ἡ ΠΝ πρὸς λοιπὴν τὴν ΒΕ (134).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐὰν ἔτι ἀπὸ τῶν τερμάτων Ν, Ι ἑκατέρας τῶν συζυγῶν διαμέτρων ταχθῶσιν ἐπὶ τὰς λοιπὰς συζυγεῖς διαμέτρους αἱ Νη, ΙΒ, αἱ διάμετροι αὗται ΥΘ, ΕΚ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τμηθήσονται κατὰ τὰ σημεῖα η, Β. Ἔσται γὰρ ἡ ΥΓ πρὸς Γη, ὡς ἡ ΓΦ πρὸς ΓΝ (τεταγμένη γὰρ οὖσα ἡ Νη, ἐστι τῇ ἐφαπτομένῃ ΥΦ παράλληλος)· ὅθεν καὶ ὡς ἡ ΓΝ πρὸς ΓΠ (Πορ. Β'. τῆς Θ'.) ἢ ἡ ΓΕ πρὸς ΓΒ (Πορ. προηγ.). Ἔνθεν τοι ἡ ΓΥ πρὸς Γη, ως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΒ, καὶ ἡ ΥΓ πρὸς λοιπὴν τὴν Υη, ὡς αὐτὴ ἡ ΓΥ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΒ (19 τοῦ Ε'.)

---

134) *Ἐπεὶ ἐστι ΝΞ : ΚΕ = ΓΝ : ΓΕ· ἢ ΓΞ : ΓΝ = ΚΕ : ΓΕ, καὶ ΝΞ : ΓΠ = ΚΕ : ΓΒ, ἔσεται (19. τοῦ Ε'.) ΝΞ : ΠΝ = ΚΕ : ΒΕ.*

καὶ διπλασιασθέντων μὲν τῶν ἡγουμένων ὡς ἡ ΘΥ πρὸς Υη, οὕτως ἡ ΚΕ πρὸς ΕΒ· διελόντι δὲ, ὡς ἡ Θη πρὸς ηΥ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΒΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ἔσεται ἄρα τὰ ὀρθογώνια ΘηΥ, ΚΒΕ, ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ΓΥ, ΓΕ· ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΘΥ, ΚΕ (135). Καὶ ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΘΥ πρὸς τὴν αὐτῆς Παράμετρον (μετὰ τὸ Β΄. Πόρισμα τῆς ΙΒ΄.), ἢ ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΘηΥ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Νη τετράγωνον (Πορ. Β΄. τῆς ΙϚ΄.), ἢ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΙΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΒΕ (136). Ἔστιν ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ τῆς Νη τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΚΒΕ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΙΒ ἴσον τῷ ΘηΥ ὀρθογωνίῳ.

---

135) Ἐκ τοῦ προηγουμένου Πορίσματος ἐστὶ $\Theta\eta : \eta\Upsilon = KB : BE$, ἢ $\eta\Upsilon : BE = \Theta\eta : KB$· ἔστι δὲ ἐκ τοῦ αὐτοῦ Πορίσματος καὶ $\Upsilon\Gamma : \Upsilon\eta = \Gamma E : EB$, ἢ $\Upsilon\Gamma : \Upsilon\eta$ EB· ἄρα

$$\Upsilon\Gamma : \Gamma E = \Upsilon\eta : BE,$$ καὶ
$$\Upsilon\Gamma : \Gamma E = \Theta\eta : KB$$· τοιγαροῦν
$$\Upsilon\Gamma^2 : \Gamma E^2 = \Theta\eta\Upsilon : KBE.$$

136) $\Theta\eta\Upsilon : N\eta^2 = \Theta\Upsilon$: τὴν αὐτῆς Παράμετρον, ἢ (Πορ. Β΄. τῆς ΙΓ΄.) ἡ Παράμετρος τῆς ΚΕ διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον ΚΕ, ἢ (Πορ. ϛ΄. τῆς ϛ΄.) ὡς τὸ ἀπὸ ΙΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΒΕ· ὡς ἄρα $\Theta\eta\Upsilon$ πρὸς $N\eta^2$, οὕτω IB^2 πρὸς ΚΒΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΔ'.

