ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ΄.

Ὑπερβολῆς ἐὰν κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται ἡ ΑΝΡ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῆς ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς διαμέτρου ΝΞ ἀποληφθῶσιν αἱ ΝΑ, ΝΡ τῇ συζυγεῖ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΒ ἴσαι, ἤτοι ἀφ᾽ ὧν τὰ τετράγωνα ἔσται ἴσα ἑκάτερον τεταρτημορίῳ, τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΞ· καὶ τῆς ὀρθίας ΝΣ περιεχομένου ὀρθογωνίου. Αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΡ, ἐφ᾽ ὅσον ἂν καὶ προαχθῶσιν, ἀεὶ μὲν ἐγγιόν τε προσάγουσι τῇ τομῇ, καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος (ἐλαχίστου) διαστήματος Π, εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα, οὐδαμῇ δ᾽ οὐδέποτε συμπίπτουσι. Καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται εὐθεῖαι ,*ΑΣΥΜΠΤΩΤΟΙ* τῆς Ὑπερβολῆς. Σχημ. 103.

Τετάχθω γὰρ ἐπὶ τὴν διάμετρον τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ ΜΚΥ, καὶ τεμνέτω τὰς εἰρημένας ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Δ, Φ· καὶ ἔσται δηλῶς τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΚ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΝ. Καὶ ἐπεί ἐστι, τὸ μὲν ἀπὸ ΑΝ ἴσον τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ ΞΝΣ, τὸ δὲ ἀπὸ ΓΝ τῷ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ ΞΝ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΚ, οὕτω τὸ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΞΝΣ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΞΝ, ϗ (τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου λόγου τετραπλασιασθέντων) τὸ ὑπὸ ΞΝΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΝ, τοῦτ' ἔστιν (1 τοῦ ϛ'.) ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΣ πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΞ, ἢ (Πορ. ϛ'. τῆς Ε'.) τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΜΚ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΞΚΝ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὅλον τὸ ἀπὸ ΔΚ, πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΓΚ, ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ, ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου, πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΝ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ δευτέρου, ἔστιν ἄρα ϗ ὡς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΜΦ πρὸς λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΓΝ (6 τοῦ Β'. ϗ 19 τοῦ Ε'.) τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΜΦ πρὸς τὸ ἀπὸ σΝ ἐστὶν ἀεὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῷ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΝ. Καὶ τὸ ὑπὸ ΔΜΦ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὶ ΑΝ τοῦτ' ἔστι τῷ ὑπὸ ΑΝΡ. Ἴση γὰρ τῇ ΝΡ ἡ ΑΝ. Καὶ ἔστιν ἄρα (16 τοῦ ϛ'.) ὡς ἡ ΜΦ πρὸς ΝΡ, οὕτως ἡ ΑΝ πρὸς ΔΜ. Ἔστι δὲ ἡ ΜΦ μακρῷ μείζων τῆς δευτέρας