ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΣ, ΣΙ, ΥΙ, ἅμα ληφθέντα, ἐςὶν ἴσα τουτοισὶ τοῖς τετραγώνοις ἀνὰ δύω ὁμȣ̃ ληφθεῖσιν, ϗ̀ ἑπομένως εἴσιν ἀεὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ μεγέθȣς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ΄.

Σχημ. 68. 69. Ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΜΕΒ, ΜΥΒ, ἃς αἱ ἀφ᾽ ἑκατέρων τῶν Ἑςιῶν ἐπὶ δύω σημεῖα Β, Μ, τῆς καμπύλης προσκεκλιμέναι εὐθεῖαι περιέχȣσιν· ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως ἡ αὐτῶν διαφορά ἐςι διπλασία τῆς γωνίας ΜΛΒ, ἣν αἱ ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Β, Μ ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι περιέχȣσιν.

Ἡ γὰρ ὑπὸ ΜΕΚ γωνία ἐςὶν ἴση ταῖς δυσὶν ἐντὸς ΜΥΕ, ΕΜΥ ἅμα ληφθείσαις, ϗ̀ προκειμένης κοινῆ τῆς ΜΥΕ, ἔσονται αἱ ΜΕΚ, ΜΥΕ ἅμα ληφθεῖσαι ἴσαι τῇ δὶς ὑπὸ ΜΥΕ σὺν τῇ ἁπλῶς ὑπὸ ΕΜΥ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΥΜΘ ἐςὶν ἴση τῇ ὑπὸ ΘΜΕ (Προτ. Κ΄.), ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΜΥ ἐςὶν ἴση τῇ δὶς ὑπὸ ΥΜΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΕΚ, ΜΥΕ ἅμα λη-

---

μερῶν ΥΞ, ΕΞ· τετράγωνα ἐξισȣ̃νται τοῖς ἀπὸ τῶν ΥΞ ΥΝ, ἢ τῶν ΝΕ, ΝΥ ἢ τῶν ΝΕ, ΕΞ τετραγώνοις. Ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἐπεὶ ἐςὶν $ΕΝ=ΥΞ$, προσκειμένης κοινῆς τῆς ΞΝ, ἔσεται $ΕΞ=ΥΝ$, ϗ̀ $ΕΞ^2=ΥΝ^2$.

φθεῖσαι ἐξισοῦνται τῇ δὶς ὑπὸ ΜΥΕ σὺν τῇ δὶς ὑπὸ ΥΜΘ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΜΥΕ, ΥΜΘ, ἐξισοῦνται τῇ ὑπὸ ΜΘΕ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΜΕΚ σὺν τῇ ὑπὸ ΜΥΕ ἐξισωθήσεται τῇ δὶς ὑπὸ ΜΘΕ. Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΚΕ σὺν τῇ ὑπὸ ΒΥΕ ἴση τῇ δὶς ὑπὸ ΒΗΕ· ἄρα ἡ ὅλη γωνία ΜΕΒ σὺν ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΜΥΒ, ἐξισοῦται τῇ δὶς ὑπὸ ΜΘΕ ἢ ΗΘΛ σὺν τῇ δὶς ὑπὸ ΒΗΕ ἢ ΛΗΘ, αἵτινες ἐξισοῦται τὸ διπλοῦν τῆς ἐκτὸς γωνίας ΜΛΒ τῆς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης· (μέρ. 1 τῆς 32 τοῦ Α΄.).

Ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως ἐπεὶ ἡ γωνία ΘΜΕ ἢ ΥΜΙ (Προτ. Κ΄.) ἐξισοῦται τῆς ὑπὸ ΜΘΥ σὺν τῇ ὑπὸ ΜΥΕ, προσκειμένης ἄρα κοινῇ τῆς ΜΘΥ, ἔσεται ἡ ὑπὸ ΘΜΕ σὺν τῇ ὑπὸ ΜΘΥ, ὅ ἐστιν ἡ ἐκτὸς ΜΕΥ (μέρ. 1 32 τοῦ Α΄.) ἴση τῇ ΜΝΕ σὺν τῇ δὶς ὑπὸ ΜΘΥ. Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ΒΕΥ ἴση τῇ ὑπὸ ΒΥΕ σὺν τῇ δὶς ὑπὸ ΒΗΕ ἢ ΘΗΛ. Ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΜΕΒ ἐξισοῦται ὅλῃ τῇ ΜΥΒ σὺν τῇ δὶς ὑπὸ ΜΛΒ ἤ τινι ὡς ἐκτὸς οὔσῃ ἐξισοῦνται αἱ ὑπὸ ΜΘΥ καὶ ΘΗΛ. Ἡ ὑπεροχὴ ἄρα, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑπὸ ΜΕΒ τῆς ὑπὸ ΜΥΒ, ἐξισοῦται τῇ δὶς ὑπὸ ΜΛΒ τῇ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένῃ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Ἐὰν ἀπὸ μὲν τῆς Ἑστίας ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΜΕΥ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Μ, Υ, αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΖ, ΤΖ συμβάλλουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ζ, ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΜΖΤ ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς ἔσεται ἀεὶ ἀμβλεῖα, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως ἀεὶ ὀξεῖα. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ τῶν κλώνων ἐπ' εὐθείας πρὸς τῇ Ἑστίᾳ ἀλλήλοις συνελθόντων ϗ τῆς ΕΚ περιεχόμεναι γωνίαι ΜΕΚ, ΚΕΤ ἐξισοῦνται δυσὶν ὀρθαῖς, τὸ ἥμισυ ἄρα τῆς ὑπὸ ΜΕΤ ἡμισείᾳ ὀρθῇ ἐξισωθήσεται. Ἐνθεντοι τὸ μὲν ἡμιάθροισμα τῶν γωνιῶν ΜΕΤ, ΜΥΤ μεῖζον ἔσαι ὀρθῆς· ἡ δὲ ἡμιδιαφορὰ τῶν αὐτῶν ὀρθῆς ἐλάττων· ἡ γωνία ἄρα ΜΖΤ, ἥτις ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς ἐξισοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν γωνιῶν ΜΕΤ, ΜΥΤ, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως τῇ ἡμιδιαφορᾷ τῶν αὐτῶν, ἔσεται ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς ἀεὶ ἀμβλεῖα, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως ἀεὶ ὀξεῖα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ΄.