Σχημ. 112. Τὰ ἀπὸ δυεῖν συζυγῶν διαμέτρων ΝΞ, ΗΙ τετράγωνα ἅμα ληφθέντα, ἴσα ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων ΚΕ, ΘΥ τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν.

Ἀχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ σημείου Ι τῆς εὐθείας ΙΒ τεταγμένως ἐπὶ τὸν ἄξονα ΚΕ, ἀπό τε τοῦ Ν τῆς Νη ἐπὶ τὸν ἄξονα ΘΥ, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν Νη, Γη τετραγώνοις, τό,τε ἀπὸ τῆς ΓΙ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΙΒ (47 τοῦ Α'.) Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Νη τετράγωνον, ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΚΒΕ ὀρθογωνίῳ, τό,τε ἀπὸ τῆς ΙΒ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΘηΥ (Πορ. Γ'. τῆς προηγουμένης)· ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν ΓΝ, ΓΙ ὁμοῦ ληφθέντα, ἴσα ἐστι τῷ ὀρθογωνίῳ, ΚΒΕ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ καὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΘηΥ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς Γη τετραγώνῳ ἅπασιν ὁμοῦ ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΚΒΕ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ τετραγώνῳ, τό,τε ὑπὸ ΘηΥ σὺν τῷ ἀπὸ Γη, ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΥ (5 τοῦ Β'.)· ἄρα δύω τὰ ἀπὸ τῶν ΓΝ, ΓΙ τετράγωνα ὁμοῦ ληφθέντα, ἴσα ἐστι δισὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΓΥ ἅμα λιφθεῖσιν. Καὶ τῶν τετραπλῶν αὐτῶν ληφθέντων τὰ ἀπὸ τῶν ΝΞ, ΗΙ τετράγωνα ἅμα ληφθέντα, ἴσα ἐστι δυσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΕ, ΘΥ ὁμοῦ ληφθεῖσιν, ο. ε. δ.

ΠΌΡΙΣΜΑ Α΄.

Τὰ ἀπὸ δυεῖν ἄρα συζυγῶν διαμέτρων τετράγωνα ἴσα ἐςὶ τοῖς ἀπὸ δυεῖν ἑτέρων συζυγῶν διαμέτρων τετραγώνοις. Οἱονδήποτε γὰρ ζεῦγος τῶν ἀπὸ τέτων τετραγώνων ἐξισῦσαι τοῖς ἀφ' ἑκατέρυ τῦ ἄξονος τετραγώνοις.

ΠΌΡΙΣΜΑ Β΄.

Καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΤ τετράγωνα ἐξισῦται τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΙ, ΙΝ τετραγώνοις. Τὰ μὲν γὰρ πρῶτα ἐξισῦται τῷ δὶς ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΓΤ. Τὰ δὲ δεύτερα τῷ δὶς ἀπὸ τῶν ΓΙ, ΓΝ (Σχολ. γενικ. Ε΄.). Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΓΤ ἐξισῦται τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΙ, ΓΝ (κατὰ τὴν παρῦσαν), τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΤ, ἐξισῦται τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΙ, ΙΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ΄.

Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ τὰ ἀπὸ δυεῖν συ- Σχημ. 113.
ζυγῶν διαμέτρων ΗΙ, ΝΞ τετράγωνα (εἴπερ ἄνισα εἴη) διαφέρει ἀλλήλων τῷ αὐτῷ ποσῷ, ᾧπερ διαφέρει τὰ ἀπὸ δυεῖν ἑτέρων οἱωνδήποτε συζυγῶν ΚΕ, ΘΥ τετράγωνα.