ΝΡ, ἄρα ϗ ἡ τρίτη μείζων ἐστὶ τῆς τετάρτης. Ὅθεν ἐπεὶ προαγομένης εἰς ἄπειρον τῆς Ὑπερβολῆς, ἀεὶ μείζων ϗ μᾶλλον μείζων ἡ ΜΦ τῆς ΝΡ καθίσταται, ἄρα ϗ ἡ ΑΝ ἀεὶ μείζων ϗ μᾶλλον μείζων ἀποβαίνει τοῦ διαστήματος ΔΜ, ὅπερ συνεχῶς εἰς ἄπειρον ἀπομειοῦται ὡς μᾶλλον ϗ μᾶλλον εἰς ἄπειρον αὔξει ἡ ΜΦ, ὥστε τὸν λόγον ἐκεῖνον ΑΝ πρὸς ΔΜ δύνασθαι γενέσθαι μείζονα οἱουδήποτε δοθέντος λόγου ΑΝ πρὸς Π, ὥσπερ ὁ λόγος ΜΦ πρὸς ΝΡ δύναται γενέσθαι μείζων τοῦ αὐτοῦ ΑΝ πρὸς ΔΜ. Δύναται γὰρ ἐπ' ἄπειρον αὔξειν ἥτε τῆς Ὑπερβολῆς τεταγμένη ΜΚ, καὶ ἡ τοῦ τριγώνου ΦΚ, καὶ οἱαδήτις αὐτῶν ἑτέρα· καὶ πολλῷ μᾶλλον τὸ αὐτῶν ἄθροισμα ἡ ΜΦ οἱασοῦν δοθείσης μείζων ἔχει ἀποκαθίςασθαι, ἐν μείζονι τοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ν τῆς Ὑπερβολῆς ἀποςήματος. Ἡ ἄρα ΑΓ ἀεὶ ἔγγιον καὶ μᾶλλον ἔγγιον τῆς Ὑπερβολῆς ΝΜ γίνεται. Ὅσῳ ἔλασσον καὶ μᾶλλον ἔλαττον ἀεὶ ἀποβαίνει τὸ ΜΔ ἀπόςημα, (ὅπερ ἔχει ἔλαττον οἱουδήποτε δοθέντος Π ἀποκαθίςασθαι), οὐδαμοῦ δ' οὐδέποτε ταύτῃ συμπίπτει. Τὸ γάρ τοι σημεῖον Μ ἀνάγκῃ πᾶσα τοῦ Δ ὁπωσοῦν ἀφίςασθαι, ἵνα δὴ τὸ ὀρθογώνιον ΔΜΦ ἔχῃ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ ἐξισοῦσθαι, ἢ ἡ ΜΦ ᾖ πρὸς τὴν ΑΝ, ὡς ἡ ΑΝ πρὸς τὴν ΔΜ, ὡς ἤδη δέδεικται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐὰν δὲ αἱ αὐταὶ ἀσύμπτωτοι εὐθεῖαι ἀπέκεινα τῆς πρὸς τῷ Γ γωνίας ἐπὶ τὸ συνεχὲς προσεκβληθῶσιν, εὐθείας τὰς ΞΖ, ΞΧ ἴσας ταῖς προτέραις ΑΝ, ΝΡ ἀπὸ ταῖς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομέναις τῆς ἀντικειμένης τομῆς ἀποτεμοῦσιν. Ὅμοια γὰρ ἔσεται τὰ τρίγωνα ΞΝΓ, ΓΑΝ· εἴγε αἱ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτόμεναί εἰσιν ἀλλήλαις παράλληλοι, καὶ ἡ πλευρὰ ΞΓ ἴση τῇ ΓΝ· ὅθεν καὶ ἡ ΑΝ ἴση τῇ ΞΖ (26 τοῦ Α'.). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται ϗ ἡ ΝΡ ἴση τῇ ΞΧ. Δῆλον ἄρα ὅτι ϗ αἱ ΓΖ, ΓΧ ἀσύμπτωτοι τῆς ἀντικειμένης Ὑπερβολῆς ΖΙ ἀποβαίνωσιν, ἧς περ ἦτε πλαγία ϗ ἡ ὀρθία πλευρά ἐσιν ἡ αὐτή.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ὁποιαδήποτε εὐθεῖα ΒΗ μιᾷ τινι τῶν ἀσυμπτώτων παράλληλος ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΓΡ ἀχθεῖσα, τῇ ὑπερβολῇ συμπεσεῖται. Τὸ γάρ τοι ἀπ' ἀλλήλων τῶν παραλλήλων ἀπόσημα ἀεὶ τὸ αὐτὸ διαμένει, ἐν ᾧ τὸ τῆς Ὑπερβολῆς ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτου ἀείποτε ἔλαττον οἱυδήποτε δοθέντος ἀποκαθίςαται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Πολλῷ μᾶλλον οἱαδήποτε ΒΓ τὴν γωνίαν ΑΓΒ διαιρῦσα τεμεῖ τὴν Ὑπερβολήν. Τὸ γάρ τοι αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτυ διάςημα ἀεὶ ἐπαύξει, ἐν ᾧ τὸ τῆς Ὑπερβολῆς ἀεὶ ἀπομειῦται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Δῆλον ἄρα, ὅτι τὰ ὀρθογώνια ΔΜΦ, δμφ ϗ ΔΥΦ, δυφ, τὰ ὑπὸ τῶν μερῶν, εἰς ἃ τέμνονται ὑπὸ τῆς καμπύλης ϗ τῶν ἀσυμπτώτων αἱ ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμέναι περιεχόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ἕκαςον γὰρ τύτων ἐξισῦται τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΗ΄.