Σχημ. 70. **Τὸ τῶν Ἑσιῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόσημα ΕΥ**
71. **ἔσι μέση ἀνάλογον τῆς τε πλαγίας πλευρᾶς ΞΝ ϗ τῆς ΞΘ, ἥτις ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς ἐσιν ἄθροισμα τῆς πλαγίας ϗ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΗ· ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως διαφορὰ τῶν αὐτῶν.**

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΞΕΝ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐσὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ συζυγοῦς ἡμιάξονος ΓΒ τετραγώνῳ, (Προτ. Κ΄.) τοῦτ' ἔσι τεταρτημορίῳ τῷ ὑπὸ τὴν τῆς πλαγίας πλευρᾶς ϗ τῆς ὀρθίας περιεχομένȣ ὀρθογωνίȣ ΞΝΗ (τὸ γὰρ ἀπὸ ΑΒ ὅπερ ἐςὶ τετραπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ ΓΒ, ἔςιν ἴσον τῷ ὑπὸ ΞΝΗ), ἢ τȣ̃ ὑπὸ ΞΝΘ τεθείσης τῆς ΝΘ ἴσης τῇ ΝΗ. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς προςεθῇ ἑκατέρῳ τὸ ἀπὸ τȣ̃ πλαγίȣ ἡμιάξονος ΓΝ τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως ἀφαιρεθῇ ἑκάτερον ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ τετραγώνȣ ΓΝ, ἀποφέρεται τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τετράγωνον ἴσον ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς τῷ ἀθροίσματι τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνȣ ϗ τȣ̃ τεταρτημορίȣ τȣ̃ ὑπὸ τῶν ΞΝΘ ὀρθογωνίȣ· ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως τῇ διαφορᾷ τῶν αὐτῶν (93), καὶ τῶν ὅρων ἁπάντων τετραπλασιασθέντων ἔσεται τὸ ἀπὸ τȣ̃ τῶν Ἑςιῶν ἀποςήματος ΕΤ τετράγωνον ἴσον, ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς τῷ ἀθροίσματι τȣ̃ ἀπὸ τῆς ΞΝ τετραγώνȣ ϗ τȣ̃ ὑπὸ τῶν ΞΝΘ ὀρθογωνίȣ, τȣ̃τ᾽ ἔςι τῷ ὑπὸ τῶν ΝΞΘ ὀρθογωνίῳ (3 τȣ̃ Β΄.) ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως τῇ διαφορᾷ τῶν αὐτῶν (ἤτοι τῷ $ΞΝ^2 - ΞΝΘ$) τȣ̃τ᾽ ἔςι τὸ ὑπὸ τῶν ΝΞΘ ὀρθογώνιον (2 τȣ̃ Β΄.) ἄρα τὸ τῶν Ἑςιῶν ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόςημα, τȣ̃τ᾽ ἔςιν ἡ ΕΤ ἔςι μέση ἀνάλογον

---

93) Ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐπεὶ ἐςὶ $ΞΕΝ + ΓΝ^2 = ΓΕ^2$ · (6. τȣ̃ Β΄.), ἔσεται δὴ $ΓΝ^2 + \frac{1}{4}ΞΝΘ = ΓΕ^2$ · εἴγε τὸ ὀρθογώνιον $ΞΕΝ = \frac{1}{4}ΞΝΘ$· ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως, ἐπεὶ ἐςὶ $ΞΕΛ + ΓΕ^2 = ΓΝ^2$ · (5. τȣ̃ Β΄.) ἔσεται $ΓΕ^2 = ΓΝ^2 - ΞΕΛ = ΓΝ^2 + \frac{1}{4}ΞΝΘ$.

(2 μέρ. 17 τῦ ϛ΄.) τῆς τε πλαγίας πλευρᾶς ΞΝ, ϗ τῆς ΞΘ, ἥτις ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς ἐϛιν ἄθροισμα τῆς πλαγίας ΞΝ, ϗ τῆς ὀρθίας ΝΗ, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως διαφορὰ τῶν αὐτῶν.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῦ συζυγῦς ἄξονος ΑΒ τετράγωνον, ἐϛιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΞΝΗ, ἢ τῶν ΞΝΘ ὀρθογωνίῳ (μετὰ τὸ Β΄. Πόρισμα τῆς ΙΒ΄.) καὶ τὸ ἀπὸ τῦ τῶν Ἑϛιῶν ἀποϛήματος ΕΥ τετράγωνον δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΝΞΘ ὀρθογωνίῳ, ἔσεται δὴ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΥ, ὕτω τὸ ὑπὸ ΞΝΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΞΘ, τῦτ᾽ ἔϛιν ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΘ (=ΝΗ) πρὸς τὴν ΞΘ, ἥτις ἐπὶ μὲν τῆς Ὑπερβολῆς ἐϛιν ἄθροισμα τῆς πλαγίας, ϗ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, ἐπὶ δὲ τῆς Ἐλλείψεως διαφορὰ τῶν αὐτῶν. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ (ἤτοι ὡς ἡ ΝΘ πρὸς τὴν ΞΘ) ἔσεται ὡσαύτως ϗ τὸ ἀπὸ τῦ συζυγῦς ἡμιάξονος ΓΒ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῦ τῆς Ἑϛίας ἀπὸ τῦ κέντρυ Γ ἀποϛήματος ΓΕ ἢ ΓΥ τετράγωνον, εἰλημένου δηλονότι τῦ τεταρτημορίου τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΕΥ τετραγώνων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ΄.