Ἀχθεισῶν γὰρ ἀπὸ τῶν σημείων Ν, Υ ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις τῶν ἐφαπτομένων ΑΝΥ, ΛΥΡ. αἵπερ ἔσονται ἴσαι ταῖς δευτέραις διαμέτροις ΗΙ, ΚΕ, εἴγε ἡ ΑΝ ἐξισοῦται τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΗ, ἥτε ΥΛ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΚ (Πορ. Γ'. τῆς ΜΒ'.) Ἀχθεισῶν δ' ἔτι καὶ τῶν ΝΜ, ΥΒ, καὶ ΥΖ, ΡΔ ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΓΑ καθέτων, δῆλον ὅτι ἡ ΑΜ ἐςὶν ἴση τῇ ΜΒ, ὥσπερ καὶ ΑΝ τῇ ΝΥ (ἡ γάρ τοι ΝΜ παράλληλοις τῇ ΥΒ, καὶ δὴ ΑΝ: ΝΥ = ΑΜ:ΜΒ, καὶ ΑΜ = ΜΒ (ὡς καὶ ΑΝ = ΝΥ κατὰ τὴν ΛΗ). Ἔνθεντοι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΑΝ, ἥτις ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΜ, ΜΑ (τὸ γὰρ ἀπὸ ΓΝ ἴσον ἐςὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΜ, ΜΝ, τό,τε ἀπὸ ΜΑ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΝ κατὰ τὴν 47 τοῦ Α'. καὶ κοινοῦ τοῦ ἀπὸ ΜΝ ἀρθέντος, ἀπολείπεται ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΑΝ ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΜ, ΜΑ) ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΜ, ΜΒ, ἥπερ ἐςὶν ἴση τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΓΒ (6 τοῦ Β'.). Ὡσαύτως ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΥ, ΥΛ, ἔσεται ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΖΓ, ΖΛ, ἢ ΖΔ (= τῷ ἀπὸ ΖΛ) ἥτις ἐςὶν ἴση τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΓΛ (137). Ἀλλὰ τὰ

---

137) Ἐπεὶ ἡ ΖΥ ἐςὶ παράλληλος τῇ ΡΔ, ἔσεται δὴ ΡΥ : ΥΛ = ΔΖ : ΖΛ· ἐςὶ δὲ ΡΥ = ΥΛ ἄρα, καὶ ΔΖ = ΖΛ· Ἔτι ἐπεὶ $ΓΥ^2 = ΥΖ^2 + ΓΖ^2$, καὶ $ΥΛ^2 = ΥΖ^2 + ΖΛ^2$, ἄρα $ΓΥ^2 - ΥΛ^2 = ΥΖ^2 + ΓΖ^2 - ΥΖ^2 - ΖΛ^2 = ΓΖ^2 - ΖΛ^2 =$ ΔΓΛ κατὰ τὴν 6. τοῦ Β'. τῶν Στοιχείων.

ὀρθογώνια ΑΓΒ, ΔΓΛ ἐςὶν ἀλλήλοις ἴσα (ἐςὶ γὰρ ἡ ΓΒ πρὸς ΓΔ ὡς ΓΤ πρὸς ΓΡ, τοῦτ' ἔςιν ἡ ΛΓ πρὸς ΓΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΓΛΡ, ΓΑΤ, ἐν οἷς δέον εἶναι ἀντιπεπονθείας τὰς περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν Γ πλευρὰς κατὰ τὸ Δ'. Πορ. τῆς Μ'.)· ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΝ καὶ ΑΝ ἢ ΓΗ, ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΤ καὶ ΤΛ ἢ ΓΚ. Καὶ ληφθέντων τῶν τετραπλῶν αὐτῶν, γίνεται ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΝΞ, ΗΙ, ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΤΘ, ΚΕ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μϛ'.

Ἐν τῇ Ὑπερβολῇ ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου ληφθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τὰ διαςήματα ΓΛ, ΓΟ, ΓΑ συνεχῶς ἀνάλογον· ἀπὸ δὲ τῶν Λ, Ο, Α ἀχθῶσι τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ παράλληλοι αἱ ΛΠ, ΟΚ, ΑΙ, τέμνουσαι τὴν Ὑπερβολὴν κατὰ τὰ Π, Κ, Ι. Τὰ μεταξὺ αὐτῶν τῶν παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα ὑπερβολικὰ χωρία ΛΠΚΟ, ΟΚΙΑ ἴσα ἔςαι ἀλλήλοις. Σχημ. 114.

