ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν ὑποτείνουσαν

$A\Gamma = \left\{ \begin{matrix} 79^\circ, 0' \\ 70, 15 \end{matrix} \right\}$ μοίρας, τὴν δὲ γωνίαν $\left\{ \begin{matrix} A = 48^\circ, 22' \\ \Gamma = 50, 20 \end{matrix} \right\}$

κ̧ ζητῶ τὴν πλευρὰν $\left\{ \begin{matrix} AB \\ B\Gamma \end{matrix} \right\}$ (πίναξ. ϛ'. σχη. θ').

Ἀπόκρ. 73°,41'. 60°,39'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

148. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης κ̧ μιᾶς ἀπὸ τὰς λοξὰς γωνίας, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν πλευρὰν, ἥτις ὑποτείνει εἰς αὐτὴν τὴν γωνίαν.

Ἀπὸ τὴν πρώτην ἀναλογίαν τῆς πρώτης ἀρχῆς (130) δύναμαι νὰ συμπεράνω ἀμέσως οὕτως.

Ἡ ἡμιδιάμετρος,
στέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑποτεινούσης.
Ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς δοθείσης γωνίας,
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ζητουμένης πλευρᾶς,

ἥτις θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν (123).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ἔστω ἡ μὲν ὑποτείνουσα $A\Gamma = \left\{ \begin{matrix} 50^\circ, 0' \\ 30, 10 \end{matrix} \right\}$ μοίρας, ἡ δὲ γωνία $\left\{ \begin{matrix} A = 35^\circ \\ \Gamma = 40 \end{matrix} \right\}$. κ̧

ἂς ζητηθῇ ἡ πλευρὰ $\left\{ \begin{matrix} B\Gamma \\ AB \end{matrix} \right\}$ (πίναξ. ϛ'. σχ. θ').

Ἀπόκρ. 26°,4'. 18°,51'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔʹ.

149. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης, κ̀ μιᾶς ἀπὸ τὰς λοξὰς γωνίας, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν ἄλλην λοξὴν γωνίαν.

Ἐκβάλλω, κ̀ συμπεραίνω ἀπὸ τὴν πρώτην ἀναλογίαν τῆς δευτέρας ἀρχῆς (131) οὕτως,

Ἡ ἡμιδιάμετρος,
ςέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης γωνίας.
Ὥσπερ τὸ συνημίτονον τῆς ὑποτεινούσης,
Πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς ζητουμένης γωνίας.

Αὐτὴ ἡ γωνία θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν, ἂν ἡ ὑποτείνουσα ἦναι μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας (126), ἢ θέλει εἶσθαι ὀξεῖα, ἂν αἱ δύω δοθεῖσαι ποσότητες ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους (128).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. αʹ. Ἔςω ἡ μὲν ὑποτείνουσα ΑΓ $= 70°,20'$, ἡ δὲ γωνία $= 40°$· κ̀ ἂς ζητηθῇ ἡ γωνία Α (πίναξ. ςʹ. σχ. θʹ).

Εἰς τοῦτο τὸ πρόβλημα δὲν δύναται τὶς νὰ εὕρῃ τὴν γωνίαν Α, οὔτε εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὔτε εἰς τὰ δύω τρίγωνα ΓΔΕ, ΑΗΙ, ἀλλὰ πρέπει νὰ μακρύνῃ πρὸς τούτοις τὴν ὑποτείνουσαν ἕως εἰς τὸ Ν, κάμνων τὴν ΓΝ ἴσην μὲ 90° μοίρας. Πρέπει νὰ μακρύνῃ ἀκόμη τὴν πλευρὰν ΒΓ μέχρι τοῦ Μ, κ̀ νὰ περιγράψῃ τὸ τόξον ΜΝ, τὸ ὁποῖον εἶναι μέτρον τῆς γωνίας ΜΓΝ $=$ ΑΓΒ (α). Ἀφ' οὗ λοιπὸν κάμῃ αὐτὰ, δύναται νὰ εὕρῃ εὐκόλως τὴν ἀκόλουθον ἀναλογίαν.

(α) Αὐτὴ ἡ διπλῆ ἐξαγωγὴ δὲν ἔχει χώραν παρὰ μόνον εἰς τοῦτο τὸ πρόβλημα, κ̀ εἰς τὸ ἀκόλουθον· ἤγουν εἰς ἐκεῖνα μόνον τὰ συμβεβηκότα, εἰς τὰ ὁποῖα θεωρεῖται ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης κ̀ τῶν λοξῶν γωνιῶν.

Ἡμιδ. ΓΝ : ΜΝ Εφαπτο. τῆς γωνίας ΜΓΝ = 40° :: Ημιτ. τῆς ΓΔ = 19°,40′ : Εφαπτο. τῆς ΔΕ = 15°,46′.

Σύναψον	Λογ. ἐφαπτ. 40=	9.923814
	Λογ. ἡμιτ. 19°,40′	9.527046
Αφαίρεσον	Κεφ.	19.450860
	Λογ. ἡμιδ. . . .	10.000000
	Διαφ.	9.450860

Ὁ ἡμιτονολογάριθμος οὗτος ἀνταποκρίνεται εἰς 15°,46′. Τὸ παραπλήρωμα λοιπὸν ΔΦ θέλει εἶσθαι 74°,14′, μέτρον τῆς γωνίας Α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ′.

159. Δοθεισῶν τῶν δύω λοξῶν γωνιῶν, νὰ εὕρῃ τις τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἐκβάλλω τὰς πλευρὰς, καὶ συμπεραίνω ἀπὸ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν τῆς δευτέρας ἀρχῆς (131).

Ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν λοξῶν γωνιῶν,
στέκει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον,
Ὥσπερ ἡ συνεφαπτομένη τῆς ἄλλης γωνίας,
Πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ὑποτεινούσης,

ἥτις θέλει εἶσθαι μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας ἂν αἱ δύω λοξαὶ γωνίαι ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους (126).

Καὶ ἂν λάβω πρῶτον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὴν ἡμιδιάμετρον, δύναμαι νὰ κάμω τὴν ἀκόλουθον οὕτως

Ἡμιδ. : Συνεφα. μιᾶς τῶν γωνιῶν :: Συνεφα. τῆς ἄλλης γωνίας : Συνημίτ. τῆς ὑποτεινύσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν γωνίαν Α $= \left\{ \begin{matrix} 42^\circ \\ 67 \end{matrix} \right\}$ μοίρας, τὴν δὲ γωνίαν Γ $= \left\{ \begin{matrix} 59^\circ, 0' \\ 77, 30 \end{matrix} \right\}$· κ̇ ζητῶ τὴν ὑποτείνυσαν ΑΓ (πίναξ. ς.' σχη: θ').