Σχημ. 72. 73. Ἐν τῇ Ὑπερβολῇ ϗ Ἐλλείψει ἐὰν ἀφ᾽ οἱυδήποτε τῆς καμπύλης σημείυ Ρ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ἡ ΡΘ, συμβάλλουσα ταῖς δυσὶ συζυγέσιν ἡμιδιαμέτροις, ΓΝ, ΓΑ κατὰ τὰ σημεῖα Θ, Μ, τὸ ὑπὸ τῶν μερῶν τῆς ἐφαπτομένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΘΡΜ, ἔσεται ἴσον τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ τῆς ἀφῆς σημείου διαμέτρου ΡΣ, καὶ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἢ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ἠγμένης ἡμιδιαμέτρου ΓΗ, ἥτις ἐστὶ συζυγὴς τῇ διαμέτρῳ ΡΣ.

Ἤχθω γὰρ ἐν τῇ αὐτῇ Ἐλλείψει, ἢ ἐν τῇ συζυγεῖ Ὑπερβολῇ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΗΚ, καὶ τετάχθωσαν ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ διάμετρον, αἱ ΗΕ, ΡΖ. ἐπὶ δὲ τὴν ΞΝ, αἱ ΗΙ, ΡΟ, καὶ δὴ καὶ ἡ ΑΛ ἐπὶ τὴν ΓΗ, ἥτε ΑΔ, ἐπὶ τὴν ΓΡ (καὶ ἔσεται τὰ σχήματα ΙΗΕΓ, ΓΑΛΔ, ΓΖΡΟ παραλληλόγραμμα. Καὶ δὴ καὶ (34 τοῦ Α'.) τὸ τρίγωνον ΗΙΓ= τῷ ΗΕΓ, τό,τε ΑΛΓ=τῷ ΑΔΓ, καὶ τὸ ΓΡΖ= τῷ ΓΡΟ.). Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΓΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΓΑ, ἢ ἡ ΓΑ πρὸς ΓΕ (94), ἔ-

94) *Ὅτι μὲν ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐστὶν ὡς ΚΓ : ΓΑ= ΓΑ : ΓΗ καταφαίνεται ἐκ τοῦ ΙΑ'. Πορίσματος τῆς Θ'. Ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ τοῦτο συμβαίνει κἀν τῇ Ἐλλείψει, δη-*

σεται τὸ τρίγωνον ΗΓΕ, ἴσον τῷ ΑΓΛ (15 τοῦ ς'.)· ὅθεν καὶ τὸ ΗΓΙ ἐξισωθήσεται τῷ ΑΔΓ. Ὡσαύτως ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς ΓΑ, ἢ ἡ ΓΑ πρὸς ΓΕ (95)· καὶ δὴ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἴσον τῷ ΡΓΖ (διὰ τὴν αὐτὴν) ἢ τῷ ΡΓΟ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΗΓΙ, ἴσον τῷ ΡΓΟ. Ἀλλ' ὡς τὸ τρίγωνον ΘΟΡ πρὸς τὸ ΡΓΟ, οὕτως ἡ ΘΟ πρὸς ΟΓ (1 τοῦ ς'.), τοῦτ' ἔστιν ἡ ΘΡ πρὸς ΡΜ, ἤτοι ἡ ΓΖ πρὸς ΖΜ, ἢ καὶ τὸ τρίγωνον ΡΖΓ πρὸς τὸ ΡΜΖ (διὰ τὴν αὐτὴν). Ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΘΡΟ πρὸς ΗΓΙ (ἴσον τῷ ΡΓΟ) οὕτω τὸ αὐτὸ ΗΓΙ (ὅπερ ἐξισοῦται τῷ ΡΓΖ, ἢ τῷ ΑΔΓ) πρὸς τὸ ΡΜΖ· καὶ ἔστι δὴ τὰ τρίγωνα ΘΡΟ, ΗΓΙ, ΡΜΖ ὅμοια, ὧν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΘΡ, ΓΗ, ΡΜ ἀνάλογον ἔσονται (96). Διὰ δὴ τοῦτο τὸ ὀρθογώνιον ΘΡΜ ἐξισοῦται τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ, ἤτοι τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΡΣ καὶ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου.

λου ἐκ τούτου· ἔστι γὰρ ἐκ τῆς δείξεως τῆς ΙΗ'. τὸ ὑπὸ $K\Gamma E=\Gamma A^2$. Ὅθεν $K\Gamma : \Gamma A=\Gamma A : \Gamma E$ (17. τοῦ ς'.) εἰσὶν ἄρα ἔν τε τῇ Ὑπερβολῇ καὶ τῇ Ἐλλείψει αἱ ΚΓ, ΓΑ, ΓΕ, συνεχῶς ἀνάλογον.

95) Ἐπεὶ γὰρ ἐκ τῆς δείξεως τῆς ΙΗ'. ἐστὶ τὸ $M\Gamma Z=\Gamma A^2$, ἔσεται δὴ $M\Gamma : \Gamma A=\Gamma A : \Gamma Z$.

96) Ἐπεὶ αἱ ΘΡ, ΓΗ εἰσὶ παράλληλοι, τὰ τρίγωνα ἄρα ΘΡΟ, ΗΙΓ, ὅμοια· ὅθεν ἔσεται $\Theta PO : HI\Gamma=\Theta P^2 : \Gamma H^2$. Ὡσαύτως ἐπεὶ τὰ τρίγωνα ΗΙΓ, ΡΜΖ

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

Κύκλυ περὶ τὸ τρίγωνον ΓΜΘ περιγραφέντος, ἕ ἡ περιφέρεια τεμεῖ τὴν ΓΡ κατὰ τὸ Π, ἔσεται ἡ ΠΡ ἡμίσεια τῆς τῇ διαμέτρῳ ΣΡ ἀνηκέσης ὀρθίας πλευρᾶς. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὀρθογώνιον ΘΡΜ ἐξισῦται τῷ ΓΡΠ (36 τῦ Γ'. ϗ Πορ. 1 τῆς αὐτῆς). Τὸ ἄρα ΓΡΠ ὀρθογώνιον ἔσεται τεταρτημόριον τῦ ὑπὸ τῆς ΡΣ, ϗ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρυ περιεχομένυ ὀρθογωνίυ, ἤτοι τῦ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΡ ϗ τῆς ἡμιπαραμέτρυ, ἥτις ἔσεται ἡ ΠΡ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐὰν δὲ ὁ κύκλος ὗτος ἐν τῷ Ὑπερβολικῷ σχήματι μὴ τέμνῃ τὴν ἡμιδιάμετρον ΓΡ, ἀλλ' ἐ-