Συμπληρωθέντων γὰρ τῶν παραλληλογράμμων ΓΛΠΡ, ΓΟΚΣ, ΓΑΙΜ καὶ προεκβληθεισῶν τῶν ΡΠ, ΑΙ ἕως ὅτου συμπέτωσιν ἀλλήλαις κατὸ Τ, τὰ ἀναφυόμενα παραλληλόγραμμα ΓΛΕΜ, ΓΟΚΣ, ΓΑΤΡ, ἔσεται ἀλλήλοις ὅμοια. Ἔςι γὰρ ἐκ τῦ Γ΄. Πορίσματος τῆς Μ΄. ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΟ, ὕτως ἡ ΟΚ πρὸς τὴν ΑΙ· ἀλλ᾽ ὑπετέθη ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΟ, ὕτως ἡ ΓΟ πρὸς ΓΛ. Ὡς ἄρα ἡ ΓΟ πρὸς τὴν ΓΛ, ὕτως ἡ ΚΟ πρὸς τὴν ΑΙ. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα ΓΛΕΜ, ΓΟΚΣ ἀλλήλοις ὅμοια (ὅρ. 1 τῦ ς΄.). Ὡσαύτως ὡς ἡ ΛΠ πρὸς τὴν ΚΟ, ἢ ἡ ΓΡ πρὸς τὴν ΓΣ, ὕτως ἡ ΓΟ πρὸς τὴν ΓΛ, τῦτ᾽ ἔςιν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΟ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα ϗ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΑΤΡ ὅμοιόν ἐςι τῷ αὐτῷ ΓΟΚΣ, ἐπομένως δὲ ϗ τῷ ἑτέρῳ ΓΛΕΜ. Τοιγαρῦν ἡ διάμετρος ΓΤ διὰ τῶν λοιπῶν γωνιῶν Ε, Κ διέρχεται (26 τῦ ς΄.) ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΠΙ, ἡ διάμετρος τῦ παραλληλογράμμυ ΠΕΙΤ δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΓΕΤ κατὰ τὸ σημεῖον Χ, ϗ ἔσεται ἄρα ἡ ΠΙ τεταγμένη τῆς Ὑπερβολῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΕΚΧ τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Κ τῦ Ὑπερβολικῦ τμήματος ΠΚΙ διακινυμένην. Τοιγαρῦν ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων τριγώνων ΓΠΧ, ΓΙΧ (1 τῦ ς΄.) ἀρθῶσιν αἱ ἴσαι ἡμιϋπερβολαὶ ΠΚΧ, ΙΚΧ, ἀπολείπεται ὁ τομεὺς ΓΠΚ ἴσος τῷ τομεῖ ΓΙΚ. Ἀλλὰ τοῖς τομεῦσι τύτοις ἴσα ἐςὶ τὰ Ὑπερβολικὰ χωρία ΛΠΚΟ, ΟΚΙΑ (Πορ. ς΄. τῆς Μ΄.), ἄρα ϗ ταῦτα ἀλλαίλοις ἴσα, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐὰν ἄρα ἐπί τινος τῶν ἀσυμπτώτων ληφθῇ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΟ, ὡς οἱαδήτις ἑτέρα ΓΔ πρὸς τὴν ΓΛ, ἀχθεισῶν τῶν ΑΙ, ΟΚ, ΔΞ, ΛΠ παραλλήλως τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ, ἀναφυήσεται τὰ ὑπερβολικὰ χωρία ΑΙΚΟ, ΞΔΝΠ, ἀλλήλοις ἴσα. Σχημ. 115.
Ληφθείσης γὰρ τῆς ΓΝ μέσης ἀναλόγου τῶν δυοῖν ἄκρων ΓΑ, ΓΛ, ἥτις δὴ ἔσεται μέση ἀνάλογος, καὶ τῶν μέσων ΓΟ, ΓΔ, ἔσεται τὸ χωρίον ΙΑΝΛ. ἴσον τῷ ΥΝΛΠ (κατὰ τὴν παροῦσαν)· καὶ δὴ καὶ τὸ ΚΟΝΥ ἴσον τῷ ΥΝΔΞ. Ἄρα καὶ τὸ λοιπὸν ΑΙΚΟ ἴσον τῷ λοιπῷ ΞΔΛΠ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