Ἀπόκρι. Ἐκβάλλω τὴν ὑποτείνυσαν, κ̇ μίαν πλευρὰν, ὡς εἰς τὸ προηγύμενον πρόβλημα· κ̇ εὑρίσκω 48°,8'. 84°,36'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ις'.

151. Δοθασῶν τῶν δύω λοξῶν γωνιῶν, νὰ εὕρῃ τὶς μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς.

Ἐκβάλλω τὰς πλευρὰς, κ̇ συμπεραίνω τὴν ἀκόλυθον ἀναλογίαν ἀπὸ τὴν πρώτην τῆς πρώτης ἀρχῆς (130).

Τὸ ἡμίτονον τῆς προσκημένης γωνίας εἰς τὴν ζητυμένην πλευρὰν,

ςέκει πρὸ τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης γωνίας.

Ὥσπερ ἡ ἡμιδιάμετρος,

Πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ζητυμένης πλευρᾶς,

ἥτις εἶναι τῦ αὐτῦ εἴδυς μὲ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία ὑποτείνει εἰς αὐτήν (123).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν γωνίαν Α $= \left\{ \begin{matrix} 60^\circ \\ 70 \end{matrix} \right\}$ μοίρας, τὴν δὲ γωνίαν Γ $= \left\{ \begin{matrix} 36^\circ, 0' \\ 38, 10 \end{matrix} \right\}$:

κ̇

κ̀ ζητῶ τὴν πλευρὰν $\left\{\begin{matrix} \text{ΒΓ} \\ \text{ΑΒ} \end{matrix}\right\}$ (πίναξ. ϛ'. σχη: θ').

Ἀπόκρι. 31°,43' . 33°,13'.

ΛΥΣΙΣ τῶν Σφαιρικῶν Λοξογωνίων Τριγώνων.

152. Δύναταί τις νὰ προβάλῃ δώδεκα προβλήματα, διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν λοξογωνίων τριγώνων, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι ὀκτὼ, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦσιν, ὅτι τὸ δοθὲν τρίγωνόν πρέπει νὰ μεταβαλθῇ εἰς δύω ὀρθογώνια τρίγωνα διὰ μέσου ἑνὸς τόξου, ἀγομένου κατὰ κάθετον ἀπὸ μίαν τῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν, ἥτις ὑποτείνει εἰς αὐτὴν τὴν γωνίαν. Ὅθεν εἰς τὸ σφαιρικὸν λοξογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (πίναξ. ϛ'. σχ. ιά.), ἂν σύρῃ τὶς ἀπὸ τὴν γωνίαν Γ τὸ τόξον ΓΔ τοῦ μεγάλου κύκλου κατὰ κάθετον ἐπάνω εἰς τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν ΑΒ, θέλει λάβει τὰ δύω ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, κ̀ ΒΓΔ, εἰς τὰ ὁποῖα δύναται νὰ εὕρῃ εὐκόλως τὸ ζητούμενον διὰ μέσου τῶν ἀρχῶν, τὰς ὁποίας ἐκθέσαμεν ἀνωτέρω διὰ τὰ ὀρθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα. Δύναται ὅμως νὰ συνέβῃ ὅτι αὐτὸ τὸ τόξον νὰ μὴ δύναται νὰ ἀνταμώσῃ τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἂν τοὐλάχιστον δὲν ἤθελε τὴν μακρύνῃ τις· διότι δύναται νὰ πέσῃ ἔξω τοῦ τριγώνου, καθὼς εἰς τὰ σχήματα ιβ'. κ̀ ιγ'. Ὁπόταν ὅμως ἤθελεν ἀκολουθήσῃ τοῦτο, δύναται νὰ τὸ γνωρίσῃ εὐκόλως ἀπὸ τὸν ἀκόλουθον κανόνα.

153. „ Ἐὰν ἀπὸ τὰς δύω γωνίας ἑνὸς σφαιρικοῦ „ τριγώνου ἦναι ἡ μὲν μία ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ὀξεῖα, „ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης ἀγόμενον τόξον κατὰ κορυφὴν

„ ἐπάνω εἰς τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν, δὲν δύναται νὰ
„ πέσῃ παρὰ ἐπάνω εἰς τὴν κατὰ τὸ μέρος τῆς ἀμ-
„ βλείας γωνίας γενομένην ἐξαγωγὴν αὐτῆς.

154. Ἡμεῖς συμβουλεύομεν τοὺς ἀρχαρίους νὰ μεταχειρίζωνται πάντοτε τρεῖς ἀναλογίας εἰς τὴν λύσιν ὅλων ἐκείνων τῶν προβλημάτων, εἰς ὅσα τὸ τρίγωνον πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς δύω σφαιρικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ τὸ κατὰ κορυφὴν τόξον. Αὕτη ἡ μέθοδος εἶναι καὶ πλέον εὐκολοκατάληπτος, καὶ μήτε τόσον διεξοδικὴ εἰς τὴν πρᾶξιν· διότι ἡ ἡμιδιάμετρος εἶναι πάντοτε εἷς ἀπὸ τοὺς δοθέντας ὅρους μιᾶς ἀναλογίας.

155. Ἡμεῖς μ' ὅλον τοῦτο θέλομεν ἑρμηνεύσει τὰς λύσεις τούτων τῶν ἰδίων προβλημάτων διὰ μέσου δύω μόνον ἀναλογιῶν. Ἀλλ' ὅμως διὰ νὰ ἐμπορέσῃ τις νὰ τὰς μεταχειρισθῇ μὲ εὐκολίαν, πρέπει νὰ παρατηρήσῃ, ὅτι τὸ ἀγόμενον τόξον ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Γ (πίναξ. ς'. σχ. ια'.), ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ κόπτει αὐτὴν τὴν πλευρὰν εἰς δύω μέρη, ἢ τμήματα ΑΔ καὶ ΒΔ, καὶ ὅτι ἡ γωνία Γ εὑρίσκεται διῃρημένη ὡσαύτως ἀπὸ αὐτὸ εἰς ἄλλας δύω γωνίας ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι λέγονται γωνίαι πρὸς τῇ κορυφῇ. Ἂν δὲ ἡ κάθετος ΓΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, καθὼς εἰς τὰ σχήματα ιβ' καὶ ιγ' τοῦ ς'. πίνακος, ἡ γωνία ΑΓΒ θέλει εἶσθαι ἴση μὲ τὰς δύω πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας ΑΓΔ, ΒΓΔ. Αἱ γωνίαι Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν, ἐπὶ τῆς ὁποίας πίπτει ἡ κάθετος, εἴτε ἐκβαλλομένην, εἴτε μὴ, ὀνομάζονται γωνίαι πρὸς τῇ βάσει.