Ἐὰν Ὑπερβολῆς εὐθεῖα οἱαδήτις ἡ ΤΔ Σχημ. 104
κατὰ σημεῖον τὸ Υ ἐφάπτηται ταῖς ἀσυμπτώτοις κατὰ σημεῖα τὰ Τ, Δ συμπίπτουσα, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἀφήν· ἔσαι δηλονότι ἡ ΤΥ ἴση τῇ ΥΔ. Καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσαι τὸ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΙΓΥ, καὶ τῆς ὀρθίας ΥΕ περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Μὴ γὰρ, εἰ δυνατὸν, ἀλλ᾽ ἠλήφθωσαν ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἀφῆς αἱ ΥΘ, ΥΔ, *ἀφ᾽ ὧν ἂν τὰ τρίγωνα ἐξισῶτο τεταρταμορίῳ τοῦ ῥηθέντος ὀρθογωνίου· καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ* ΓΘ, ΓΒ, *ἔσονται κατὰ τὴν προηγουμένην Πρότασιν ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς, ὅπερ ἀδύνατον. Εἰ μὲν γὰρ ἡ* ΓΘ *ἐκτὸς πίπτει τῆς* ΓΤ, *προαχθεῖσα ἐπ᾽ ἄπειρον μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀεὶ αὐτῆς ἀποςήσεται, καὶ οὐδέποτε ἄρα τῇ ὑπερβολικῇ καμπύλῃ ἔγγιον γενήσεται· ὅπερ τῆς ἀσυμπτώτου ἴδιον. Εἰ δέ γε τεθῇ ἐντὸς πίπτειν τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας* ΤΓΔ, *ὡς ἡ σ*Β· *αὕτη δὲ προαχθεῖσα τεμεῖ τὴν Ὑπερβολὴν, κατὰ τὸ* Γ΄. *Πόρισμα τῆς προηγουμένης. Οὐκ ἔσονται ἄρα αἱ* ΓΘ, ΓΒ *ἀσύμπτωτοι*

Αἱ ἄρα ΥΤ, ΥΔ μέρη τῆς ἐφαπτομένης ἀλλ' ὀχὶ ἕτεραι μείζυς ἢ ἐλάσσυς αὐτῶν, τετράγωνον ἴσον τεταρτημορίῳ τῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΓΤ, ϗ τῆς ὀρθίας ΤΕ περιεχομένυ ὀρθογωνίυ περιέξυσιν. Ἴσαι ἄρα ἀλλήλαις αἱ ΥΤ, ΥΔ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Τεταγμένης δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΓΤ τῆς εὐθείας ΛΚΟ παραλλήλυ τῇ ἐφαπτομένῃ ΔΤ, ϗ συμπεσύσης ταῖς ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Π, Σ, τὸ ὀρθογώνιον ΠΛΣ, ἢ τὸ ΠΟΣ ἔσεται ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΥΤ τετραγώνῳ, οἷόν τι δέδεικται ἐν τῇ προηγυμένῃ Προτάσει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἔνθεντοι ϗ αἱ μεταξὺ τῆς καμπύλης ϗ τῶν ἀσυμπτώτων ἀπολαμβανόμεναι ΠΛ, ΟΣ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ϗ ὁποιασδήποτε ἄρα εὐθείας ΠΣ τεμνύσης τὴν καμπύλην ϗ τὰς ἀσυμπτώτυς, τὰ μέρη, ἃ μεταξὺ τῆς καμπύλης ϗ τῶν ἀσυμτώτων ὑπολαμβάνεται, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. Τμηθείσης γὰρ δίχα τῆς ΟΛ κατὰ τὸ Κ, ϗ ἐπιζευχθείσης ἀπὸ τῦ κέντρυ τῆς διαμέτρυ ΓΚ, συμβαλλύσης τῇ Ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Υ, ἀχθεῖσα διὰ τῦ Υ ἡ ΔΥΤ τῇ ΟΛ παράλληλος, ἔσεται ἐφαπτομένη, ϗ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν παρῦσαν Πρότασιν, ϗ τὰ ὀρθογώνια ΠΛΣ, ΠΟΣ ἴσα ἔσαι τῷ ἀπὸ τῆς ΤΥ, ἢ τῆς ΥΔ τετραγώνῳ· ἔνθεντοι τὸ μέρος ΠΛ ἴσον εἶναι δεῖ τῷ μέρει ΟΣ· εἴγε ΣΚ=ΧΠ, ϗ ΟΚ=ΚΛ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

Δῆλον ἄρα ἐκ τῶν ῥηθέντων ἐν τῇ παρέσῃ Προτάσει, ὅτι μοναδικὰς εἶναι δεῖ τὰς ἀσυμπτώτες ΓΥ, ΓΔ, ϗ ἐκ ἔςιν ἑτέρας παρὰ ταύτας ἀσυμπτώτες τῇ αὐτῇ ἀποδῦναι Υπερβολῇ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ.

Ἐὰν εὐθεῖα οἱαδήτις ἡ ΞΘ τέμνῃ τὰς ἀντικειμένας Υπερβολὰς, ταῖς ἀσυμπτώταις κατὰ τὰ σημεῖα, Ζ, Φ, συμπίπτυσα· ἀχθείσης διὰ τῦ κέντρυ τῆς διαμέτρυ ΙΓΥ παραλλήλυ τῇ αὐτῇ ΞΟ, τὸ ὀρθογώνιον ΖΟΦ ἴσον ἔςαι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρυ ΓΥ τετραγώνῳ. Σχημ. 105.