Καὶ ἐὰν ληφθῶσιν οἱαδήποτε διαστήματα, ΓΑ, ΓΟ, ΓΝ, ΡΔ, ΓΛ συνεχῶς ἀνάλογον· τεταγμένων τῶν συστοιχουσῶν ΑΙ, ΟΚ, ΝΥ, ΔΞ, ΛΠ, ἀνακύψει τὰ ὑπ' αὐτῶν ἐναπολαμβανόμενα ὑπερβολικὰ χωρία ΙΑΚΟ, ΚΟΥΝ, ΥΝΔΞ, ΞΔΛΠ κτλ. ἀλλήλοις ἴσα.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐπειδὴ ἐὰν μὲν ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς ΓΝ ᾖ διπλασίων, ἤπερ ὁ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΝ, τὸ χωρίον ΥΝΛΠ ἐστὶ διπλάσιον τοῦ ΥΝΔΞ, εἰ δὲ ὁ πρῶτος λόγος τριπλασίων τοῦ δευτέρου, τὸ πρῶτον χωρίον ἔςαι τριπλάσιον τοῦ δευτέρου. Τοσαῦτα γὰρ ἴσα χωρία τὸ πρῶτον ἐμπεριέξει, ἐξ ὅσων ἴσων λόγων ὁ κατ' αὐτὸ λόγος συγκείσεται (138). Διὰ ταῦτα ἄρα οἱονδήποτε χωρίον ΚΟΛΠ, ἔςαι πρὸς οἱονδήποτε ἕτερον ΞΔΛΠ, ὡς ὁ λόγος τῆς ΓΛ πρὸς ΓΟ πρὸς τὸν λόγον τῆς ΛΓ πρὸς ΓΔ κατάγε τὴν λογαριθμικὴν ποσότητα τῶν ἀναλογιῶν (139).

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ Δ'.

Ὅσα εἴρηται περὶ τῶν χωρίων τούτων, ῥηθήσεται καὶ περὶ τῶν Ὑπερβολικῶν τομέων ΙΓΚ,

---

138) Ἐὰν ὁ λόγος $ΛΓ : ΓΝ$ ἐςὶ διπλασίων τοῦ $ΔΓ : ΓΝ$, αἱ $ΛΓ$, $ΔΓ$, $ΔΝ$ ἔσονται συνεχῶς ἀνάλογον· Ἔνθεντοι $ΥΝΔΞ = ΞΔΛΠ$· καὶ προσκειμένου κοινῇ τοῦ $ΛΝΔΞ$ ἔσεται $2ΥΝΔΞ = ΥΛΝΠ$. Ἐὰν δὲ ὁ λόγος $ΛΓ$ πρὸς $ΓΝ$ ᾖ τριπλασίων τοῦ $ΔΓ : ΓΝ$, ἔςω ἑτέρα ἡ $ΓΕ$ δύο μέσους ἀναλόγους μετὰ τῆς $ΓΔ$ ἐν ταῖς δοθείσαι $ΛΓ$, $ΓΝ$ ποιοῦσα· καὶ δὴ τότε, ἐπεὶ ἐςὶ $ΛΓ : ΓΕ = ΓΕ : ΓΔ$, ἔςαι $ΞΔΕΘ = ΘΕΛΠ$· καὶ ἐπεὶ $ΓΕ : ΓΔ = ΓΔ : ΓΝ$, ἔςαι δὴ $ΥΝΔΞ = ΞΔΕΘ$. Ἔνθεντοι $ΥΝΔΞ = ΞΔΕΘ = ΘΕΛΠ$, καὶ $ΥΝΛΠ = 3ΥΝΔΞ$. Εἰ δὲ ὁ λόγος $ΛΓ : ΓΝ$ εἴη τετραπλασίων τοῦ $ΔΓ : ΓΝ$, ἔςαι δὴ τότε τὸ $ΥΝΛΠ = 4ΥΝΔΞ$.