156. Καὶ μ' ἕνα λόγον ἐν τοῖς λοξογωνίοις σφαιρικοῖς τριγώνοις εἶναι μὲν πολλὰ συμβεβηκότα, εἰς

τὰ ὁποῖα τρία μόνον δοθέντα εἶναι ἀρκετὰ εἰς τὸ νὰ εὕρῃ τις τὸ ζητούμενον, εἶναι ὅμως ἀκόμη καὶ ἄλλα πολλὰ, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ζητούμενον μένει ἀπροσδιόριστον· διότι αὐτὰ μόνον τὰ διδόμενα δὲν ἀρκοῦσιν εἰς τὸ νὰ γνωρίσῃ τις, ἂν τὸ ζητούμενον ἦναι μεγαλήτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ 90° μοίρας. Καὶ ὅμως μ' ὅλον ὅτι ὁ τῶν συμπτωμάτων τούτων ἀριθμὸς εἶναι πολὺς, μ' ὅλον τοῦτο σπανίως ἀκολουθεῖ εἰς τὰς κοινὰς χρήσεις τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας, τὸ νὰ μὴν ἐξεύρῃ τις ποίου εἴδους πρέπει νὰ ἦναι ἡ πλευρὰ ἢ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν ζητεῖ. Καὶ διὰ τοῦτο εἰς τὰς προσαρμογὰς, τὰς ὁποίας θέλομεν κάμει ἐπάνω εἰς τὰ ἀκόλουθα προβλήματα, θέλομεν ἀναφέρει πάντοτε τὸ μὲν πρῶτον παράδειγμα εἰς τὸ ια'. σχῆμα, τὸ δὲ δεύτερον εἰς τὸ ιβ'. καὶ τὸ τρίτον εἰς τὸ ιγ'. τοῦ π'. πίνακος, ὑποθέτοντες τὰς πλευρὰς μικροτέρας ἀπὸ 90° μοίρας εἰς τὰ δέκα πρῶτα προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

157. Δοθεισῶν δύω γωνιῶν, καὶ τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς εἰς μίαν τῶν δύω, νὰ εὕρῃ τις τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν εἰς τὴν λοιπὴν γνωστὴν γωνίαν.

Αὕτη μὲν ἡ ζητουμένη πλευρὰ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν πρώτην ἀναλογίαν τῆς πρώτης ἀρχῆς (130).

Ἡμίτονον τῆς ὑποτεινούσης γωνίας εἰς τὴν γνωστὴν πλευρὰν : Ἡμίτονον αὐτῆς τῆς πλευρᾶς :: Ἡμίτονον τῆς λοιπῆς γνωστῆς γωνίας : Ἡμίτονον τῆς ζητουμένης πλευρᾶς.

Συμβεβηκὸς ἀμφίβολον: διότι ἡ ζητουμένη πλευρὰ δύναται νὰ ἦναι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἀπὸ 90°

μοίρας· ἐπειδὴ δὲν δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἀπὸ μόνον τὰ διδόμενα τοῦ προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου τὴν μὲν Α γωνίαν ὑποθέτω $= \left\{\begin{array}{l} 26^{\circ},30' \\ 42,35 \\ 100,0 \end{array}\right\}$ μοίρας, τὴν δὲ Β $= \left\{\begin{array}{l} 52^{\circ},20' \\ 124,30 \\ 32,26 \end{array}\right\}$, καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ $= \left\{\begin{array}{l} 27^{\circ},15' \\ 51,32 \\ 57,43 \end{array}\right\}$· καὶ ζητῶ τὴν πλευρὰν ΑΓ.

Ἀπόκρ. $54^{\circ},19'$. $72^{\circ},29'$. $27^{\circ},25'$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

158. *Δοθεισῶν δύω γωνιῶν, καὶ τῆς ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἰς μίαν τῶν δύω, νὰ εὕρῃ τις τὴν τρίτην γωνίαν.*

Εἰς τοῦτο τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ σύρῃ τις ἀπὸ τὴν ζητουμένην γωνίαν μίαν κάθετον ἐπάνω εἰς τὴν ἀντικειμένην αὐτῆς πλευρὰν, ἐκβαλλομένην, ἂν κάμῃ χρεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω ἡ μὲν γωνία Α $= \left\{\begin{array}{l} 26^{\circ},30' \\ 42,35 \\ 100,0 \end{array}\right\}$ ἡ δὲ γωνία Β $= \left\{\begin{array}{l} 52^{\circ},20' \\ 124,30 \\ 32,26 \end{array}\right\}$, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ $= \left\{\begin{array}{l} 27^{\circ},15' \\ 51,32 \\ 57,43 \end{array}\right\}$ μοίρας· καὶ ἂς ζητηθῇ ἡ γωνία Γ.

Ἀπὸ τὴν ζητεμένην γωνίαν Γ τραβίζω τὴν κάθετον ΓΔ ἐπάνω εἰς τὴν ὑπεναντίον αὐτῆς πλευρὰν ΑΒ, διὰ νὰ λάβω τὰ δύω τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ, ὀρθογωνία κατα τὸ Δ. Τώρα εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἐξεύρω τὴν ὑποτείνεσαν ΒΓ κ̀ τὴν γωνίαν Β· ζητῶ λοιπὸν (148) τὴν κάθετον ΓΔ, κ̀ τὴν γωνίαν ΒΓΔ (149), (αὐτὴ ἡ γωνία θέλει εἶσθαι πάντοτε τῦ αὐτῦ εἴδες μὲ τὴν ΓΔ πλευρὰν). Ἔπειτα εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, τῦ ὁποίε ἐξεύρω τὴν γωνίαν ΓΑΔ, κ̀ τὴν πλευρὰν ΓΔ, τὴν ὁποῖαν ἤδη εὗρον, ζητῶ τὴν γωνίαν ΑΓΔ (137). Τέλος πάντων εὑρίσκω τὴν ζητεμένην γωνίαν ΑΓΒ, ἀφ᾽ ἧ λάβω τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύω γωνιῶν ΒΓΔ, ΑΓΔ. Λαμβάνω τὸ κεφάλαιον, ὅταν ἡ κάθετος ΓΔ πίπτῃ ἐντὸς τῦ τριγώνε, καθὼς εἰς τὸ ια΄. σχῆμα τῦ ς΄. πίνακος, ἤγεν ὁπόταν αἱ δύω δοθεῖσαι γωνίαι ἦναι τῦ αὐτῦ εἴδες· λαμβάνω δὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὅταν πίπτῃ ἐκτὸς, καθὼς εἰς τὸ ιβ΄. κ̀ ιγ΄. σχῆμα τῦ αὐτῦ πίνακος. Προσαρμόζων λοιπὸν αὐτὰς τὰς ἀρχὰς εἰς τὰ προκείμενα παραδείγματα, εὑρίσκω τὴν γωνίαν Γ $=$ 114°,45΄. 26°,41΄. 60°,1΄.