Ἤχθω ἡ ἐφαπτομένη ΤΥΔ, ϗ διὰ τῦ Ο τετάχθω ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΟΛ τῇ ἐφαπτομένῃ ΤΥΔ παράλληλος, ἥτις τεμεῖ τὰς ἀσυμπτώτες κατὰ τὰ σημεῖα Π, Σ. Τύτων δὴ κατασκευαθέντων, ὁ λόγος τῦ ὀρθογωνίυ ΖΟΦ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΣΟΠ, συγκείσεται ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν ΖΟ πρὸς ΟΠ (ὅ ἐςι τῆς ΓΥ πρὸς ΥΤ), ϗ ΦΟ πρὸς ΟΣ (ἤτοι ΓΥ πρὸς ΥΔ). Ἀλλὰ ϗ ὁ λόγος τῦ ἀπὸ τῆς ΓΥ τετραγώνυ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΥΓΔ, ὅ ἐςι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΥΓ τετράγωνον, ἐκ τῶν αὐτῶν σύγκειται λόγων. Ἄρα ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΖΟΦ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΣΟΠ, ὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΓΥ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΥΓ (127). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΣΟΠ ἴσον ἐςι τῷ ἀπὸ ΥΓ (Προτ. προηγ.). Ἄρα ϗ τὸ ὑπὸ ΖΟΦ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΥ τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ὡσαύτως ἀχθείσης ἀπὸ τῦ Ι τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης, ἀπό τε τῦ Ξ τῆς τεταγμένης ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΦΞΖ ἴσον ἐςι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΙ τετραγώνῳ, ὅπερ ἐςιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΥ. Τοιγαρῦν τὰ ὀρθογώνια ΖΟΦ, ΦΞΖ ἔσεται ἀλλήλοις ἴσα, ϗ ἡ εὐθεῖα ΟΦ ἴση τῇ ΞΖ. Ἡ γάρ τοι ἰσότης τῶν ὀρθογωνίων τύτων ἀποδίδωσι τὸν λόγον τῶν πλευρῶν ΖΟ πρὸς ΞΖ ἴσον τῷ λόγῳ τῶν ΞΦ πρὸς ΦΟ (16 τῦ ϛ΄). Ὅθεν συνθέσει ἔσεται ὡς ἡ ΟΞ πρὸς ΞΖ, ὕτως ἡ ΟΞ πρὸς ΦΟ. Τοιγαρῦν αἱ με-

127) Τὸ αὐτὸ δὴ τῦτο συνάγεται, ϗ ἐκ τῆς 23 Ὑποσημειώσεως, εἴγε

$ZO : O\Pi = \Gamma\Upsilon : \Upsilon\Gamma$

$\Phi O : O\Sigma = \Gamma\Upsilon : \Upsilon\Delta$· συνθέσει ἄρα ἔσεται

$Z O \Phi : \Sigma O \Pi = \Gamma\Upsilon^2 : \Upsilon\Gamma\Delta \ (= \Upsilon\Gamma^2)$.

ταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἑκατέρας τῶν Ὑπερβολῶν ἀπολαμβανόμεναι εὐθεῖαι ΞΖ, ΦΟ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. Ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ΟΖ ἴση τῇ ΞΦ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΞΖΟ, ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΞΦΟ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Καὶ ἐπεὶ, ἀχθείσης οἱασδήποτε ἑτέρας οφζξ τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ ΤΙΓ παραλλήλου, ἔσεται τὸ ὀρθογώνιον ζοφ, ἢ φξζ, ἢ τὸ ξζο, ἢ ξφο ἴσον τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ ἀπὸ ΓΙ. Ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν μερῶν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ἃ μεταξὺ ἑκατέρας τῶν Ὑπερβολῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων ἀπολαμβάνεται, περιεχόμενα ὀρθογώνια ΖΟΦ, ζοφ κτ. ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. Καὶ δὴ καὶ τὸ μέρος εξ, ἴσον τῷ μέρει οζ· τό,τε εο, ἴσον τῷ φξ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς Ὑπερβολῆς, ἢ ἐπὶ τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ δύω σημεῖα τυχόντα τὰ Ο, Υ· ἀπ' αὐτῶν δὲ ἀχθῶσιν ἐπὶ μὲν τὴν μίαν τῶν ἀσυμπτώτων εὐθεῖαι δύω ἀλλήλαις παράλληλοι ἡ ΟΣ, ΥΔ· ἐπὶ δὲ τὴν ἑτέραν ἕτεραι δύω αἱ ΟΠ, ΥΤ παράλληλοι ἀλλήλοις καὶ αὗται ἕως τῶν ἀσυμπτώτων αἱ πᾶσαι. Τὸ ὑπὸ τῶν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς τῶν ση- Σχημ. 106. 107.