---

εἰσὶν ὅμοια· ἔσεται $H I \Gamma : P M Z = \Gamma H^2 : P M^2$. Τοιγαρῦν ἐπεί ἐςι $\Theta P O : H Z \Gamma = H I \Gamma : P M Z$, ἔσεται δὴ $\Theta P^2 : \Gamma H^2 = \Gamma H^2 : P M^2$· καὶ ἡ $\Theta P : \Gamma H = \Gamma H : P M$.

97) *Λῆμμα.* Ἐὰν δύω εὐθεῖαι $E Y$, $P M$ ὕτω τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ, ὡς εἶναι $E\Theta \times \Theta Y =$ $M\Theta \times \Theta P$, κύκλος διὰ τῶν σημείων Y, P, M, E δύναται διελθεῖν. Κύκλος γὰρ διὰ τριῶν σημείων δοθέντων τῶν M, E, P κατὰ τὴν 5 τῦ Δ. καταγραφεὶς ὗτος ϗ διὰ τῦ Y διελεύσεται. Μὴ γάρ· ἀλλὰ διελθέτω εἰ δυνατὸν, διὰ τῦ K ἐκτὸς τῦ Y, ἢ διὰ τῦ κ ἐντὸς τῦ Y ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Θ· ϗ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ πτώσει ἔσεται τὸ ὑπὸ $E\Theta K =$ τῷ ὑπὸ $M\Theta P$ (35 τῦ Γ'.) Ἔςι δὲ ἐξ ὑποθέσεως ϗ τὸ ὑπὸ $E\Theta Y =$ τῷ ὑπὸ $M\Theta P$· ἄρα $E\Theta \Psi$ $= E\Theta K$, ϗ ἐπομένως $\Theta Y = \Theta K$, ὅπερ ἄτοπον. Ἐν δὲ τῇ

Σχημ. 11. τῶν ὑποθ.

φάπτηται αὐτῆς συμπίπτοντος τȣ̃ σημείου Π τῷ Γ, ὅτε δὴ ϗ ἡ ΠΡ ἔσεται ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΡ. Τότε δὴ ἡ Ὑπερβολὴ ἔσεται ἰσοσκελής, ὄντος τȣ̃ ἡμίσεος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἴσȣ τῷ ἡμίσει τῆς πλαγίας διαμέτρȣ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ΄.

Σχημ. 74. 75. Αἱ ἀπὸ τῶν Ἑσιῶν ἐφ᾽ οἱονδήποτε σημεῖον Ρ τῆς ἐλλειπτικῆς ἢ ὑπερβολικῆς καμπύλης κεκλιμέναι εὐθεῖαι, περιέξουσιν ὀρθογώνιον τὸ ΥΡΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς τῇ διὰ τοῦ Ρ ἀχθείσῃ διαμέτρῳ ΡΣ συζυγȣ̃ς ἡμιδιαμέτρȣ ΓΗ τετραγώνῳ, ἢ τεταρτημορίῳ τȣ̃ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΡΣ, ϗ τῆς αὐτῇ ἀνηκȣ́σης ὀρθίας περιεχομένȣ ὀρθογωνίȣ.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς ἐφαπτομένης ΡΘ, ἥτις συμβαλεῖ τῷ μὲν ἄξονι ΞΝ κατὰ τὸ Θ, τῷ δ᾽ ἑτέρῳ συζυγεῖ κατὰ τὸ Α, ϗ τῇ ἀπὸ τȣ̃ κέντρου παρὰ τὴν ΥΡ ἠγμένην ΓΙ κατὰ τὸ Ι, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΙ, ἔσεται αὐτῇ τῇ ἐφαπτομένῃ κάθετος (Πορ. Γ΄. τῆς ΚΑ΄.) Ἔνθεντοι ἐπεὶ αἱ γωνίαι ΕΙΜ,

δευτέρα ἔσεται τὸ ὑπὸ $E\Theta\kappa = M\Theta P = E\Theta\Upsilon$, ϗ ἡ $\Theta\kappa = \Theta\Upsilon$· τὸ μέρος τῷ ὅλῳ· διελεύσεται ἄρα διὰ τȣ̃ Υ.

ΜΓΕ εἰσὶν ὀρθαὶ, κύκλος ἄρα ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΜΕ καταγραφεὶς, διὰ τῶν σημείων Μ, Ι, Ε, Γ, διελεύσεται (Σημ. 86)· ὅθεν τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΓ ἔσεται ἴσον τῷ ΙΘΜ (Πορ. 1 36 τοῦ Γ΄.), ϗ ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΜ, οὕτως ἡ ΙΘ πρὸς ΘΓ (2 μέρ. 16 τοῦ ϛ΄.) ἢ ἡ ΡΘ πρὸς ΘΥ διὰ τὸ εἶναι παραλλήλους τὰς ΓΙ, ΥΡ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΕΘΥ ἔσεται ἴσον τῷ ΜΘΡ (1 μέρ. τῆς αὐτῆς 36), ὅθεν ϗ διὰ τῶν σημείων Υ, Ρ, Μ, Ε κύκλος δύναται διελθεῖν (Σημ. 16 ἐν τῇ Ἐλλείψ. ϗ 97 ἐν τῇ Ὑπερβολ.) καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΕΜΡ ἴση τῇ ΘΥΡ. Ἔσεται γὰρ ἐν μὲν τῷ 75 σχήματι, ἑκατέρα ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι· ἐν δὲ τῷ 74, ἑκατέρα ἅμα τῇ ΕΥΡ (ἥτις τῇ μὲν, ἐστὶν ἀπεναντίον, τῇ δὲ, ἐφεξῆς (98) δυσὶν ὀρθαῖς ἴση. Ἔστι δὲ ϗ ἡ ὑπὸ ΕΡΜ ἴση τῇ ΥΡΘ (Προτ. Κ΄.) ἄρα τὰ τρίγωνα ΕΜΡ, ΘΥΡ ἐστὶν ἰσογώνια ϗ ὅμοια (Πορ. Θ, μέρ. 1. 32 τοῦ Α΄.) Ὅθεν ὡς ἡ ΕΡ πρὸς τὴν ΡΜ, οὕτως ἡ ΘΡ πρὸς τὴν ΡΥ, ϗ τὸ ὀρθογώνιον ΕΡΥ ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ ΘΡΜ· ἀλλὰ τὸ ΘΡΜ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ, ἥτις ἐστὶ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος

98) *Ἐν τῷ 74 σχήματι, ἐπεὶ τὸ τετράπλευρον ΜΕΡ κύκλῳ δύναται ἐγγραφῆναι, ἔσεται δὴ ἡ γωνία ΕΜΡ ἅμα τῇ αὐτῆς ἀπεναντίον ΕΥΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση (22. τοῦ Γ΄.) Ἔστι δὲ ϗ ἡ ΘΥΡ ἅμα τῇ ΕΥΡ ἴση δυσὶν ὀρθαῖς· ἄρα ΕΜΡ+ΕΥΡ=ΘΥΡ+ΕΥΡ, ἤτοι ΕΜΡ=ΘΥΡ.*

(Προτ. ΚΔ΄.) ἢ τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΡΣ ϗ τῆς κατ᾽ αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου· ἄρα ϗ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΡΥ τοῖς αὐτοῖς ἐξισοῦται, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α΄.

Ἔνθεντοι ἡ ΥΡ ἐστὶ πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον ΓΡ, ὡς ἡ αὐτῇ τῇ διαμέτρῳ ἀνήκουσα ἡμιπαράμετρος πρὸς τὴν ΡΕ. Εἴγε τὸ ὀρθογώνιον ΥΡΕ (ὅπερ ἐξισοῦται τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρου ΡΣ ϗ τῆς κατ᾽ αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου), ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ΡΓ, ϗ τῆς ἡμιπαραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἐξισοῦται τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρου ΡΣ καὶ ὅλης τῆς Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β΄.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου ΡΣ ἐπιζευχθῶσιν ἐπὶ τὰς Ἑστίας εὐθεῖαι αἱ ΡΕ, ΣΕ αὗται δὴ περιέξουσιν ὀρθογώνιον τὸ ΡΕΣ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ ἢ τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρου ΡΣ ϗ τῆς κατ᾽ αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου. Ἡ γὰρ ΕΣ ἐξισοῦται τῇ ΥΡ, ἴσων ἑκατέρων βάσεων τῶν τριγώνων ΓΡΥ, ΓΣΕ, ἐν οἷς αἱ περὶ τὰς κατὰ κορυφὴν ἴσας γωνίας πλευραὶ ΕΓ, ΤΓ, ϗ ΣΓ, ΡΓ εἰσὶν ἴσαι. Ὅθεν τὸ ὑπὸ τῶν ΡΕΣ ὀρθογώνιον ἐξισοῦται τῷ ὑπὸ τῶν ΤΡΕ (ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετραγώνῳ, ἢ τεταρτημορίῳ τοῦ ὑπὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρου ΡΣ ϗ τῆς κατ' αὐτὴν Παραμέτρου περιεχομένου ὀρθογωνίου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως τὰ ἀπὸ τῶν ΡΕ, ΡΤ τετράγωνα σὺν τῷ δὶς ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ· ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς τὰ ἀπὸ τῶν ΡΕ, ΡΤ πλὴν τοῦ δὶς ἀπὸ τῆς ΓΗ ἐξισοῦται τῷ ἀπὸ τοῦ ἄξονος ΞΝ τετραγώνῳ. Εἴγε ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως ἡ ΞΝ ἐξισοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν εὐθειῶν ΡΕ, ΡΤ· ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς τῇ αὐτῶν διαφορᾷ (Πορ. Α', τῆς ΚΑ'.) ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΞΝ τετράγωνον ἐξισοῦται τοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσι, σὺν τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ἐν τῇ Ἐλλείψει, ἢ πλὴν τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένου ὀρθογωνίου ἐν τῇ Ὑπερβολῇ (99)· ὅπερ ἐστὶ ταὐτὸν (Προτ. ΚΕ'.) τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΓΗ τετραγώνῳ.

---

99) Ἐν τῇ Ἐλλείψει $\Xi N = EP + PY$· ἄρα $\Xi N^2 = (EP + PY^2) = EP^2 + PY^2 + 2YPE$ (4. τοῦ Β'.). Ἔστι δὲ $YPE = \Gamma H^2$· ϗ $2YPE = 2\Gamma H^2$, ἄρα $\Xi N^2 = EP^2 + PY^2 + 2\Gamma H^2$· ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἐπεὶ ἐστι $\Xi N = EP - PY$, ληφθείσης τῆς $PO = PY$, ἔσεται ἡ $EO =$ τῇ ΞN. Ἔτι $EP^2 = EPO - PEO$ (2. τοῦ Β'.) ἀλλὰ $PEO = EO^2 + EOP$ (3. τοῦ Β'.) ἄρα $EP^2 = EO^2 + EOP + EPO$. Ἔνθεν τοι EP^2

ΠΟ´ΡΙΣΜΑ Δ΄.