139) Εἰ μὲν ὁ λόγος $ΛΓ : ΓΟ$ ἐςὶ διπλασίων τοῦ $ΛΓ : ΓΔ$, ἔσονται αἱ $ΛΓ$, $ΔΓ$, $ΓΟ$ συνεχῶς ἀνάλογον· καὶ δὴ $ΚΟΔΞ = ΞΔΛΠ$, καὶ $ΚΟΛΠ = 2ΞΔΛΠ$. Εἰ δὲ ὁ $ΛΓ : ΓΟ$ ἐςὶ τριπλασίων τοῦ $ΛΓ : ΓΔ$, ἔσεται (Σημ. ἄνωτ.) $ΚΟΛΠ = 3ΞΔΛΠ$· εἰδὲ τετραπλασίων, ἔςαι $ΚΟΛΠ = 4ΞΔΛΠ$· ἅμα ὁ λόγος $ΛΓ : ΓΟ$ ἐςὶ πρὸς τὸν $ΛΓ : ΓΔ$ ὡς $2 : 1$. ὡς $3 : 1$. ὡς $4 : 1$. κτξ.

ΞΓΠ, ΥΓΞ κτλ. οἷς τισιν ἐξισῦται ἀεὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτȣ συςοιχῦντα ὑπερβολικὰ χωρία, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ς΄. Πορίσματι τῆς Μ΄. Προτάσεως.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Ε΄.

Δῆλον δ' ὅτι τὸ ὅλον χωρίον τὸ μεταξὺ τῆς ὑπερβολικῆς καμπύλης ϗ τῆς κατ' αὐτὴν ἀσυμπτώτȣ ἐναπολαμβανόμενον εἰς ἄπειρον προαγόμενον, ϗ μεγέθȣς ἂν εἴη ἀπείρȣ. Ἐνὸν γὰρ λόγȣς ΓΑ, ΓΟ, ΓΝ κτλ. εἰς ἄπειρον συνείρεσθαι· καὶ χωρία ἄρα ἄπειρα τῷ τε πρώτῳ ΑΙΚΟ ἴσα, ϗ τοῖς ἀπείροις ἐκείνοις λόγοις συςοιχῦντα, ἐν τῷ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ϗ τῆς καμπύλης ἀφοριζομένῳ τῷ δὲ χωρίῳ περιληφθήσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΖ΄.

Ἐὰν Παραμέτρῳ μὲν τῇ ΝΡ, ἥτις εἴη ἴση τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΝΕ τῆς ἰσοσκελῦς ὑπερβολῆς ΝΜ, ἄξονι δὲ τῷ αὐτῷ τῆς ὑπερβολῆς καταγραφῇ Παραβολὴ ἡ ΝΒ. Ἀχθείσης παρὰ τὸν ἄξονα τῆς ΒΔ, ἥτις ἀπαντήσει τῷ μὲν δευτέρῳ τῆς ὑπερβολῆς ἡμιάξονι ΓΞ, κατὰ τὸ Δ, τῇ δὲ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Μ, ἔσεται τὸ ὑπερβολικὸν χω- Σχημ. 116. Πιν. ΙΔ.