μείων ἀγομένων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΣΟΠ, ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν ἀγομένων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΟΥ, καὶ ἐκβαλλομένη ἀφ' ἑκάτερα συμπιπτέτω ταῖς ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ σημεῖα Ι, Λ· ἐπεὶ οὖν αἱ μεταξὺ τῆς καμπύλης καὶ τῶν ἀσυμπτώτων ἀπολαμβανόμεναι ΟΙ, ΥΛ ἀλλήλαις ἴσαι (Πορ. Β'. τῆς ΛΗ'. καὶ ΛΘ'.), καὶ δὴ καὶ ἡ ΟΛ ἴση τῇ ΥΙ. Ὡς ἄρα ἡ ΟΛ πρὸς ΥΛ οὕτως ἡ ΥΙ πρὸς ΟΙ. Ἀλλὰ διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΟΠΛ, ΥΤΛ, καὶ ΥΔΙ, ΟΣΙ ὁμοιότητα, ὡς μὲν ἡ ΟΛ πρὸς ΥΛ, οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς ΥΤ· ὡς δὲ ἡ ΥΙ πρὸς ΟΙ, οὕτως ἡ ΥΔ πρὸς ΟΣ· ὡς ἄρα ἡ ΟΠ πρὸς ΥΤ, οὕτως ἡ ΥΔ πρὸς ΟΣ. Καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΣΟΠ ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΥΤ (16 τοῦ ϛ'.) ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Σχημ. 108. Ἐὰν ἀπὸ τῶν τυχόντων σημείων τῆς Ὑπερβολῆς Υ, Ν ἀχθῶσι ταῖς ἀσυμπτώτοις παράλληλοι αἱ ΥΤ, ΥΔ· καὶ ΝΡ, ΝΑ, τὰ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων γενόμενα παραλληλόγραμμα ΡΝΑΓ, ΔΥΤΓ, ἴσα ἀλλήλοις ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὴν παροῦσαν Πρότασιν τὸ ὀρθογώνιον ΡΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΓΥΔ· ἄρα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ΡΗΑΓ, ΔΥΤΓ, ὧν αἱ περὶ τὴν πρὸς τὸ Γ κοινὴν γωνίαν πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν, ἴσα ἐσὶν ἀλλήλοις (128).

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

Α'ρα ϗ τὰ τρίγωνα ΓΡΝ, ΡΥΤ, ἅπερ ἐσὶν ἡμίσεα αὐτῶν τῶν παραλληλογράμμων, ἴσα ἐσὶν ἀλλήλοις.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

Ο''θεν ὁ λόγος τῶν τεταγμένων μὲν ἐπὶ τὴν μίαν τῶν ἀσυμπτώτων, παραλλήλων δὲ τῇ ἑτέρᾳ, τȣτ' ἔςι τῶν ΝΡ, ΥΤ ἐσὶν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῶν αὐτῶν ἀπὸ τȣ κέντρȣ ἀποςάσεως ἀντιπεπονθειῶν ΓΤ, ΓΡ. Ἴσα γάρ ἐσιν ἀλλήλοις ἐκεῖνα τὰ ὀρθογώνια ἢ παραλλόγραμμα, ἢ ϗ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα τρίγωνα, ὧν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν (14 τȣ ϛ'.).

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Δ'.

Α'χθεισῶν τῶν ἐφαπτομένων ΠΝΜ, ΗΤΘ

---

128) Ε'πεὶ ἐςὶν ἐκ τῆς παρȣ́σης Προτάσεως τὸ ὀρθογώνιον $ΡΝΛ = $ τῷ $ΔΥΤ$, ἔσεται (2. μερ. τῆς 16. τȣ ϛ'.) $ΡΝ : ΔΥ = ΥΤ : ΛΝ$· ἢ $ΛΓ : ΓΤ = ΓΔ : ΓΡ$. Καὶ ἐπεὶ ἡ πρὸς τȣ τὸ Γ γωνία ἐςὶ κοινὴ ἑκατέρῳ τῶν παραλληλογράμμων $ΛΡ$, $ΤΔ$· ἄρα (2. μερ. 14. τȣ ϛ'.) τὸ παραλληλόγραμμον $ΛΡ = $ τῷ παραλληλογράμμῳ $ΤΔ$.