ΛΥΣΙΣ τῦ αὐτῦ προβλήματος μὲ δύω ἀναλογίας.

Ὑποθέτω, ὡς ἀνωτέρω, τὸ κατὰ κορυφὴν τόξον ἀγόμενον ἀπὸ τὴν ζητεμένην γωνίαν.

Η Ἡμιδιάμετρος : Ἐφαπτο. τῆς ἐπὶ τῆς βάσεως κ̀ πρὸς τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ γωνίας :: Συνημί. τῆς δοθείσης πλευρᾶς : Συνεφαπτο. τῆ πρώτης τῶν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνιῶν, ἥτις θέλει εἶσθαι τῦ αὐτῦ εἴδες μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

Συνημί. τῆς ἐπὶ τῆς βάσεως ὑποκειμένης τῇ γνωστῇ πλευρᾷ δοθάσης γωνίας ∴ Συγημί. τῆς ὑπεναντίον γωνίας τῇ δοθάσῃ πλευρᾷ ∴ Ἡμίτο. τῆς πρώτης τῶν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνιῶν ∴ Ἡμίτο. τῆς δευτέρας τῶν πρὸς τῇ κορυφῇ.

Συνάπτω λοιπὸν τὰς δύω πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας, ἂν αὗται αἱ δύω γωνίαι ἦναι τῦ αὐτῦ εἴδυς, ἤγυν ἂν ἡ κάθετος πίπτῃ ἐντὸς τῦ τριγώνυ, εἰδὲ μὴ, λαμβάνω τὴν διαφορὰν αὐτῶν· κὶ εὑρίσκω τὴν ζητυμένην γωνίαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

159. Δοθασῶν τῶν δύω γωνιῶν, κὶ μιᾶς ἀπὸ τὰς πλευρὰς, ἥτις ὑποτάνει εἰς μίαν τῶν δύω, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν πλευρὰν, τὴν περιεχομένην ἀπὸ τὰς δύω γωνίας.

Ἀπὸ τὴν ἄγνωςον γωνίαν σύρω τὴν κάθετον ἐπάνω εἰς τὴν ζητυμένην πλευράν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω ἡ μὲν γωνία $A = \left\{ \begin{array}{l} 26°,30' \\ 42,35 \\ 100,0 \end{array} \right\}$ μοίρας, ἡ δὲ γωνία $B = \left\{ \begin{array}{l} 52°,20' \\ 124,30 \\ 32,26 \end{array} \right\}$, κὶ ἡ πλευρὰ $B\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} 27°,15' \\ 51,32 \\ 57,43 \end{array} \right\}$: κὶ ἂν ζητηθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ.

Σύρω λοιπὸν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπάνω εἰς τὴν ζητυμένην πλευρὰν ΑΒ, κὶ λαμβάνω τὰ δύω ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λύσω. Ὅθεν εἰς μὲν τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ζητῶ (148) τὴν κάθετον ΓΔ, κ̣ (147) τὸ τμῆμα ΒΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε τῦ αὐτῦ εἴδες μὲ τὴν ΒΓ· εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ζητῶ τὸ ἄλλο τμῆμα ΑΔ (138). Καὶ ἐὰν μὲν αἱ δύω δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι τῦ αὐτῦ εἴδες, τὸ κεφάλαιον αὐτῶν θέλει μὲ δώσει τὴν ζητυμένην πλευρὰν ΑΒ=68°,43'. 31°,18' . 48°,2', εἰ δὲ ἡ μὲν μία εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ἀμβλεῖα, ἡ διαφορὰ αὐτῶν.

ΛΥΣΙΣ τῦ αὐτῦ προβλήματος μὲ δύω ἀναλογίας.

Ἡμιδιάμετρος : Συνημίτο. τῆς γωνίας, τῆς πρὸς τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ : : Ἐφαπτο. αὐτῆς τῆς πλευρᾶς : Ἐφαπτο. τῦ πρώτυ τμήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι τῦ αὐτῦ εἴδες μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

Ἐφαπτο. τῆς ὑπεναντίον γωνίας τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ : Ἐφαπτο. τῆς γωνίας τῆς πρὸς αὐτῇ τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ : : Ἡμίτο. τῦ πρώτυ τμήματος : Ἡμίτο. τῦ δευτέρυ τμήματος. Ἀμπφίβολον.

Εἰ μὲν αἱ δύω δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι τῦ αὐτῦ εἴδες, συνάπτω ὁμῦ τὰ δύω τμήματα· διότι τότε ἡ κάθετος πίπτει ἐντὸς τῦ τριγώνυ, εἰ δὲ μή, λαμβάνω τὴν διαφορὰν αὐτῶν, διὰ νὰ εὕρω τὴν ζητυμένην πλευράν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'

160. Δοθεισῶν τῶν δύω γωνιῶν, κ̣ τῆς περιεχομένης πλευρᾶς, νὰ εὕρῃ τὶς μίαν ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευράς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν γωνίαν Γ = $\left\{\begin{matrix} 52^\circ,20' \\ 124,30 \\ 32,24 \end{matrix}\right\}$ μοίρας, τὴν δὲ γωνίαν Γ = $\left\{\begin{matrix} 114^\circ,45' \\ 26,41 \\ 60,1 \end{matrix}\right\}$

ϗ τὴν πλευρὰν ΒΓ $= \left\{ \begin{matrix} 27^{\circ},15' \\ 51\ ,32 \\ 57\ ,43 \end{matrix} \right\}$· ϗ ζητῶ τὴν πλευρὰν ΑΓ.