Ἔτι ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως τὸ ἄθροισμα οἱουδήποτε ὀρθογωνίου τοῦ ΥΡΕ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς διὰ τοῦ Ρ πλαγίας ἡμιδιαμέτρου ΓΡ τετραγώνου, ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἡ αὐτῶν διαφορὰ ἐστιν ἀεὶ τοῦ αὐτοῦ μεγέθους, ἤτοι ἐξισοῦται τῷ δὶς ἀπὸ τοῦ πλαγίου ἡμιάξονος ΓΝ τετραγώνῳ πλὴν τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ κέντρου ἀποστάσεως τῆς Ἑστίας ΓΕ, ἢ ΓΤ τετραγώνου. Ἴδομεν γὰρ ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΝ τετράγωνον ἐξισοῦται ὁμοῦ ληφθεῖσι τοῖς ἀπὸ τῶν ΥΡ, ΕΡ τετραγώνοις, σὺν μὲν τῷ δὶς ἐν τῇ Ἐλλείψει, πλὴν δὲ τοῦ δὶς ἐν τῇ Ὑπερβολῇ ὀρθογωνίου ΥΡΕ. Τὰ δὲ ἀπὸ ΥΡ, ΕΡ ἐστι κατὰ τὰ ἐν τῷ Ε΄. Σχολίῳ εἰρημένα διπλάσια τῶν ἀπὸ ΓΡ, ΓΤ· ἄρα τὸ δὶς ἀπὸ ΓΡ, μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΓΤ σὺν ἢ πλὴν τοῦ δὶς ὑπὸ ΥΡΕ ἐξισοῦται τῷ ἀπὸ ΞΝ, καὶ ἁπάντων δίχα διαιρεθέντων, τὸ ἀπὸ ΓΡ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΤ προστεθέντος ἢ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΥΡΕ, ἔσται ἴσον τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ ΞΝ, ὅπερ ἐστὶ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΓΝ. Ἔνθεντοι ἀφαιρεθέντος ἑκατέρωθεν τοῦ ἀπὸ ΓΝ ἔσεται τὸ ἀπὸ ΓΡ σὺν ἢ πλὴν

$+PO^2=EO^2+EOP+PO^2+EPO$, ἀλλὰ $EOP+PO^2=EPO$ (3. τοῦ β΄.) ἄρα $EP^2+PO^2=EO^2+EPO+EPO=EO^2+2EPO$. Ἔστι δὲ $PO=PY$, ἄρα $EP^2+PO^2=EP^2+PY^2$, καὶ $EO^2+2EPO=EO^2+2EPY$· ἄρα $EP^2+PY^2=EO^2+2EPY$, ἢ $EP^2-+PY^2-EPY=EO^2=ΞN^2$.

τοῦ ὑπὸ ΥΡΕ, ἴσον τῷ δὶς ἀπὸ τοῦ ἡμιάξονος ΓΝ τετραγώνῳ πλὴν τοῦ ἀπὸ ΓΕ, ἢ ΓΥ. Ἔστι δὲ τὸ δὶς ἀπὸ ΓΝ πλὴν τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἢ τοῦ ΓΥ ποσὸν σταθερόν· ἄρα τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου ΥΡΕ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΡ τετραγώνου ἐν τῇ Ἐλλείψει, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν ἐν τῇ Ὑπερβολῇ, ἔστιν ἀεὶ τοῦ αὐτοῦ μεγέθους, ἤτοι ποσὸν σταθερόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὀρθογώνιον ΥΡΕ ἐξισοῦται τῷ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου ΓΗ τετραγώνῳ, ἔσεται ἄρα ἐν μὲν τῇ Ἐλλείψει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΓΡ, ΓΗ· ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἡ αὐτῶν διαφορὰ ἴση τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀφ' ἑκατέρου τοῦ ἡμιάξονος ΓΝ, ΓΒ τετραγώνων. Καὶ γὰρ καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ τετραγώνων ἐξισωθήσεται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΓΝ τετραγώνῳ, πλὴν τοῦ ἀπὸ ΓΥ.(ἢ ΓΕ), ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΝ πλὴν τοῦ ἀπὸ ΓΥ, ἢ ΓΕ ἐξισοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ ΞΕΝ ἢ τῷ ΝΥΞ (5 τοῦ Β΄.) ἢ τῷ ἀπὸ τοῦ ἡμιάξονος ΓΒ τετραγώνῳ (Πρότ. Κ΄.), κἂν τῇ Ὑπερβολῇ δὲ τὸ ἀπὸ ΓΥ πλὴν τοῦ ὑπὸ ΞΥΝ, ἢ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἐξισοῦται τῷ ἀπὸ ΓΝ (100). Ἄρα ἐν μὲν τῇ

---

100) Ἐπεὶ ἐστιν ἐν τῇ Ὑπερβολῇ $ΓΡ^2 - ΓΗ^2 = 2ΓΞ^2 - ΓΥ^2$, καὶ $ΓΥ^2 = ΓΞ^2 + ΞΥΝ$ (6. τοῦ Β΄.) ἔσται δὴ $ΓΡ^2 - ΓΗ^2 = 2ΓΞ^2 - ΓΞ^2 - ΞΥΝ = ΓΞ^2 - ΞΥΝ$. Ἔστι δὲ $ΞΥΝ = ΓΒ^2$ (Πρότ. Κ.) ἄρα $ΓΡ^2 - ΓΗ^2 = ΓΞ^2 - ΓΒ^2 = ΓΝ^2 - ΓΒ^2$.

Ἐλλείψει τὸ ἀπὸ ΓΡ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΗ ἐξισοῦται τῷ ἀπὸ ΓΝ σὺν τῷ ἀπὸ ΓΒ. ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΓΡ, ΓΗ ἐξισοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ ΓΝ, ΓΒ.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'.

Ἔνθεντοι τετραπλασθέντων τῶν ὅρων, ἔσεται ἐν μὲν τῇ Ἐλλείψει τὰ ἀπὸ τῶν ἀξόνων ΞΝ, ΑΒ τετράγωνα ὁμοῦ ληφθέντα ἴσα τοῖς ἀφ' οἱωνδήποτε συζυγῶν διαμέτρων ΡΣ, ΗΤ τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ τῶν ἀξόνων τετραγώνων ἔσεται ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀφ' οἱωνδήποτε συζυγῶν διαμέτρων τετραγώνων, ἤτοι $ΞΝ^2 - ΑΒ^2 = ΡΣ^2 - ΗΤ^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'.