ρίον ΓΝΜΔ, ἴσον τῷ ὑπὸ τȣ̃ πλαγίȣ ἡμιάξονος ΓΝ ϗ τȣ̃ μέρȣς τῆς Παραβολῆς ΝΒ, ὃ μεταξὺ τῆς κορυφῆς Ν, ϗ τῆς ἀχθείσης εὐθείας ΒΔ ἐναπολαμβάνεται, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Τεταγμένων γὰρ ἐν μὲν τῇ Ὑπερβολῇ τῆς ΜΚ, ἐν δὲ τῇ Παραβολῇ τῆς ΒΑ, ἐφαπτέσθω τῆς παραβολῆς ἡ ΒΘ, ϗ ἐπὶ τὴν ΒΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΒΠ, ϗ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΝ ἔσεται ἴση τῇ ΒΠ. Ἡ γὰρ ὑποκάθετος ΑΠ ἐξισȣ̃ται τῇ ΓΝ, ὡς ἡμίσεια ȣ̃σα τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΡ (Πορ. ΙϚ΄. τῆς Θ΄.) ᾗτινι ἐξισȣ̃ται ἡ πλαγία ΞΝ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. Ἔϛι δὲ ϗ ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΓΔ, ϗ ἡ γωνία ΠΑΒ ἴση τῇ ΝΓΔ. Ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. Ἄρα (4 τȣ̃ Α΄.) ϗ ἡ βάσις ΒΠ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΠΑΒ, ἴση ἔϛαι τῇ βάσει ΔΝ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΝΓΔ. Ἀλλ' ἡ ΔΝ ἐξισȣ̃ται τῇ ΔΜ. Τὸ γὰρ ὀρθογώνιον ΞΚΝ ἐξισȣ̃ται τῷ ἀπὸ τῆς ΚΝ τετραγώνῳ (ὥσπερ δὴ ϗ ἡ πλαγία ΞΝ ἐξισȣ̃ται τῇ παραμέτρῳ ΝΡ) ἢ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Καὶ προσκειμένȣ κοινῇ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνȣ, γίνεται τὸ ὀρθογώνιον ΞΚΝ, σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνῳ, τȣ̃τ' ἔϛι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τετράγωνον (ϛ τȣ̃ ϛ΄.) ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΝ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τετράγωνον ἐϛὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ, τό,τε ἀπὸ ΓΔ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΝ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΝ (47 τȢ Α΄.), ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΜ τετράγωνον ἐϛὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ τετραγώνῳ, ὅθεν ϗ ἡ ΒΠ (= τῇ ΔΝ) ἴση ἐϛὶ τῇ ΔΜ. Καὶ ληφθέντος ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΒΘ τȢ σημείȢ Ι ἀπειράκις ἐγγύτατα τȢ σημείου Β, ἀχθείσης τε τῆς ΗΙΖ παραλλήλως τῇ ΒΔ· ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΙΒΗ, ΒΑΠ ὁμοιότητα (140), ἐϛὶν ὡς ἡ ΙΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ὕτως ἡ ΒΠ πρὸς τὴν ΠΑ, ἢ ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΓΝ, ἔσεται τὸ ὀρθογώνιον ΔΜΖ ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς ΓΝ ϗ τῆς ΙΒ, ἥτις, ἐπεὶ τὰ σημεῖα Ι, Β ὑπετέθη ἀπειράκις ἐγγύτητα, ἐϛὶν ἡ αὐτὴ τῷ ἀπειράκις ἐλαχίϛῳ μορίῳ τῆς παραβολικῆς καμπύλης. Ὥσπερ δὴ ϗ τὸ ὀρθογώνιον ΔΜΖ διὰ τὸ εἶναι τὴν εὐθεῖαν ΟΖ ἀπειράκις ἐγγύτατα τῆς ΔΜ, ἐϛὶ ταὐτὸν σχεδὸν τῷ ὑπερβολικῷ χωρίῳ ΖΜΔΕ. Ἀπειράκις γὰρ ἐλαχίϛῳ χωρίῳ τῷ ΖΟΜ διαφέρει ἀλλήλων. Ἐπεὶ δὲ τȢτο ἀεὶ ὡσαύτως συμβαίνει, δῆλον ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΓΝ ϗ ὅλης τῆς παραβολικῆς καμπύλης ΒΝ, ἴσον ἐϛὶ τῷ συϛοιχȢντι ὑπερβολικῷ χωρίῳ ΓΔΜΝ, ο. ε. δ.

---

140) Ἐπεὶ ὀρθή ἐϛιν ἡ ὑπὸ *ΙΗΒ*, ἔϛι δὴ ϗ ἡ *ΗΙΒ* ἅμα τῇ *ΙΒΗ* ἴση ὀρθῇ· ὀρθὴ δὲ ϗ ἡ *ΠΒΟ*, ἄρα *ΗΙΒ*+*ΙΒΗ*=*ΠΒΟ*=*ΠΒΑ*+*ΙΒΗ*· ἡ ἄρα *ΗΙΒ*= τῇ *ΠΒΑ*· ὀρθαὶ δὲ ϗ αἱ πρὸς τοῖς *Η*, *Α*. τὰ ἄρα *ΗΙΒ*, *ΠΒΑ* τρίγωνα ὅμοια.