Τραβίζω τὴν κάθετον ΓΔ ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Γ, τὴν πρὸς τῇ ζητουμένῃ πλευρᾷ ΑΓ, ϗ ἔχω τὰ δύω τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ, ὀρθογώνια κατὰ τὸ Δ. Ζητῶ, ὡς εἰς τὸ δευτέρον πρόβλημα (158), τὴν κάθετον ΓΔ, ϗ τὴν γωνίαν ΒΓΔ. Λαμβάνω κατὰ τὸ συμβεβηκὸς, ἢ τὴν διαφορὰν ἢ τὸ κεφάλαιον τῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΒΓΔ, διὰ νὰ εὕρω τὴν γωνίαν ΑΓΔ. Τέλος πάντων ζητῶ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ (140) τὴν ζητουμένην πλευρὰν ΑΓ, ἥτις θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν γωνίαν ΑΓΔ. Εὑρίσκω δὲ αὐτὴν $=54^{\circ},19'$. $72^{\circ},29'$. $27^{\circ},25'$.

ΛΥΣΙΣ τοῦ αὐτοῦ προβλήματος μὲ δύω ἀναλογίας.

Ἡμιδιά. : Ἐφαπτο. τῆς ὑποτεινούσης γωνίας εἰς τὴν ζητουμένην πλευρὰν :: Συνημί. τῆς δοθείσης πλευρᾶς : Συνεφαπτο. τῆς πρώτης πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας, ἥτις θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ τοῦ εἴδους μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

Πρέπει νὰ λάβῃς ἢ τὴν διαφορὰν ἢ τὸ κεφάλαιον τῶν δύω γωνιῶν τῆς πρώτης πρὸς τῇ κορυφῇ, ϗ τῆς κειμένης πλησίον τῆς ζητουμένης πλευρᾶς, κατὰ τὴν θέσιν τῆς καθέτου, τὸ ὁποῖον θέλει σὲ δώσει τὴν δευτέραν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν, ἥτις σχηματίζεται ἀπὸ τὴν κάθετον ϗ ἀπὸ τὴν ζητουμένην πλευρὰν· ϗ θέλεις κάμει ἔπειτα ταύτην τὴν δευτέραν ἀναλογίαν.

Συνημίτ. τῆς πρώτης πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας : Συνημίτ. τῆς δευτέρας πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας :: Συνεφαπτ. τῆς δοθείσης πλευρᾶς : Συνεφαπτ. τῆς ζητουμένης τυμένης πλευρᾶς. Αὐτὴ εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν δευτέραν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

161. Δοθεισῶν τῶν δύω γωνιῶν, καὶ τῆς περιεχομένης πλευρᾶς, ᾽νὰ εὕρῃ τὶς τὴν τρίτην γωνίαν.

Εἰς τοῦτο τὸ πρόβλημα δύναταί τις νὰ σύρῃ τὴν κάθετον ἀδιαφόρως ἢ ἀπὸ τὴν μίαν ἢ ἀπὸ τὴν ἄλλην ἀπὸ τὰς δοθείσας γωνίας ἐπάνω εἰς τὴν ὑπεναντίον πλευράν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν γωνίαν Β $= \left\{\begin{array}{c} 52^{\circ},20' \\ 124,30 \\ 32,26 \end{array}\right\}$ μοίρας, τὴν δὲ Γ $= \left\{\begin{array}{c} 114^{\circ},45' \\ 26,41 \\ 60,1 \end{array}\right\}$, καὶ

τὴν πλευρὰν ΒΓ $= \left\{\begin{array}{c} 27^{\circ},15 \\ 51,32 \\ 57,43 \end{array}\right\}$· καὶ ζητῶ τὴν γωνίαν Α.

Ζητῶ λοιπὸν τὴν κάθετον ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΔ, καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα· καὶ εὑρίσκω τὴν ζητουμένην γωνίαν ΒΑΓ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ διὰ τῆς ἀναλογίας τοῦ ἕκτου προβλήματος (141), ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐδῶ $26^{\circ},30'$. $42^{\circ},35'$. $100^{\circ},0'$.

ΛΥΣΙΣ τοῦ αὐτοῦ προβλήματος μὲ δύω ἀναλογίας.

Ἡμιδ. : Ἐφαπτ. τῆς ἐπὶ τῆς βάσεως δοθείσης γωνίας :: Συνημίτ. τῆς δοθείσης πλευρᾶς : Συνεφαπτ. τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πρώτης γωνίας, ἥτις εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

Λαμβάνω, κατὰ τὴν θέσιν τῆς καθέτου, ἢ τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πρώτης γωνίας, καὶ τῆς γωνίας, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἔσυρα αὐτὴν

τὴν κάθετον κ̓ εὑρίσκω τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ δευτέραν γωνίαν. Καὶ ἔπειτα κάμνω ταύτην δευτέραν ἀναλογίαν.

Ἡμίτ. τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πρώτης γωνίας : Ἡμίτ. τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ δευτέρας γωνίας :: Συνημίτ. τῆς ἐπὶ τῆς βάσεως δοθείσης γωνίας : Συνημίτ. τῆς ζητουμένης γωνίας.

Εἰ μὲν ἡ κάθετος πίπτει ἐντὸς τοῦ τριγώνου, αὐτὴ ἡ γωνία εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν ἐπὶ τῆς βάσεως δοθεῖσαν γωνίαν, εἰ δὲ μή, εἶναι διαφόρου εἴδους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ.

162. Δοθεισῶν τῶν δύω πλευρῶν, κ̓ τῆς ὑπεναντίου γωνίας εἰς μίαν ἀπὸ τὰς δύω, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν ὑπεναντίον γωνίαν εἰς τὴν ἄλλην πλευράν.

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ζητουμένην γωνίαν λέγω (130) Ἡμίτ. τῆς ὑπεναντίου πλευρᾶς τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ : Ἡμίτο. αὐτῆς τῆς γωνίας :: Ἡμίτο. τῆς ἄλλης δοθείσης πλευρᾶς : Ἡμίτο. τῆς ζητουμένης γωνίας. Ἀμφίβολον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΒΓ $= \left\{\begin{matrix} 27^\circ,15' \\ 51\ ,32 \\ 57\ ,43 \end{matrix}\right\}$ μοίρας, τὴν δὲ ΑΓ $= \left\{\begin{matrix} 54^\circ,19' \\ 72\ ,29 \\ 27\ ,25 \end{matrix}\right\}$, κ̓ τὴν γωνίαν Α $= \left\{\begin{matrix} 26^\circ,30' \\ 42\ ,35 \\ 100\ ,\ 0 \end{matrix}\right\}$· κ̓ ζητῶ τὴν γωνίαν Β.