Ὅθεν ἡ ἰσοσκελὴς Ὑπερβολὴ, ἧς ὁ πλάγιος ἄξων ἐξισοῦται τῷ συζυγεῖ ἄξονι, καὶ ἥτις ἔχει ἑπομένως τὴν Παράμετρον ἴσην αὐτῷ τῷ ἄξονι (διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν, ὡς εἴρηται μετὰ τὸ Β'. Πόρισμα τῆς ΙΒ'.) ἕξει καὶ ἄλλας τινὰς πλαγίους διαμέτρους ταῖς ἑαυτῶν συζυγέσι, καὶ ταῖς αὐτῶν Παραμέτροις ἴσας. Οὔσης γὰρ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀφ' ἑκατέρου τοῦ ἄξονος τετραγώνων ἴσης τῇ διαφορᾷ, τῶν ἀφ' ἑκατέρας τῆς συζυγοῦς, ἐὰν ἐπ' ἐκείνων ᾖ μηδὲν, ϗ ἐπὶ τέτων ἔϛαι μηδέν (101).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚϚʹ.

Ἐν τῇ Ἐλλείψει ϗ Ὑπερβολῇ οἱαδήποτε διάμετρος ΗΤ, μέση ἐϛὶν ἀνάλογον τῦ πλαγίυ ἄξονος ΞΝ, ϗ ἑτέρας εὐθείας παρὰ τὴν αὐτὴν ΗΤ δὶ ἧς τινοσῦν Ἑϛίας Ε ἀχθείσης τῆς ΡΣ. Σχημ. 76. 77. Πιν. Η.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς ἐφαπτομένης ΡΘ καὶ ἀπὸ τῆς ἑτέρας Ἑϛίας Υ τῆς ΥΔ παραλλήλου ταῖς ΗΤ, ΡΣ, ἐπεζεύχθω ἡ ΡΔ, ἥτις δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ζ (102) ὑπὸ τῆς διαμέτρυ ΗΤ, ἐφ' ἣν τεταγμένως κατήχθη, ὥσπερ δὴ ϗ ἡ ΕΥ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ κέντρον Γ ὑπὸ τῆς αὐτῆς

---

101) Ὑποτεθήτω ἡ Ὑπερβολὴ ΣΝ ἰσόπλευρος, ἧς ὁ πλάγιος ἄξων ΞΝ ἔϛω ἴσος τῷ συζυγεῖ ἄξονι ΑΒ. Ἔϛω δὴ ϗ ἑτέρα τις διάμετρος ἡ ΣΡ, συζυγὴς δὲ ϗ αὐτῇ ἔϛω ἡ ΗΤ· ϗ ἔσεται δὴ τηνικαῦτα (Πόρ. ϛʹ.) $ΞΝ^2 - ΑΒ^2 = ΣΡ^2 - ΗΤ^2$. Ἔϛι δὲ $ΞΝ - ΑΒ^2 = 0$ (εἴγε $ΞΝ = ΑΒ$), ἄρα ϗ $ΣΡ^2 - ΗΤ^2 = 0$, ἤτοι $ΣΡ^2 = ΗΤ^2$, καὶ $ΣΡ = ΗΤ$.

102) Ἀχθείσης γὰρ τῆς ΕΔ. ἥτις τεμεῖ τὴν διάμετρον ΗΤ κατὰ τὸ Λ· ἐπεὶ αἱ ΓΗ, ΥΔ; ΕΡ εἰσὶν ἀλλήλαις παράλληλοι· ἔσεται $ΡΖ : ΖΔ = ΕΛ : ΛΥ = ΕΓ : ΓΥ$. Ἔϛι δὲ $ΕΓ = ΓΥ$, ἄρα ϗ $ΡΖ = ΖΔ$· ὅθεν ἡ ΡΔ τεταγμένη ἐϛὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον ΗΤ.

διαμέτρυ παραλλήλυ ταῖς ΕΡ, ΥΔ, ϗ ἔσεται δὴ ἡ ΓΕ μέση ἀριθμητικῶς ἀνάλογον τῶν ΕΡ, ΥΔ (103), ἢ τῶν ΕΡ, ΕΣ, ἥτις ἐςιν ἴση τῇ ΥΔ, (104). Ἐν ἴσῳ γὰρ ἀπὸ τῦ κέντρυ ἀποςήματι ἑκατέρα ὁμοίως (ἐπίσης) πρὸς τὴν καμπύλην κέκλιται, ὑπὸ γωνίας ἴσας τὰς ΝΕΣ, ἢ ΡΕΞ, καὶ ΞΥΔ. Ἄρα τὸ διπλάσιον τῆς ΓΖ, ἥτις ἐςὶ μέση, ἐξισῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἄκρων ἤτοι τῇ ΡΣ. Καὶ ἡ ΓΗ ἐςὶ μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογον τῶν ΓΖ, ΓΘ (ὡς εἴρηται ἐν τῇ δείξει τῆς ΙΗ´.) ἥτε ΓΘ ἡ παράλληλος τῇ ΕΡ ἐξισῦται τῷ ἡμιάξονι ΓΝ (Πρότασ. ΚΑ´.). Ἄρα ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΓΗ, ὕτως ἡ αὐτὴ ΓΗ πρὸς τὴν ΓΝ (ϗ δὴ