ἕως τῶν ἀσυμπτώτων, αἵγε δίχα κατὰ τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς Ν, Τ τμηθήσονται (Προτ. ΛΗ΄.), οἱαδήποτε τρίγωνα ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ϗ τῆς τομῆς ἐγγεγραμμένα τὰ ΓΠΜ, ΓΗΘ ἔσεται ἀλλήλοις ἴσα. Διπλάσια γὰρ ἐςὶ τῶν ἴσων ἀλλήλοις παραλληλογράμμων ΡΝΑ, ΤΤΔ (129) ἢ τετραπλάσια τῶν τριγώνων ΓΝΠ, ΓΤΤ (34 τοῦ Α΄.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄.

Τὰ μικτόγραμμα τετράπλευρα ΡΝΤΤ, ΑΝΤΔ, ἴσα ἐςὶν ἀλλήλοις. Ἴσων γὰρ ὄντων ἀλλήλοις τῶν παραλληλογράμμων ΤΤΔ, ΡΝΑ ἀρ-

---

129) Τὸ τρίγωνον ΓΠΜ=2ΓΡΝΑ=4ΓΝΡ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΝ παράλληλος τῇ ΠΓ, ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΝΑ= τῇ ὑπὸ ΝΠΡ· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ ἡ ὑπὸ ΠΡΝ = τῇ ὑπὸ ΡΓΑ= τῇ ὑπὸ ΜΑΝ. Ἔςι δὲ ϗ ἡ πλευρὰ ΠΝ= τῇ πλευρᾷ ΝΜ, ἄρα τὸ τρίγωνον ΠΝΡ= τῷ ΜΝΑ (26. τοῦ Α΄.) Ἀλλὰ τὸ ΜΝΑ= τῷ ΓΝΑ· ἐσῶν γὰρ τῶν ΝΑ, ΠΓ παραλλήλων, ἐςὶ ΠΝ : ΝΜ= ΓΑ : ΑΜ, ϗ ΓΑ=ΑΜ ὅτι ϗ ΠΝ=ΝΜ. Ὅθεν τὰ τρίγωνα ΓΝΑ, ΜΝΑ, ὄντα ἐπὶ ἴσων βάσεων ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΓΜ, ΡΝ ἐςὶν ἴσα (38. τοῦ Α΄.) Τὰ τρίγωνα ἄρα ΠΝΡ, ΡΝΓ, ΓΝΑ, ΜΝΑ ἴσα ἐςὶν ἀλλήλοις. Τὸ ἄρα ΓΠΜ, ὅπερ ἐξισοῦται τοῖς ἴσοις τουτοισὶ τριγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν, ἔςαι τετραπλάσιον ἑνός τινος τούτων τοῦ ΓΝΡ, ἢ διπλάσιον τοῦ παραλληλογράμμου ΓΡΝΑ· τῇ δ' αὐτῇ ἐφόδῳ δειχθήσεται ϗ τὸ τρίγωνον ΓΗΘ=4ΓΥΤ=2ΓΤΥΔ.

θέντος κοινῆ τȣ̃ ΓΡΧΔ, ἔςαι τὸ ΤΥΧΡ ἴσον τῷ ΑΝΧΔ, ϗ προσκειμένȣ ἑκατέρῳ τȣ́των τȣ̃ ΥΧΝ, τὸ ΡΝΥΤ ἴσον ἐςὶ τῷ ΑΝΥΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄.

Καὶ Ὑπερβολικὸς τομεὺς ΓΥΝ ἐξισȣ̃ται οἱῳδήτινι τῶν εἰρημένων τετραπλεύρων ΝΡΥΤ, ἢ ΑΝΥΔ. Ὄντων γὰρ τῶν τριγώνων ΓΡΝ, ΓΥΤ ἴσων ἀλλήλοις (Πορ. Β΄.) ἀρθέντος ἑκατέρωθεν τȣ̃ τριγώνȣ ΓΡΦ, ἔσεται τὸ τραπέζιον ΥΤΡΦ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΦΓΝ, ϗ προσκειμένȣ τȣ̃ τριπλεύρȣ ΥΦΝ, γίνεται ὁ τομεὺς ΥΓΝ ἴσος τῷ ΡΝΥΤ, ἢ τῷ αὐτȣ̃ ἴσῳ ΑΝΥΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ΄.

Ἐὰν μεταξὺ δυεῖν Ὑπερβολῶν ΝΥ, ΘΗ μὴ κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὦσιν ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΖ, ΓΤ, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΑΓΤ, ΤΓΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιȣ̃σαι. Παράλληλοι δὲ τῇ μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων αἱ ΝΗ, ΥΘ τέμνωσι τὰς καμπύλας ταύτας. Αὗται δὲ αἱ τέμνȣσαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ τὰ σημεῖα Ρ, Τ τμηθήσονται. Σχημ. 109.

Ταχθεῖσαι γὰρ ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΓΤ αἱ εὐθεῖαι ΝΡ, ΥΤ, ἔσονται ἐν λόγῳ ἀντιπεπόνθότι τῶν αὐτῶν ἀπὸ τῦ κέντρυ Γ ἀποςάσεων ΓΤ, ΓΡ (Πορ. Γ΄. τῆς Μ΄.). Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ εἰσὶ ἢ αἱ τεταγμέναι ΗΡ, ΘΤ. Ὡς ἄρα ἡ ΝΡ πρὸς ΥΤ, οὕτως ἡ ΗΡ πρὸς ΘΤ. Ἐναλλάτσοντι δὲ ὡς ἡ ΝΡ πρὸς ΗΡ, ὕτως ἡ ΥΤ πρὸς ΘΤ.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Α΄.

Ὅθεν τὸ τετράπλευρον ΡΝΥΤ πρὸς τὸ τετράπλευρον ΗΡΤΘ, ἔσεται ἀεὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τῷ τῆς ΝΡ πρὸς τὴν ΡΗ. Πᾶσαι γὰρ αἱ ἑκατέρωθεν παρὰ τὰς ΝΡ, ΡΗ τεταγμέναι εἰσὶν ἀεὶ ἐν λόγῳ δοθέντι (12 τῦ Ε΄.)

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Β΄.

Καὶ ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὸ κέντρον Γ τῶν εὐθειῶν ΝΓ, ΥΓ ἢ ΘΓ, ΗΓ, ἔσονται ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἢ οἱ τομεῖς ΟΓΛ, ΗΓΘ, ὡς ἴσοι τοῖς ῥηθεῖσι τετραπλεύροις (Πορισ. ς΄. τῆς προηγουμένης).

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν σημείων Ν, Η ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν Ὑπερβολῶν ἕως τῶν ἀσυμπτώτων προεκβαλλόμεναι, ὕσης τῆς ΝΗ παραλλήλυ τῇ ἀσυμπτώτῳ ΑΓΖ. Αἱ ἐφαπτόμεναι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Τ τῆς ἑτέρας ἀσυμπτώτου ἀλλήλαις συνελεύσονται. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΖΗ ἐστιν ἴση τῇ ΗΤ, καὶ ἡ ΓΡ ἴση ἔσται τῇ ΡΤ (ὄντων γὰρ τῶν εὐθειῶν ΖΓ, ΗΡ παραλλήλων, ἐστὶ ΖΗ : ΗΤ = ΓΡ : ΡΤ). Καὶ προσέτι ἐπεὶ ἡ ΑΝ ἐστιν ἴση τῇ ΝΤ, ἴση ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΓΡ τῇ αὐτῇ ΡΤ. Ἑκατέρωθεν ἄρα ἡ ΡΤ ἀποφέρεται ἴση τῇ ΓΡ. Τὸ σημεῖον ἄρα Τ, καθ' ὃ αἱ δύω ἐφαπτόμεναι συνέρχονται ἀλλήλαις, ἕν ἐστι καὶ ταὐτόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Τ τῆς μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν ὑπερβολῶν αἱ ΤΗΖ, ΤΝΑ, ἡ ἐπιζευγνῦσα τὰ τῆς ἀφῆς σημεῖα Ν, Η, ἔσεται τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΑΓΖ παράλληλος. Ἑκατέρα γὰρ τῶν ἐφαπτομένων τούτων δίχα τέτμηται κατὰ τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς Ν, Η. Ὅθεν αἱ πλευραὶ ΤΖ, ΤΑ ἀνάλογον τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐκείνης ΗΝ. Ἔστιν ἄρα ἡ ΗΝ παράλληλος τῇ βάσει ΑΖ (2 τοῦ ς'.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.

Τὰ δ' αὐτῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς ἐγγεγραμμένα τρίγωνα ΓΑΤ, ΓΤΖ ἔσεται ἀεὶ ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ ΝΡ πρὸς ΡΗ. Ὄντα γὰρ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἔσεται πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ΓΑ, ΓΖ (1 τ8 ϛ΄.), αἵτινές εἰσιν ὡς αἱ ΝΡ, ΡΗ (Πορ. 2 τῆς 4 τ8 ϛ΄.). Τὸ αὐτὸ δὴ τ8το συμβαίνει κἀν τοῖς μὴ ἐν τῷ αὐτῷ σημείῳ συνερχομένοις τριγώνοις. Τὰ γὰρ ἐν οἱῳδήποτε ἀσυμπτωτικῷ χωρίῳ τῆς αὐτῆς Υ῾περβολῆς, ὑπὸ τῶν αὐτῆς ἐφαπτομένων ἐγγεγραμμένα τρίγωνα, ἴσα ἐςιν ἀλλήλοις (Πέρισμ. Δ. τῆς Μ΄.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ΄.

Σχημ. 110. 111. Ε᾿ὰν περὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ΗΙ, ἥτις ἐςὶ συζυγὴς τῇ πρώτῃ πλαγίᾳ ΝΞ, γραφῶσι δύω ἀντικείμεναι Υ῾περβολαὶ αἱ ΗΚ, ΙΕ, ὧν ἀμοιβαδὸν δευτέρα διάμετρος ἔςω ἡ ΝΞ, αἱ τῶν τεσσάρων τ8των τομῶν ἀσύμπτωτοι ἔσονται κοιναί.

Α᾿χθεισῶν τῶν ἐφαπτομένων ΝΤ, ΙΤ, αἵτινες συμβαλ8σίτε ἀλλήλαις κατὰ τὸ Τ, ϗ ἔσονται ταῖς ἐπὶ τὰς διαμέτρ8ς ΝΞ, ΗΙ τεταγμέναις παράλληλοι, ἑπομένως δὲ ϗ ταῖς συζυγέσιν ἡμιδιαμέτροις ΓΙ, ΓΝ. Ε᾿πιζευχθεῖσα ἡ ΓΤ, ἔσεται κοινὴ ἀσύμπτωτος ἑκατέρᾳ τῶν Υ῾περβολῶν ΝΤ, ΙΕ. Ε᾿πεὶ γὰρ τὸ σχῆμα ΓΝΤΙ ἐςὶ παραλληλόγραμμον, τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΙ, τ8τ᾿ ἔςι τῷ τετάρτῳ τ8 ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΞΝ ϗ τῆς κατ᾿ αὐτὴν ὀρθίας περιεχομένου ὀρθογωνίου. Ὡσαύτως ἡ ἐφαπτομένη ΙΤ, ἥτις ἐστιν ἴση τῇ συζυγεῖ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΝ τῆς ἑτέρας Ὑπερβολῆς, περιέχει τετράγωνον ἴσον τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΗΙ καὶ τῆς αὐτῇ συστοιχούσης ὀρθίας περιεχομένου ὀρθογωνίου. Ὡσαύτως ἀχθείσης τῆς ΗΑ, ἥτις ἀφάπτοιτο τῆς ἑτέρας ἀντικειμένης Ὑπερβολῆς ΗΚ, καὶ προαχθείσης τῆς ἐφαπτομένης ΤΝ, ἕως οὗ συμπέσῃ τῇ ΗΑ κατὰ τὸ Α, τὸ σχῆμα ΗΑΝΓ ἔσται παραλληλόγραμμον, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΑ, ΗΑ ἔσονται ἴσαι ταῖς συζυγέσιν ἡμιδιαμέτροις ΓΗ, ΓΝ ὡς ἀντικειμέναις πλευραῖς ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ. Ὅθεν ἀχθεῖσα καὶ ἡ ΓΑ, ἔσεται κοινὴ ἀσύμπτωτος ἑκατέρᾳ τῶν Ὑπερβολῶν ΥΝ, ΚΗ (Προτ. ΛΖ΄.). Ἔνθεντοι αἱ ΤΓΧ, ΑΓΖ εἰσὶ κοιναὶ ἀσύμπτωτοι τούτων τῶν τεσσάρων Ὑπερβολῶν. Αἵγε πρὸς ἀλλήλαις καλεῖσθων συζυγεῖς, ἢ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι (130).

---

130) Ἐπεὶ δέδεικται ἡ *ΑΝ=ΗΓ=ΓΙ=ΝΤ*, ἄρα ὥσπερ τὸ ἀπὸ τῆς *ΝΤ* τετράγωνον ἐστιν ἴσον τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας *ΝΞ* καὶ τῆς κατ᾽ αὐτὴν παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου, οὕτω δὴ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΝ* ἔσται ἴσον τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας *ΞΝ*, καὶ τῆς κατ᾽ αὐτὴν παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου. Ἄρα αἱ *ΓΠ*, *ΓΑ* ἔσονται ἀσύμπτωτοι τῆς Ὑπερβολῆς *ΝΥ* (*ΛΖ΄*. Προτασ.). Ὡσαύτως ἐπεὶ *ΗΑ=ΓΝ=ΓΞ=ΗΧ*· ἄρα ὡς $ΗΑ^2=ΓΝ^2=$ τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας *ΗΙ* καὶ τῆς κατ᾽ αὐτὴν παραμέτρου περιεχομένου ὀρθο-