Ἀπόκρ. $52^\circ,20$. $124^\circ,30'$. $32^\circ,26'$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζʹ.

163. Δοθεισῶν τῶν δύω πλευρῶν, κ̓ μιᾶς ἀπὸ

τὰς γωνίας, ἥτις ὑποτάνει ἐις μίαν ἀπὸ αὐτὰς, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν τρίτην πλευράν.

Τραβίζω τὴν κάθετον ἀπὸ τὴν ὑπεναντίον γωνίαν ἐις τὴν ζητεμένην πλευράν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΑΓ $= \left\{\begin{matrix} 54^\circ,19' \\ 72,29 \\ 27,25 \end{matrix}\right\}$ μοίρας, τὴν δὲ ΒΓ $= \left\{\begin{matrix} 27^\circ,15' \\ 51,32 \\ 57,43 \end{matrix}\right\}$, κ τὴν γωνίαν Β $= \left\{\begin{matrix} 52^\circ,20' \\ 124,30 \\ 32,26 \end{matrix}\right\}$· κ ζητῶ τὴν πλευρὰν ΑΒ.

Ζητῶ τὴν κάθετον ΓΔ, ἀχθεῖσαν ἀπὸ τὴν γωνίαν Γ ἐπάνω ἐις τὴν ζητεμένην πλευρὰν ΑΒ, κ τὸ τμῆμα ΒΔ, καθὼς ἐις τὸ τρίτον πρόβλημα (159), διὰ δὲ τῆς ἀναλογίας τοῦ θ' προβλήματος (144) εὑρίσκω τὸ ἄλλο τμῆμα ΑΔ, τὸ ὁποῖον θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν ΑΓ. Τὸ κεφάλαιον λοιπὸν ἢ ἡ διαφορὰ αὐτῶν τῶν δύω τμημάτων θέλει μὲ δώσει τὴν πλευράν. ΑΒ $=68^\circ,43'$. $31^\circ,19'$. $48^\circ,2'$.

ΛΥΣΙΣ τοῦ ἰδίου προβλήματος μὲ δύω ἀναλογίας.

Ἡμιδ. : Συνημίτ. τῆς δοθείσης γωνίας :: Ἐφαπτ. τῆς πλευρᾶς τῆς πρὸς αὐτῇ τῇ γωνίᾳ : Ἐφαπτ. τοῦ πρώτου τμήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν πλευρὰν, τὴν πρὸς τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ κειμένην.

Συνημίτ. τῆς πρὸς τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ πλευρᾶς : Συνημίτ. τῆς ὑπεναντίον πλευρᾶς ἐις αὐτὴν τὴν γωνίαν :: Συνημίτ. τοῦ πρώτου τμήματος : Συνημίτ. τοῦ δευτέρου τμήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν πλευρὰν ἐκείνην, ἥτις ἀντίκειται ἐις τὴν δοθεῖσαν γωνίαν.

Εἰ μὲν ἡ κάθετος πίπτει ἐντὸς τοῦ τριγώνου, τὸ κεφάλαιον τῶν δύω τμημάτων θέλει δώσει τὴν δύναμιν τῆς ζητουμένης πλευρᾶς, εἰ δὲ μή, ἡ διαφορὰ αὐτῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

164. Δοθεισῶν τῶν δύω πλευρῶν καὶ μιᾶς ἀπὸ τὰς γωνίας, ἥτις ὑποτείνει εἰς μίαν ἀπὸ τὰς δύω, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν γωνίαν, τὴν περιεχομένην ἀπὸ αὐτὰς τὰς δύω πλευράς.

Ἡ κάθετος θέλει ἀχθῇ ἀπὸ τὴν ζητουμένην γωνίαν ἐπάνω εἰς τὴν ὑπεναντίον αὐτῆς πλευράν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΑΓ=

$$\begin{Bmatrix} 54°,19' \\ 72\ ,29 \\ 27\ ,25 \end{Bmatrix} \text{ μοίρας, τὴν δὲ ΒΓ} = \begin{Bmatrix} 27°,15' \\ 51\ ,32 \\ 57\ ,43 \end{Bmatrix}, \text{ καὶ τὴν}$$

$$\text{γωνίαν Β} = \begin{Bmatrix} 52°,20' \\ 124\ ,30 \\ 32\ ,26 \end{Bmatrix} \text{· καὶ ζητῶ τὴν γωνίαν Γ.}$$

Ἀφ' οὗ τραβίξω ἀπὸ τὴν ζητουμένην γωνίαν Γ τὴν κάθετον ΓΔ, ζητῶ τὴν δύναμιν αὐτῆς καὶ τῆς γωνίας ΒΓΔ, καθὼς εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα (158). Διὰ δὲ τῆς ἀναλογίας τοῦ δεκάτου προβλήματος (145) ζητῶ τὴν γωνίαν ΑΓΔ, ἥτις θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν ΑΓ. Λαμβάνω λοιπὸν τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύω γωνιῶν ΒΓΔ, ΑΓΔ, κατὰ τὴν πτῶσιν τῆς καθέτου, ἂν πίπτῃ ἐντὸς ἢ ἐκτός· καὶ ἔχω τὴν ζητουμένην γωνίαν ΑΓΒ=114°,45'. 26°,41'. 60°,1'.

ΛΥΣΙΣ. τοῦ αὐτοῦ προβλήματος μὲ δύω ἀναλογίας.

Ἡμιδ. : Ἐφαπτ. τῆς δοθείσης γωνίας :: Συνημίτ.

τῆς πλευρᾶς τῆς πρὸς αὐτῇ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ : Συνεφαπτ. τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πρώτης γωνίας, ἥτις θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν πρὸς τῇ δοθείσῃ γωνίαν πλευρᾷ.

Ἐφαπτ. τῆς ὑπεναντίον πλευρᾶς εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν : Ἐφαπτο. τῆς πλευρᾶς τῆς πρὸς αὐτῇ τῇ γωνίᾳ :: Συνημίτ. τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πρώτης γωνίας : Συνημίτ. τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ δευτέρας γωνίας, ἥτις θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν ὑπεναντίον πλευρὰν εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν.

Καὶ ἂν ἡ κάθετος πίπτῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου, συνάπτω τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ δύω γωνίας, ἂν δὲ μή, λαμβάνω τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

165. Δοθεισῶν τῶν δύω πλευρῶν καὶ τῆς περιχομένης γωνίας, νὰ εὕρῃ τὶς μίαν ἀπὸ τὰς λοιπὰς γωνίας.

Σύρω τὴν κάθετον ἐπάνω εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευράν, τὴν πρὸς τῇ ζητουμένῃ γωνίᾳ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἐγὼ ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν

$$AB = \begin{Bmatrix} 68°,43' \\ 31\ ,18 \\ 48\ ,\ 2 \end{Bmatrix} \text{ μοίρας, τὴν δὲ } B\Gamma = \begin{Bmatrix} 27°,15' \\ 51\ ,32 \\ 57\ ,48 \end{Bmatrix}$$

καὶ τὴν γωνίαν $B = \begin{Bmatrix} 52°,20' \\ 124\ ,30 \\ 32\ ,26 \end{Bmatrix}$ · καὶ ζητῶ τὴν γωνίαν Α.

Εὑρίσκω τὴν κάθετον ΓΔ, καὶ τὸ τμῆμα ΒΔ, καθὼς εἰς τὸ τρίτον πρόβλημα (159). Λαμβάνω τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν τῆς ΑΒ καὶ ΒΔ, διὰ νὰ λάβω τὸ τμῆμα ΑΔ, μὲ τὸ ὁποῖον, καὶ μὲ τὴν κάθετον ΓΔ ζητῶ (142) τὴν ζητυμένην γωνίαν ΒΑΓ, ἥτις θέλει εἶσθαι τῦ αὐτῦ εἴδυς μὲ τὴν ΓΔ. Εὑρίσκω δὲ αὐτὴν ἐς τὰ προκάμενα παραδάγματα $=26°,30'.42°,35'.100°,0'$.

ΛΥΣΙΣ τῦ αὐτῦ προβλήματος μὲ δύω ἀναλογίας.

Ἡμιδ. : Συνημίτ. τῆς δοθάσης γωνίας :: Ἐφαπτ. τῆς ὑπεναντίον πλευρᾶς τῇ ζητυμένῃ γωνίᾳ : Ἐφαπτ. τῦ πρώτυ τμήματος.

Τῦτο τὸ πρῶτον τμῆμα θέλει εἶσθαι τῦ αὐτῦ εἴδυς μὲ τὴν ὑπεναντίον πλευρὰν τῇ ζητυμένῃ γωνίᾳ.

Λαμβάνω τὸ κεφάλαιον ἢ τὴν διαφορὰν αὐτῦ τῦ πρώτυ τμήματος, καὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πρὸς τῇ ζητυμένῃ γωνίᾳ, ἐπάνω τῆς ὁποίας πίπτει ἡ κάθετος. Λαμβάνω τὸ κεφάλαιον, ἂν ἡ δοθᾶσα γωνία ἦναι ἀμβλᾶα, λαμβάνω δὲ τὴν διαφορὰν, ἂν αὐτὴ ἡ γωνία ἦναι ὀξᾶα. Καὶ ὕτως εὑρίσκω τὸ δεύτερον τμῆμα· ἔπειτα κάμνω ταύτην τὴν δευτέραν ἀναλογίαν.

Ἡμίτ. τῦ δευτέρυ τμήματος : Ἡμίτ. τῦ πρώτυ τμήματος :: Ἐφαπτ. τῆς δοθάσης γωνίας : Ἐφαπτ. τῆς ζητυμένης.

Ἀνίσως τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ τὴν πλευρὰν, ἐπάνω τῆς ὁποίας πίπτει ἡ κάθετος, τὸ ὁποῖον συμβαίνει, ὁπόταν ἡ κάθετος πίπτῃ ἐκτὸς τῦ τριγώνυ, τότε ἡ ζητυμένη γωνία θέλει εἶσθαι διαφόρυ εἴδυς μὲ τὴν δοθᾶσαν γωνίαν· ἂν δὲ ἡ κάθετος πίπτῃ ἐντὸς τῦ τριγώνυ, αὐταὶ αἱ δύω γωνίαι θέλυν εἶσθαι τῦ αὐτῦ εἴδυς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

166. *Δοθέντων τῶν δύω πλευρῶν, ϗ τῆς περιεχομένης γωνίας, νὰ εὕρῃ τις τὴν τρίτην πλευράν.*

Τραβῶ τὴν κάθετον ἀπὸ μιᾶς τῶν ἀγνώστων γωνιῶν ἐπάνω εἰς τὴν δοθεῖσαν ὑπεναντίον πλευράν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ $=\left\{\begin{matrix}68^\circ,43' \\ 31,18 \\ 48,\ 2\end{matrix}\right\}$ μοίρας, τὴν δὲ ΒΓ $=\left\{\begin{matrix}27^\circ,15' \\ 51,32 \\ 57,43\end{matrix}\right\}$, ϗ τὴν γωνίαν Β $=\left\{\begin{matrix}52^\circ,20' \\ 124,30 \\ 32,26\end{matrix}\right\}$· ϗ ζητῶ τὴν πλευρὰν ΑΓ.

Λογαριάζω τὴν κάθετον ΓΔ, ϗ τὸ τμῆμα ΑΔ, καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα· ϗ εὑρίσκω τὴν πλευρὰν ΑΓ διὰ τῆς ἀναλογίας τοῦ ἑβδόμου προβλήματος (142). Αὐτὴ ἡ πλευρὰ θέλει εἶσθαι πάντοτε τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὸ τμῆμα ΑΔ, ἥτις ἐδῶ εἶναι $= 54^\circ,19'$. $72^\circ,28$. $27^\circ,25'$.

ΛΥΣΙΣ τοῦ ἰδίου προβλήματος μὲ δύω ἀναλογίας.

Ἡμιδ. : Συνημιτ. τῆς δοθείσης γωνίας :: Ἐφαπτ. τῆς πλευρᾶς τῆς πρὸς τῇ γωνίᾳ, ἀφ' ἧς ἤχθη ἡ κάθετος : Ἐφαπτ. τοῦ πρώτου τμήματος.

Τοῦτο τὸ τμῆμα θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν πλευρὰν τὴν πρὸς τῇ γωνίᾳ, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἤχθη ἡ κάθετος.

Λαμβάνω τὸ κεφάλαιον τούτου τοῦ πρώτου τμήματος ϗ τῆς πλευρᾶς, ἐπάνω τῆς ὁποίας πίπτει ἡ κάθε-

τος, ἂν ἡ δοθεῖσα γωνία ἦναι ἀμβλεῖα, εἰ δὲ μή, λαμβάνω τὴν διαφορὰν αὐτῶν· κ̀ εὑρίσκω τὸ δεύτερον τμῆμα, ἔπειτα λέγω.

Συνημίτ. τοῦ πρώτου τμήματος : Συνημίτ. τοῦ δευτέρου τμήματος :: Συνημίτ. τῆς πλευρᾶς τῆς πρὸς τῇ γωνίᾳ, ἀφ' ἧς ἤχθη ἡ κάθετος : Σιυνημίτ. τῆς ζητουμένης πλευρᾶς.

Αὐτὴ θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὸ δεύτερον τμῆμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

167. *Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν, νὰ εὕρῃ τὶς μίαν ἀπὸ τὰς γωνίας.*

Ἡ ζητουμένη αὕτη γωνία εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀκολούθου ἀναλογίας.

Τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἡμιτόνων τῶν δύω πλευρῶν τῶν τὴν ζητουμένην γωνίαν περιεχουσῶν,

Στέκει πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἡμιτόνων τῶν δύω ὑπεροχῶν τοῦ ἡμίσεος τοῦ κεφαλαίου τῶν τριῶν πλευρῶν ἐφ' ἑκατέρας τούτων τῶν δύω πλευρῶν.

Ὥσπερ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου,

Πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιτόνου τῆς ἡμισείας ζητουμένης γωνίας.

Ἡ πρᾶξις αὐτῆς τῆς ἀναλογίας δὲν διαφέρει σχεδὸν τελείως ἀπὸ τὸν κανόνα, τὸν ὁποῖον ἡμεῖς ἐδώκαμεν διὰ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα (107 κ̀ 108)· *κ̀ διὰ τοῦτο δύναταί τις νὰ τὴν ἐξηγήσῃ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον.*

Σύ-

Σύναψον ὁμȣ̃ τὰς τρεῖς πλευράς. Λάβε τὸ ἥμισυ τȣ̃ κεφαλαίȣ. Ἄφελε ἀπ' αὐτὸ τὸ ἥμισυ μίαν πρὸς μίαν τὰς δύω πλευρὰς, ὁπȣ̃ περιέχȣν τὴν ζητȣμένην γωνίαν. Σύναψον ὁμȣ̃ τὰς ἡμιτονολογαρίθμȣς τῶν δύω διαφορῶν μὲ τὰ ἀριθμητικὰ παραπληρώματα τῶν ἡμιτονολογαρίθμων τῶν δύω πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχȣν τὴν ζητȣμένην γωνίαν. Λάβε τὸ ἥμισυ τȣ̃ κεφαλαίȣ κ̓ αὐτὸ θέλει εἶσθαι ὁ ἡμιτονολογάριθμος τῆς ἡμισείας ζητȣμένης γωνίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν πλευρὰν ΑΒ = 69°,28', τὴν δὲ ΑΓ = 40°,30', τὴν δὲ ΒΓ = 37°,0' κ̓ ζητῶ τὴν γωνίαν Α.

ΠΡΑΞΙΣ.

ΒΓ	37°,0'		
ΑΒ	69 ,28	ἡμιτονολογ.	(α) 9.971493
ΑΓ	40 ,30	ἡμιτονολογ.	(β) 9.812544
Κεφ. τῶν τριῶν πλευρῶν	146°,58		
Ἥμισυ	73 ,29	(α) ἀριθ. παρ.	0.028507
		(β) ἀριθ. παρ.	0.187456
α'. Διαφ.	4°, 1'	ἡμιτονολογ.	8.845387
β'. Διαφ.	32 ,59	ἡμιτονολογ.	9.735914
Κεφ. τῶν ἡμιτ. τῶν δύω διαφ. κ̓ τῶν ἀριθ. παρ.			18.797264
Ἡμικεφ. Ἡμιτονολογ. ἡμισείας γωνίας Α = 14°,30'			9.398632
Ἡ ζητȣμένη λοιπὸν γωνία . . .	Α = 29 , 0'		

ΑΛΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ = $\left\{ \begin{matrix} 41°,36' \\ 74 ,20 \end{matrix} \right\}$ μοίρας, τὴν δὲ ΑΓ =

$= \left\{ \begin{matrix} 94^\circ,30' \\ 40\ ,30 \end{matrix} \right\}$, τὴν δὲ ΒΓ $= \left\{ \begin{matrix} 59^\circ,24' \\ 106\ ,18 \end{matrix} \right\}$· κ̀ ζητῶ τὴν γωνίαν Α.

Ἀπόκρι. $30^\circ,56'$. $141^\circ,0'$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'.

168. Δοθεισῶν τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, νὰ εὕρῃ τὶς, ὅποιαν θέλει ἀπὸ τὰς πλευράς.

Ἡ ζητουμένη πλευρὰ εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀκολούθου ἀναλογίας.

Τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἡμιτόνων τῶν δύω γωνιῶν τῶν πρὸς τῇ ζητουμένῃ γωνίᾳ,

Στέκει πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν συνημιτόνων τῶν δύω διαφορῶν μεταξὺ τοῦ ἡμίσεος τοῦ κεφαλαίου τῶν τριῶν γωνιῶν κ̀ ἑκατέρας αὐτῶν τῶν δύω προσκειμένων γωνιῶν.

Ὥσπερ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου,

Πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ συνημιτόνου τοῦ ἡμίσεος τῆς ζητουμένης πλευρᾶς.

Ἡ πρᾶξις τῆς ἀναλογίας ταύτης ἀνάγεται εἰς τὸν ἀκόλουθον κανόνα, ὅστις εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν κανόνα τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

Λάβε τὴν διαφορὰν τὴν μεταξὺ τοῦ ἡμίσεος τοῦ κεφαλαίου τῶν τριῶν γωνιῶν, κ̀ ἑκατέρας τῶν δύω τῶν πρὸς τῇ ζητουμένῃ πλευρᾷ, τὸ ὁποῖον θέλει σὲ δώσει δύω διαφοράς. Σύναψον ὁμοῦ τοὺς λογαρίθμους τῶν συνημιτόνων αὐτῶν τῶν διαφορῶν μετὰ ἀριθμητικὰ παραπληρώματα τῶν ἡμιτονολογαρίθμων τῶν δύω γω-