---

103) Ἐπεὶ ἡ *ΔΡ* τεταγμένη ἐςὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον *ΗΤ*. ἧπερ συζυγὴς διάμετρος ἡ *ΚΜ*, ἔσονται δὴ αἱ *ΚΜ*, *ΔΡ* ἀλλήλαις παράλληλοι. Ὅθεν ἐπεὶ καὶ αἱ *ΔΠ*, *ΡΟ* ἀλλήλαις παράλληλοι, τὸ σχῆμα *ΠΔΡΟ* ἔσεται παραλληλόγραμμον· τοιγαρῦν *ΡΟ*=*ΔΠ*. Ἔςι δὲ ἡ *ΗΤ* παράλληλος ταῖς *ΔΠ*, *ΡΟ*, ἄρα ὥσπερ ἡ *ΔΖ*=*ΖΡ*, ὕτω δὴ ϗ *ΠΓ*=*ΓΟ*. Ἐπεὶ προσέτι ϗ *ΥΓ*=*ΓΕ*, ἥτε ὑπὸ *ΠΓΥ*= τῇ ὑπὸ *ΟΓΕ*, ἔσεται δὴ ϗ *ΕΟ*=*ΥΠ* (4. τῦ *Α*.) Ἔνθεντοι *ΡΕ*—*ΟΡ*=*ΡΕ*—*ΓΖ*=*ΕΟ*· ϗ *ΓΖ*—*ΔΥ*=*ΠΔ*—*ΔΥ*=*ΥΠ*. Ἄρα ἐπεὶ ἐςὶν *ΕΟ*=*ΠΥ*, ἔσεται ϗ ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει ἡ *ΡΕ*, τῆς *ΟΡ*, ἢ τῆς *ΓΕ* ἴση τῇ ὑπεροχῇ ᾗ ὑπερέχει ἡ *ΠΔ* τῆς *ΔΥ*, ἢ ἡ *ΓΖ*, τῆς *ΔΥ*· εἰσὶν ἄρα αἱ *ΕΡ*, *ΓΖ*, *ΔΥ*, ἀριθμητικῶς ἀνάλογον.

104) Ἐπεὶ ἡ *ΚΜ* ἐςὶ συζυγὴς τῇ διαμέτρῳ *ΗΤ*, δίχα ἄρα τεμεῖ τὴν *ΣΡ* παράλληλον τῇ *ΗΤ*, ὅθεν *ΣΟ*=*ΟΡ*=*ΠΔ*. Ἔςι δὲ *ΕΟ*=*ΠΥ*, ἄρα καὶ *ΥΔ*=*ΕΣ*.

$2\Gamma Z : 2\Gamma H = 2\Gamma H : 2\Gamma N$), καὶ ὡς ἡ ΡΣ διπλασία τῆς ΓΖ πρὸς τὴν ΗΤ, διπλασίαν τῆς ΓΗ, οὕτως ἡ αὐτὴ ΗΤ πρὸς τὴν ΞΝ διπλασίαν τῆς ΓΝ, ἢ ΓΘ. Ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἄρα ΗΤ τετράγωνον ἐξισοῦται τῷ ὑπὸ τῆς διὰ τῆς Ἑστίας παραλλήλως αὐτῇ ἀχθείσης ΣΡ καὶ τοῦ πλαγίου ἄξονος ΞΝ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ (17 τοῦ ϛ΄.)

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Ἔνθεν τοι καὶ εἰ πλείους εὐθεῖαι διὰ τῆς Ἑστίας ἀχθεῖεν, ἔσοιντο ἑκάστη ὡς τὰ ἀπὸ τῶν αὐταῖς παραλλήλων διαμέτρων τετράγωνα (105).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

Ἔσται ἔτι ὡς ἡ ΣΡ πρὸς τὴν ΜΑ ὀρθίαν πλευρὰν τῆς διαμέτρου ΜΚ, ἐφ᾽ ἣν τέτακται, οὕτως ἡ διάμετρος ΜΚ πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα ΝΞ. Εἴγε τὸ ἀπὸ τῆς ΗΤ, τατράγωνον ἐξισοῦται ὀρθογω-

105) Ἀχθεῖσα οἱαδή τις διάμετρος ητ, ἧπερ παράλληλος ἡ σΕρ, ἔσεται κατὰ τὴν παροῦσαν μέση ἀνάλογος τοῦ πλαγίου ἄξονος ΝΞ, καὶ τῆς ἑαυτῇ παραλλήλου σρ. Ἔνθεν τοι $\eta\tau^2 = N\Xi \times \sigma\rho$. Ὅθεν $HT^2 : N\Xi \times \Sigma P = \eta\tau^2 : N\Xi \times \sigma\rho$, καὶ $HT^2 : \eta\tau^2 : N\Xi \times \Sigma P : N\Xi \times \sigma\rho = \Sigma P : \sigma\rho$.

νίῳ ΑΜΚ (ἔσης τῆς ΗΤ συζυγῦς διαμέτρυ τῇ ΚΜ διαμέτρῳ)· ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΗΤ ἐςὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΣΡ, ΝΞ, ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜΚ ἐξισῦται τῷ ὑπὸ τῶν ΣΡ, ΝΞ. Ἔνθεντοι (Πορ. Α΄.) ὡς ἡ ΣΡ πρὸς ΑΜ, ὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΝΞ.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Δ΄.

Ἐπεὶ ἡ ΣΡ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ο ὑπὸ τῆς διαμέτρυ ΜΚ (ἤτοι ἐςὶ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ΜΚ) ἔσεται δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΟΡ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΚΟΜ πρὸς τὸ ΚΓΜ, ἢ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΜ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΣΡ, ΗΤ, ΝΞ ἀνάλογόν εἰσιν, ἄρα ϗ τὰ αὐτῶν ἡμίσεα ΟΡ, ΓΗ, ΓΝ· ἀνάλογον ἔσεται. Καὶ δὴ ϗ ὡς τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, ὕτω τὸ αὐτὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΝ (22 τῦ ϛ΄.) ὅθεν ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΚΟΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΓ τετράγωνον, ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον, ἢ τὸ αὐτῷ ἴσον ὀρθογώνιον ΥΜΕ (Προτ. προηγ.) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΝ τετράγωνον.

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Ε΄.

Καὶ ἐναλάσσοντι ἔσεται ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΚΟΜ πρὸς τὸ ΥΜΕ, ὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρυ ΓΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῦ ἡμιάξονος ΓΝ. Ἢ (τῶν ὅρων τῦ δευτέρυ λόγυ τετραπλασιαθέντων) τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΞ.