ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας.

110 Πᾶς ἕνας ἐξεύρει τὴν σήμερον, ὅτι ἡ γῆ δὲν εἶναι πλέον ἐπίπεδος, καθὼς ἐδόξαζον μερικοὶ ἀπὸ τοὺς παλαιοὺς, μήτε ἐπιστηρίζεται ἐπάνω εἰς τοὺς ὤμους τοῦ Ἄτλαντος, ἀλλ' εἶναι ἓν σῶμα σχεδὸν ὁλοστρόγγυλον ἀφ' ὅλα τὰ μέρη ὡσὰν μία σφαῖρα. Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι ὅταν τὶς πλέῃ ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Θαλάσσης, οὗτος περιγράφει μὲ τὸ ἴχνος τοῦ πλοίου του κάποια τόξα κύκλων, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ λάβωσιν αὔξησιν, καὶ νὰ σχηματίσουν κάθε εἶδος σχήματος, καθὼς αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ ἐπάνω εἰς μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν. Ὅθεν τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαίρας, καὶ περιορίζονται ἀπὸ τρία τόξα, ὀνομάζονται Τρίγωνα Σφαιρικὰ (47), καὶ ὁ λογαριασμὸς, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου λογαριάζονται ὀνομάζεται Σφαιρικὴ Τριγωνομετρία.

111. Οἱ κύκλοι, τοὺς ὁποίους δύναταί τις νὰ φαντασθῇ, ἢ νὰ περιγράψῃ ἐπάνω εἰς μίαν σφαῖραν, εἶναι δύω λογιῶν μεγάλοι καὶ μικροί. Μεγάλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται, ὅσοι δύνανται νὰ κόψουν τὴν σφαῖραν εἰς δύω ἴσα μέρη, καὶ ἔχουν τὸ κέντρον τους εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Μικροὶ κύκλοι λέγονται, ὅσοι δὲν δύνανται νὰ τὴν κόψουν εἰς δύω ἴσα μέρη, μήτε ἔχουσι τὸ ἴδιον κέντρον αὐτῆς.

Ἡ σφαιρικὴ λοιπὸν τριγωνομετρία δὲν θεωρεῖ, παρὰ τὰ τόξα τῶν μεγάλων κύκλων· διότι μ' ὅλον ὅτι, καθὼς εἴπομεν, κάθε κύκλος μικρὸς ἢ μεγάλος διαιρεῖται εἰς 360° μοίρας, μ' ὅλον τοῦτο αἱ μοῖραι τῶν μικρῶν κύκλων δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι κατὰ τὸ μέγεθος· ἀλλ' οἱ μεγάλοι κύκλοι, ὅτινες γράφονται ἢ ἐννοοῦνται ὡς γραμμένοι ἐπάνω εἰς μίαν σφαῖραν, μὲ τὸ νὰ ἀπερνοῦν ὅλοι ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον καὶ τὴν αὐτὴν ἡμιδιάμετρον μὲ τὴν σφαῖραν, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ὅλοι ἴσοι ἀναμεταξύ των καὶ ἑπομένως αἱ μοῖραι αὐτῶν εἶναι ὅλαι ἴσαι ἀναμεταξύ των κατὰ τὸ μέγεθος.

Προτάσεις καθόλου.

112. α΄. Πόλοι ἑνὸς μεγάλου κύκλου, ὁποίου καὶ ἂν ἦναι, λέγονται δύω σημεῖα ἐκ διαμέτρου ἀντικείμενα τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο, καὶ ἀπέχουν ἀφ' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου 90° μοίρας.

Καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου, ἂν ἕνα σημεῖον Α, ἢ ὁποῖον καὶ ἂν ἦναι, τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ΑΦΠΞ (σχη: η΄) ἀφίσταται 90° μοίρας ἀπὸ δύω σημεῖα Δ καὶ Φ τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγάλου κύκλου, αὐτὸ τὸ σημεῖον Α λέγεται πόλος τοῦ ἰδίου κύκλου.

113. β΄. Ὅταν ἓν τόξον ΒΦ ἑνὸς μεγάλου κύκλου ἦναι κάθετον ἐπάνω εἰς ἓν ἄλλο ΔΦ τόξον ἑνὸς ἄλλου μεγάλου κύκλου, τότε αὐτὸ τὸ τόξον ἀπερνᾷ ἀναγκαίως ἀπὸ τοὺς πόλους τούτου τοῦ κύκλου, ἢ τοὐλάχιστον θέλει ἀπεράσει ἀπὸ τοὺς πόλους αὐτοῦ ἐξαγόμενον ἀποχρώντως.

114. γ'. Ἐὰν δύω τόξα ΒΦ ϗ ΓΔ ἑνὸς μεγάλυ κύκλυ ἦναι κάθετα ἐπάνω εἰς ἓν τρίτον τόξον ἑνὸς μεγάλυ κύκλυ ΔΦ, τὸ σημεῖον Α, κατὰ τὸ ὁποῖον συμπίπτυσιν, εἶναι ὁ πόλος τῦ τρίτυ τόξυ, ϗ ἑπομένως τῦ μεγάλυ κύκλυ.

115. δ'. Μέτρον μιᾶς σφαιρικῆς γωνίας ΒΑΓ εἶναι τὸ τόξον ΔΦ τῦ μεγάλυ κύκλυ, μεταξὺ τῦ ὁποίυ ϗ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας, ἐναπολαμβάνονται αἱ πλευραὶ αὐτῆς (ἐκβαλλόμεναι ἂν κάμῃ χρεῖα) 90° μοιρῶν.

116. ε'. Αἱ κατὰ τὴν κορυφὴν ἀντικείμεναι σφαιρικαὶ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ τὴν κοινὴν τομὴν δύω τόξων μεγάλων κύκλων, εἶναι ἴσαι ἀναμεταξύτων.

Ἰδιότητες τῶν Σφαιρικῶν Τριγώνων.

117. „ α'. Κάθε μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς σφαι-
„ ρικῦ τριγώνυ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν
„ δύω ἄλλων.

118. „ β'. Κάθε μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἢ ἀπὸ τὰς
„ γωνίας ἑνὸς σφαιρικῦ τριγώνυ εἶναι πάντοτε μικρο-
„ τέρα ἀπὸ 180° μοίρας.

119. „ γ'. Τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς
„ σφαιρικῦ τριγώνυ εἶναι πάντοτε ἧττον ἀπὸ 360°.
„ μοίρας.

120. „ δ'. Τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς
„ σφαιρικῦ τριγώνυ εἶναι πάντοτε μεγαλήτερον μὲν
„ ἀπὸ 180° μοίρας, μικρότερον δὲ ἀπὸ 540°. Ἕπεται ἀπ' ἐδῶ, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς σφαιρικῦ τριγώνυ δύνανται νὰ ἦναι εἰς τὸν ἴδιον καιρὸν ἢ πᾶσαι ὀξεῖαι,

ἢ ὀρθαὶ, ἢ ἀμβλεῖαι, κτ. κ̀ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν ὅταν τις ἐξεύρῃ τὰς δύω δὲν δύναται νὰ εὕρῃ κ̀ τὴν τρίτην ἀμέσως, καθὼς εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα (54).

121. „ έ. Εἰς ἓν ἰσοσμελὲς σφαιρικὸν τρίγωνον, „ αἱ δύω γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ὑποτείνουσιν εἰς τὰς ἴσας „ πλευρὰς, εἶναι ἴσαι ἀναμεταξύτων. Καὶ ἐκ τοῦ ἐναν„ τίου ὅταν αἱ δύω γωνίαι ἦναι ἴσαι ἀναμεταξύτων, „ αἱ εἰς αὐτὰς ὑποτείνουσαι πλευραὶ εἶναι ὡσαύτως ἴσαι.

122. „ ς'. Ἐν παντὶ σφαιρικῷ τριγώνῳ ἡ μεγα„ λητέρα πλευρὰ ὑποτείνει εἰς τὴν μεγαλητέραν γω„ νίαν, κ̀ ἡ μικροτέρα εἰς τὴν μικροτέραν, κ̀ αἱ ἴσαι „ πλευραὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας, καθὼς κ̀ εἰς τὰ εὐ„ θύγραμμα τρίγωνα (56).

Μέσα, διὰ τῶν ὁποίων δύναταί τις νὰ γνωρίσῃ εἰς ποῖον συμβεβηκὸς πρέπει νὰ ἦναι μεγαλήτεραι ἢ μικρότεραι ἀπὸ 90° μοίρας αἱ γωνίαι ἢ αἱ πλευραὶ, τὰς ὁποίας ζητεῖ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις σφαιρικοῖς Τριγώνοις.

123. „ Ἑκατέρα ἀπὸ τὰς δύω λοξὰς γωνίας ἑνὸς „ ὀρθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι πάντοτε τοῦ αὐτοῦ „ εἴδους μὲ τὴν πλευρὰν, ἡ ὁποία ὑποτείνει εἰς αὐτὴν τὴν „ γωνίαν „ ἤγουν ἐὰν ἡ πλευρὰ ἦναι 90° μοιρῶν, κ̀ ἡ γωνία ὡσαύτως εἶναι μοιρῶν 90°· κ̀ ἂν ἡ πλευρὰ ἦναι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας, ὡσαύτως κ̀ ἡ γωνία εἶναι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας.

124. „ Ἐὰν αἱ δύω πλευραὶ, ἢ αἱ δύω γωνίαι

„ ἑνὸς ὀρθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου ἦναι τόσον ἡ μία „ ὡσὰν κ' ἡ ἄλλη μικρότεραι, ἢ μεγαλήτεραι ἀπὸ 90° „ μοίρας, ἡ ὑποτείνουσα θέλει εἶσθαι πάντοτε μικρο- „ τέρα ἀπὸ 90° μοίρας. Καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου θέλει „ εἶσθαι μεγαλητέρα ἀπὸ 90° μοίρας, ἂν αἱ δύω „ πλευραὶ, ἢ αἱ δύω γωνίαι ἦναι διαφόρου εἴδους.

125. „ Ἐὰν μία πλευρὰ κ' ἡ παρ' αὐτὴν λοξὴ „ γωνία ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἡ ὑποτείνουσα θέλει εἶσθαι „ μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας· ἂν ὅμως ἡ μία πλευρὰ „ κ' ἡ παρ' αὐτὴν γωνία ἦναι διαφόρου εἴδους, ἡ ὑπο- „ τείνουσα θέλει εἶσθαι μεγαλητέρα ἀπὸ 90° μοίρας.

126. „ Ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα ἦναι μικροτέρα ἀπὸ 90° „ μοίρας, αἱ λοξαὶ γωνίαι κ' αἱ πλευραὶ θέλουν εἶσθαι „ τοῦ αὐτοῦ εἴδους ἀναμεταξύ των· ἂν ὅμως ἡ ὑποτεί- „ νουσα ἦναι μεγαλητέρα ἀπὸ 90° μοίρας, αἱ γω- „ νίαι κ' αἱ πλευραὶ θέλουν εἶσθαι διαφόρου εἴδους.

127. „ Ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα κ' μία πλευρὰ ἦναι τοῦ „ αὐτοῦ εἴδους, ἡ τρίτη πλευρὰ κ' ἡ ἀντικειμένη εἰς αὐτὴν „ γωνία θέλουν εἶσθαι μικρότεραι ἀπὸ 90° μοίρας· „ ἂν δὲ ἡ ὑποτείνουσα κ' μία πλευρὰ ἦναι διαφόρου εἴδους, „ ἡ ἄλλη πλευρὰ κ' ἡ ἀντικειμένη εἰς αὐτὴν γωνία „ θέλουν εἶσθαι μεγαλήτεραι ἀπὸ 90° μοίρας.

128. „ Ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα κ' μία ἀπὸ τὰς λοξὰς „ γωνίας ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἡ λοιπὴ λοξὴ γωνία, „ κ' ἡ ἀντικειμένη εἰς αὐτὴν πλευρὰ θέλουν εἶσθαι μι- „ κρότεραι ἀπὸ 90° μοίρας· ἂν ὅμως ἡ ὑποτείνουσα „ κ' μία ἀπὸ τὰς λοξὰς γωνίας ἦναι διαφόρου εἴδους, „ ἡ λοιπὴ λοξὴ γωνία κ' ἡ ἀντικειμένη εἰς αὐτὴν πλευρὰ „ θέλουν εἶσθαι μεγαλήτεραι ἀπὸ 90° μοίρας.

129. Σημείωσαι ὅμως, ὅτι εὑρίσκονται μερικὰ συμβεβηκότα, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν δύναται νὰ καταλάβῃ

τις, ἂν τὸ μέρ☉, τὸ ὁποῖον ζητεῖ, ἦναι μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον ἀπὸ 90° μοίρας. Καὶ τῦτο συμβαίνει ὁπόταν τις, δοθείσης μιᾶς γωνίας κ̀ τῆς αντικειμένης εἰς αὐτὴν πλευρᾶς, ζητῇ τὴν ὑποτείνυσαν ἢ τὴν ἄλλην γωνίαν ἢ τὴν ἄλλην πλευράν. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐξεύρῃ ἀκόμη ἂν τὸ μέρ☉ ἑνὸς ὀρθογωνίυ σφαιρικῦ τριγώνυ, τὸ ὁποῖον ζητεῖ νὰ εὕρῃ, ἦναι μεγαλήτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ 90° μοίρας. Καὶ ἰδὺ εἰς τί συνίςανται ὅλα τὰ ἀμφίβολα συμβεβηκότα τῶν ὀρθογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων· εἰς δὲ τὰ λοιπὰ δύναται σχεδὸν τις νὰ καταλάβῃ παραχρῆμα ἀπὸ τὴν κατάςασιν τῦ ζητήματ☉, τὸ ὁποῖον προβάλλει νὰ λύσῃ εἰς τὴν Ἀςρονομίαν, κ̀ ἑπομένως εἰς τὴν προσαρμογὴν, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ κάμῃ εἰς τὴν Ναυτικὴν, ἂν αἱ ποσότητες, τὰς ὁποίας ζητεῖ, ἦναι μικρότεραι ἀπὸ 90° μοίρας.

Ἀρχαὶ περὶ τῆς Λύσεως τῶν Ὀρθογωνίων Σφαιρικῶν Τριγώνων.

130. Κάθε συμβεβηκὸς τῶν ὀρθογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων ἐμπορεῖ νὰ διαλυθῇ διὰ μέσυ μιᾶς τῶν ἀκολύθων ἀρχῶν.

ΑΡΧΗ. α'. Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον, ὅποιον κ̀ ἂν ἦναι, εἴτε λοξογώνιον, εἴτε ὀρθογώνιον εὑρίσκει τις πάντοτε τὰς ἀκολύθυς σχέσεις.

α'. Τὸ ἡμίτονον μιᾶς ἀπὸ τὰς γωνίας.

ςέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικημένης εἰς αὐτὴν πλευρᾶς.

Ὥςπερ τὸ ἡμίτονον μιᾶς ἄλλης γωνίας,

ςέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πλευρᾶς ἥτις ἀντίκειται εἰς αὐτήν.

Καὶ ἐκ τῦ ἐναντίυ.

β'. Τὸ ἡμίτονον μιᾶς τῶν πλευρῶν,
στέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικειμένης γωνίας εἰς αὐτήν,
Ὥσπερ τὸ ἡμίτονον μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς.
στέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικειμένης γωνίας εἰς αὐτήν.

131. ἈΡΧΗ β'. Εἰς ὅλα τὰ ὀρθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα δυναταί τις πρὸς τούτοις νὰ εὕρῃ τὰς ἀκολούθους ἀναλογίας.

α'. Ἡ ἡμιδιάμετρος,
στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς τῶν λοξῶν γωνιῶν.
Ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς προσκειμένης εἰς αὐτὴν τὴν γωνίαν πλευρᾶς,
στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

β'. Ἡ ἐφαπομένη μιᾶς τῶν λοξῶν γωνιῶν,
στέκει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον.
Ὥσπερ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀντικειμένης εἰς αὐτὴν τὴν γωνίαν πλευρᾶς,
στέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

γ'. Τὸ ἡμίτονον μιᾶς τῶν πλευρῶν,
στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἄλλης πλευρᾶς.
Ὥσπερ ἡ ἡμιδιάμετρος,
στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀντικειμένης γωνίας εἰς αὐτὴν τὴν ἄλλην πλευράν.

132. Ὁπόταν τις ἔχῃ νὰ λύσῃ ἓν ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὰ διδόμενα μέρη δὲν τὸν συγχωροῦσι νὰ μεταχειρισθῇ κἂν μίαν ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἀρχὰς, τότε πρέπει νὰ δράμῃ εἰς τὴν ἀκόλουθον.

133. ΑΡΧΗ. γ'. Εἰς ὅλα τὰ ὀρθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ (σχη: Θ'.) ἐὰν τις ἐκβάλῃ τὴν μὲν ὑποτάνεσαν ΑΓ ἕως εἰς τὸ Δ σημεῖον, τὴν δὲ πλευρὰν ΒΓ ἕως εἰς τὸ Ε, κ̀ τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΒ ἕως εἰς τὸ Φ τόσον, ὥςε καθ' ἕνα ἀπὸ τὰ τόξα ΑΔ, ΒΕ κ̀ ΑΦ νὰ γένῃ 90° μοιρῶν, κ̀ περιγράφῃ τὸ τόξον τῦ μεγάλυ κύκλυ ΕΦ, γίνεται φανερὸν ὅτι θέλει τῦ γεννηθῆ ἄλλο ἕνα νέον τρίγωνον ΓΔΕ, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ Δ, τῦ ὁποίυ τὰ μέρη ἢ θέλυν εἶσθαι ἴσα μὲ τὰ μέρη τῦ πρώτυ τριγώνυ ΑΒΓ, ἢ θέλυν εἶσθαι παραπληρώματα αὐτῦ.

Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μὲν γωνία Δ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Β, ἡ δὲ γωνία ΓΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΓΒ. Καὶ ὅτι ἡ μὲν πλευρὰ ΓΕ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΒΓ, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΕ, παραπλήρωμα τῆς ΔΦ, ἥτις μετρεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ (40), εἶναι παραπλήρωμα τῆς αὐτῆς γωνίας ΒΑΓ, ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ὑποτεινύσης ΑΓ, ἡ δὲ γωνία Ε, ἥτις μετρεῖται ἀπὸ τὸ τόξον ΒΦ (40), παραπλήρωμα τῆς ΑΒ πλευρᾶς, εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΑΒ. Λοιπὸν τῷ ὄντι τὰ μέρη τῦ τριγώνυ ΑΒΓ, εἶναι ἢ ἴσα μὲ τὰ μέρη τῦ τριγώνυ ΑΒΓ, ἢ εἶναι παραπληρώματα αὐτῶν.

Ωσαύτως ἐὰν τις ἐκβάλῃ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος Α τῦ ΑΒΓ τριγώνυ τὴν ὑποτείνυσαν ΑΓ, κ̀ τὰς πλευρὰς ΑΒ κ̀ ΒΓ τόσον, ὥςε κάθε μία νὰ γένῃ 90° μοιρῶν, γίνεται φανερὸν ὅτι γεννᾶται τὸ τρίγωνον ΑΗΙ, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀποδείξῃ τὰ αὐτά.

134. Εἶναι φανερὸν λοιπὸν, ὅτι ὅταν τις γνωρίζῃ τρία μέρη τῦ τριγώνυ ΑΒΓ, θέλει γνωρίσῃ ὡσαύτως εἰς καθ' ἕνα ἀπὸ τὰ ἄλλα δύω τρίγωνα ΓΔΕ κ̀ ΑΗΙ.

ἄλλα τρία μέρη, ἐπάνω εἰς τὰ ὁποῖα ἐμπορεῖ νὰ προσαρμόσῃ μίαν ἀπὸ τὰς προειρημένας ἀναλογίας (130, κ̀ 131), ἀφ᾽ ȣ̃ ἔπειτα θέλει γιωρίσει τὰ μέρη τȣ̃ ΑΒΓ τριγώνȣ.

Λύσις τῶν Ὀρθογωνίων Σφαιρικῶν Τριγώνων.

135. Ἡ λύσις τῶν ὀρθογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων συμποσȣ̃ται μόνον εἰς δέκα κ̀ ἕξ συμβεβηκότα, τὰ ὁποῖα ἡμεῖς προβάλλομεν ἐδῶ εἰς προβλήματα, καθὼς κοινῶς συναθίζεται ἀπὸ ὅλȣς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

136. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς κ̀ τῆς γωνίας, ἥτις ἀντίκειται εἰς αὐτὴν, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν ὑποτείνȣσαν. Εἰς τȣ̃το τὸ πρόβλημα τὰ διδόμενα εἶναι τρία, α΄. μία πλευρὰ, β΄. ἡ ἀντικειμένη εἰς αὐτὴν γωνία, κ̀ γ΄. ἡ ὀρθὴ γωνία τȣ̃ τριγώνȣ· τὸ δὲ ζητȣ́μενον εἶναι ἡ ὑποτείνȣσα, ἥτις εὑρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς α΄ ἀναλογίας (130).

Τὸ ἡμίτονον τῆς δοθείσης γωνίας,
ςέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δοθείσης πλευρᾶς.
Ὥσπερ ἡ ἡμιδιάμετρος,
ςέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑποτεινȣ́σης.

Συμβεβηκὸς ἀμφίβολον· διὰ τȣ̃το πρέπει νὰ ἐξεύρῃ τὶς πρὸς τȣ́τοις, ἂν αὐτὴ ἦναι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας (129).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. α΄. Ἔςω τὸ ΑΒΓ σφαιρικὸν τρίγωνον (σχη: θ΄), τȣ̃ ὁποίȣ ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ ἔςω

$=23°,15'$· ἡ δὲ γωνία Γ$=36°,20'$· κ᾽ ἂς ζητηθῇ ἡ ὑποτάνυσα ΑΓ.

ΠΡΑΞΙΣ.

Τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ$=36°,20'$: Ημίτο. τῆς πλευρᾶς ΑΒ$=23°,15$ :: Ημιδιάμετρ⊙ ἢ τὸ ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας Β : Ημίτονον τῆς ὑποτανύσης ΑΓ, ἥτις εὑρίσκεται $41°,47'$.

Λογ. $23°,15'$ . . .	9.596315
Λογ. ἡμιδιαμέτρ. . .	10.000000
Αριθμ. παραπ. τῦ Λογ. ἡμιτ. Γ$=36°,20'$	0.227325
Κεφ.	9.823640

Οὗτ⊙ ὁ ἡμιτονολογάριθμ⊙ 9.823640 ἀνταποκρίνεται κυρίως εἰς τὰς $41°,47'$. Ὅθεν ἡ ὑποτάνυσα ΑΓ εἶναι $41°,47'$, ἂν πρέπῃ νὰ ἦναι μικροτέρα ἀπὸ $90°$ μοίρας, κ᾽ εἶναι $138°,13'$, ἀναπλήρωμα τῶν $41°,47'$, ἂν πρέπῃ νὰ ἦναι μεγαλητέρα ἀπὸ $90°$ μοίρας· διότι εἰς τῦτο τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόρις⊙ ἡ ὑποτάνυσα τὸ νὰ ἦναι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἀπὸ $90°$ μοίρας, κ᾽ διὰ τῦτο αἱ δύω λύσεις δύνανται νὰ ἔχωσι χώραν, καθὼς ἐμπορεῖ τὶς νὰ πληροφορηθῇ εὐκόλως ἀπὸ τὸ ι'. σχῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον τὰ δύω τρίγωνα ΑΒΓ κ᾽ ΑΘΗ δύνανται, μὲ τὴν αὐτὴν γωνίαν Α, νὰ ἔχωσι τὴν μὲν πλευρὰν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν ΘΗ, τὰς δὲ ὑποτανύσας ΑΡ κ᾽ ΑΗ διαφόρυς· ἂν ὅμως μακρύνῃ τὴν ΑΓ κ᾽ ΑΒ ἕως ὃ νὰ συμπέσυν εἰς τὸ Π, θέλει ἰδεῖ ὅτι ἡ ΑΗ εἶναι ἀναπλήρωμα τῆς

ΑΓ· διότι αὐτὴ εἶναι ἀναπλήρωμα τῆς ΠΗ, ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓ, ὅταν ἡ ΘΗ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β'. Ὑποθέτω τὴν πλευρὰν ΒΓ=30°, τὴν δὲ γωνίαν Α=50°· καὶ ζητῶ τὴν ὑποτάνυσαν ΑΓ. Απόκρι: 40°,45', ἢ 139°,15'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

137. Δοθάσης μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῆς γωνίας, ἥτις ὑποτάνει ἐς αὐτὴν, νὰ εὕρῃ τις τὴν λοιπὴν λοξὴν γωνίαν.

Ἐὰν ἐκτάνω τὰς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, δύναμαι νὰ μεταχειρισθῶ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν (130) οὕτω.

Τὸ συνημίτονον τῆς δοθείσης πλευρᾶς,
ςέκει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον.
Ὥσπερ τὸ συνημίτονον τῆς δοθείσης γωνίας,
ςέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἄλλης γωνίας.

Συμβεβηκὸς ἀμφίβολον (129).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α'. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΒΓ=20°,15', τὴν δὲ γωνίαν Α=45°,10'· καὶ ζητῶ τὴν γωνίαν Γ (πίναξ ϛ'. σχη: θ').

Διὰ νὰ εὕρω λοιπὸν τὴν γωνίαν Γ, παρατηρῶ ὅτι δὲν δύναμαι νὰ προσαρμόσω εἰς τὸ ζήτημά μου οὐδεμίαν ἀπὸ τὰς ἑρμηνευθείσας ἀναλογίας τοῦ (130 καὶ 131)· διότι δὲν ἔχω, εἰμὴ δύω μόνον ὅρους γνωςοὺς, καὶ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν ἐγὼ καταφεύγω εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μὲν ΔΕ πλευρὰ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΔΦ, ἥτις εἶναι μέτρον τῆς Α γωνίας, ἡ δὲ πλευρὰ ἢ ἡ ὑποτάνυσα ΓΕ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΓΒ, καὶ ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν

ΑΓΒ, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ εὕρω. Ὅθεν εἰς τοῦτο τὸ τρίγωνον ΓΔΕ ἐγὼ δύναμαι νὰ προσαρμόσω εὐκόλως τὴν δευτέραν ἀναλογίαν τῆς πρώτης ἀρχῆς (130).

ΠΡΑΞΙΣ.

Τὸ ἡμίτονον τῆς ΓΕ $= 96°,45'$, παραπλήρ. τῆς ΒΓ : Ημιδι. ἢ ἡμίτο. τῆς ὀρθῆς γωνίας ΓΔΕ : : Ημίτο. τῆς ΔΕ $= 44°,50'$, παραπλήρ. τῆς Α : Ημίτο. τῆς γωνίας ΔΓΕ, ἥτις εὑρίσκεται 48°,43'

Λογ. ἡμιτ. ΔΕ=44°,50'	9.848218
Λογ. ἡμιδ. . . .	10.000000
Αριθμ. παρ. τοῦ Λογ. ἡμιτ. ΓΕ=69°,45'	0.027709
Κεφ.	9.875927

Βλέπω λοιπὸν εἰς τοὺς πίνακας τῶν ἡμιτόνων, ὅτι ὁ ἡμιτονολογάριθμος οὗτος 9.875927 ἀνταποκρίνεται εἰς 48°,43'. Ὅθεν ἡ γωνία ΔΓΕ, καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη γωνία ΑΓΒ εἶναι 48°,43', ἢ 131°,17'· διότι δὲν εἶναι προσδιωρισμένον ἐδῶ ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (πίναξ. ϛ'· σχη: θ') ἦναι τοιοῦτον, καθὼς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (πίναξ. ϛ'. σχ: ι'), ἢ τοιοῦτον καθὼς τὸ τρίγωνον ΑΘΗ τοῦ αὐτοῦ σχήματος· εἶναι λοιπὸν ἀπροσδιόριστον ἂν πρέπῃ νὰ λάβῃ τὶς τὴν γωνίαν ΑΓΒ ἢ τὴν γωνίαν ΑΗΘ, ἥτις εἶναι ἀναπλήρωμα αὐτῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β'. Ἐγὼ ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ=32°,20', τὴν δὲ γωνίαν Γ=48°,54'· καὶ ζητῶ τὴν γωνίαν Α.

Ἀπόκρ. εὑρίσκω αὐτὴν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΗΙ=51°,10', ἢ =128°,50'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

138. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς, καὶ τῆς γωνίας, ἥτις ὑποτείνει εἰς αὐτὴν, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν ἄλλην πλευράν.

Ἔχω ἀμέσως ἐκ τῆς δευτέρας ἀναλογίας τῆς β΄ ἀρχῆς (131).

Ἡ ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης γωνίας,
στέκει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον.
Ὥσπερ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γνωστῆς πλευρᾶς,
στέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ζητουμένης πλευρᾶς.

Συμβεβηκὸς ἀμφίβολον (129).

Καὶ ἂν βάλλω τὴν ἡμιδιάμετρον εἰς τὸν πρῶτον ὅρον, ἔχω.

Ἡ ἡμιδιάμετρος,
στέκει πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς γνωστῆς γωνίας..
Ὥσπερ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γνωστῆς πλευρᾶς,
στέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ζητουμένης πλευρᾶς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α΄. Ἔστω ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ=25°,40΄, ἡ δὲ γωνία Α = 50° καὶ ἂς ζητηθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ (πίναξ. ς΄. σχη: θ΄).

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ΑΒ πλευρὰν, δύναμαι νὰ μεταχειρισθῶ κατ' εὐθεῖαν τὴν δευτέραν ἀναλογίαν τῆς β΄. ἀρχῆς (131).

ΠΡΑΞΙΣ.

ΔΦ ἐφαπτομένη τῆς Α γωνίας = 50° : ΑΦ ἡμιδιάμετρον :: Ἐφαπτομένη τῆς ΒΓ=25°,40 : Ἡμίτονον τῆς ΑΒ=23°,47.

Σύναψον	Λογ. ἡμιδ.		10.000000
	Λογ. ἐφαπτο.	(25°,40)	9.681740
Αφαίρεσον	Κεφ.		19.681740
	Λογ. ἐφαπτο. .	(50°)	10.076186
	Διαφ.		9.605554

Ὁ ἡμιτονολογάριθμος οὗτος ἀνταποκρίνεται ἀς 23°,47′. Ἡ ζητυμένη λοιπὸν πλευρὰ ΑΒ εἶναι 23°,47′ ἢ 156°,13′· καθ᾽ ὃ ἤθελ᾽ εἶσθαι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας, ἢ καθ᾽ ὃ ἤθελ᾽ ἀνήκη ἀς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἢ ἀς τὸ τρίγωνον ΑΘΗ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β′. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ=59°,20′, τὴν δὲ γωνίαν Γ=75°· κὴ ζητῶ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Ἀπόκρ. 26°,52′, ἢ 153°,8′.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ′.

139. Δοθέισης μιᾶς πλευρᾶς, κὴ τῆς γωνίας, ἥτις περιέχεται ἀπ᾽ αὐτὴν κὴ ἀπὸ τὴν ὑποτάνυσαν, νὰ εὕρῃ τις τὴν ἄλλην πλευράν.

Εὑρίσκω δὲ αὐτὴν ἀμέσως ἐκ τῆς πρώτης ἀναλογίας τῆς δευτέρας ἀρχῆς (131).

Ἡ ἡμιδιάμετρος,

στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γνωστῆς γωνίας.

Ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γνωστῆς πλευρᾶς,

στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ζητυμένης πλευρᾶς,

ἥτις θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν (123).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α'. Ἔςω ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ = 50°, ἡ δὲ γωνία Α = 62°· κ̓ ἂς ζητηθῇ ἡ πλευρὰ ΒΓ (πίναξ. ϛ'. σχη: θ').

ΠΡΑΞΙΣ.

ΑΦ ἡμιδ. : ΔΦ Εφαπτο. τῆς Α = 62° :: Ημίτ. τῆς ΑΒ = 50° : Εφαπτο. τῆς ΒΓ = 55°,14'.

Σύναψον	Λογ. ἐφαπτ. (62°)	10.274326
	Λογ. ἡμιτ. (50°)	9.884254
Ἀφαίρεσον	Κεφ.	20,158580
	Λογ. ἡμιδ. . .	10.000000
	Διαφ.	10.158580

Ὁ ἡμιτονολογάριθμος ὗτος ἀνταποκρίνεται ἐς 55°,14'. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ΒΓ εἶναι 55°,14.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β'. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν ΒΓ = 48°,25', τὴν δὲ γωνίαν Γ = 53°,15'· κ̓ ζητῶ τὴν πλευρὰν ΑΒ·

Ἀπόκρ. 45°,3'.

Ὑπολαμβάνω ὅτι αὐτὰ τὰ παραδείγματα εἶναι ἱκανὰ νὰ καθοδηγήσουν τὸν καθ' ἕνα πῶς ἔχει νὰ πράττῃ κ̓ ἐς τὰ ἐπίλοιπα συμβεβηκότα. Διὰ νὰ μὴν ἀφήσω ὅμως τίποτε, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐπιθυμήσῃ τὶς ἐς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἐγὼ θέλω δώσει ἐς καθ' ἓν ἀπὸ τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα μένουν νὰ λυθοῦν, τὴν πρέπουσαν ἀναλογίαν ὁμοῦ μὲ τὰ παραδείγματα, ἐπάνω ἐς τὰ ὁποῖα δύναταί τις νὰ γυμνάζηται ἀφ' ἑαυτοῦ του, κάμνων τὰς πρεπούσας προσαρμογάς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

140. *Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς κ̀ τῆς γωνίας, ἥτις περιέχεται ἀπὸ αὐτὴν τὴν πλευρὰν κ̀ ἀπὸ τὴν ὑποτείνυσαν, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν ὑποτείνυσαν.*

Ἐξάγω τὰς πλευρὰς, κ̀ συμπεραίνω ἀπὸ τὴν πρώτην ἀναλογίαν τῆς δευτέρας ἀρχῆς (131).

Ἡ ἡμιδιάμετρος,
στέκει πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς δοθείσης πλευρᾶς,
ὥσπερ τὸ συνημίτονον τῆς δοθείσης γωνίας,
στέκει πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς ὑποτεινούσης,

ἥτις θέλει εἶσθαι μικροτέρα ἀπὸ 90° *μοίρας, ἐὰν ἡ πλευρὰ ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν* (125).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν*
$\left\{\begin{array}{l} AB = 36^\circ, 43' \\ B\Gamma = 52\ , 58 \end{array}\right\}$ *μοίρας, τὴν δὲ γωνίαν*
$\left\{\begin{array}{l} A = 22^\circ, 30' \\ \Gamma = 46\ , 35 \end{array}\right\}$ *κ̀ ζητῶ τὴν ὑποτείνυσαν* ΑΓ
(*πίναξ. ς΄, σχη: θ΄*).
Ἀπόκρ. 38°, 55′. 62°, 35′.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄.

141. *Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς κ̀ τῆς γωνίας, ἥτις περιέχεται ἀπὸ τὴν ἰδίαν πλευρὰν κ̀ ἀπὸ τὴν ὑποτείνυσαν, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν λοιπὴν λοξὴν γωνίαν.*

Ἐκβάλλω τὰς πλευρὰς, κ̀ συμπεραίνω ἀπὸ τὴν πρώτην ἀναλογίαν τῆς πρώτης ἀρχῆς (130).

Ἡ ἡμιδιάμετρος,

στέκει πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς δοθείσης πλευρᾶς.

Ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς δοθείσης γωνίας,

στέκει πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ζητουμένης γωνίας,

ἥτις θέλει εἶσθαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν πλευρὰν $\left\{\begin{matrix} ΒΓ = 31°,29' \\ ΑΒ = 30\ ,18 \end{matrix}\right\}$ μοίρας, τὴν δὲ γωνίαν $\left\{\begin{matrix} Γ = 40°,\ 0' \\ Α = 51\ ,15 \end{matrix}\right\}$ καὶ ζητῶ τὴν γωνίαν $\left\{\begin{matrix} Α \\ Γ \end{matrix}\right\}$ (πίναξ. ς'. σχη. θ').

Ἀπόκρ. 56°,46' . 47°,40'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

142. Δοθεισῶν τῶν δύω πλευρῶν νὰ εὕρῃ τις τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἐκβάλλω τὰς πλευρὰς, καὶ συμπεραίνω ἀπὸ τὴν πρώτην ἀναλογίαν τῆς πρώτης ἀρχῆς (130).

Ἡ ἡμιδιάμετρος,

στέκει πρὸς τὸ συνημίτονον μιᾶς τῶν πλευρῶν.

Ὥσπερ τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης πλευρᾶς,

στέκει πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ὑποτεινούσης,

Αὕτη θέλει εἶσθαι μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας ἂν αἱ δύω πλευραὶ ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους (124).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν πλευρὰν ΑΒ = $\left\{\begin{matrix} 40°,30' \\ 76\ ,24 \end{matrix}\right\}$ μοίρας, τὴν πλευρὰν ΒΓ = $\left\{\begin{matrix} 30°,\ 0' \\ 66\ ,24 \end{matrix}\right\}$. καὶ ζητῶ τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ (σχημ: θ').

Ἀπόκρ. 48°,49' . 84°,36'.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

143. Δοθεισῶν τῶν δύω πλευρῶν, νὰ εὕρῃ τὶς μίαν ἀπὸ τὰς λοξὰς γωνίας.

Συμπεραίνω ἀμέσως ἀπὸ τὴν τρίτην ἀναλογίαν τῆς δευτέρας ἀρχῆς (131).

Τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῇ ζητυμένῃ γωνίᾳ πλευρᾶς,
στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἄλλης πλευρᾶς.
Ὥσπερ ἡ ἡμιδιάμετρος,
στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ζητυμένης γωνίας, ἥτις εἶναι τῦ αὐτῦ εἴδυς μὲ τὴν πλευρὰν, ἡ ὁποία ὑποτείνει εἰς αὐτήν (123).

Καὶ ἂν λάβω πρῶτον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὴν ἡμιδιάμετρον, δύναμαι νὰ εἰπῶ ὕτως,

Ἡ ἡμιδιάμετρος,
στέκει πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῇ ζητυμένῃ γωνίᾳ πλευρᾶς.
Ὥσπερ ἡ συνεφαπτομένη τῆς λοιπῆς πλευρᾶς.
στέκει πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς ζητυμένης γωνίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν πλευρὰν ΑΒ $= \left\{\begin{matrix} 48^\circ,25' \\ 45\ ,20 \end{matrix}\right\}$ μοίρας, τὴν πλευρὰν ΒΓ $= \left\{\begin{matrix} 53^\circ,15' \\ 38\ ,50 \end{matrix}\right\}$

κ̀ ζητῶ τὴν γωνίαν $\left\{\begin{matrix} \mathrm{A} \\ \Gamma \end{matrix}\right\}$.

Ἀπόκρ. $60^\circ,49'$. $58^\circ,13'$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

144. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς ϗ τῆς ὑποτεινούσης, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν ἄλλην πλευράν.

Ἐκβάλλω τὰς πλευρὰς, ϗ συμπεραίνω ἀπὸ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν τῆς πρώτης ἀρχῆς (130).

Τὸ συνημίτονον τῆς δοθείσης πλευρᾶς,
ςέκει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον.
Ὥσπερ τὸ συνημίτονον τῆς ὑποτεινούσης,
ςέκει πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ζητουμένης πλευρᾶς.

Αὕτη θέλει εἶσθαι μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας, ἂν ἡ δοθεῖσα πλευρὰ ϗ ἡ ὑποτείνουσα ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους (127).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν ὑποτείνουσαν ΑΓ $= \left\{ \begin{matrix} 60^\circ,20' \\ 49\ ,17 \end{matrix} \right\}$ μοίρας, τὴν δὲ πλευρὰν $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{ΒΓ} = 42^\circ,26' \\ \mathrm{ΑΒ} = 29\ ,50 \end{matrix} \right\}$· ϗ ζητῶ τὴν πλευρὰν $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{ΑΒ} \\ \mathrm{ΒΓ} \end{matrix} \right\}$.

Ἀπόκρ. 47°,53'. 41°,14'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

145. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς ϗ τῆς ὑποτεινούσης, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν γωνίαν, ἥτις περιέχεται ἀπὸ αὐτάς.

Ἐκβάλλω τὰς πλευρὰς, ϗ συμπεραίνω ἀπὸ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν τῆς δευτέρας ἀρχῆς (131).

Ἡ συνεφαπτομένη τῆς δοθείσης πλευρᾶς,
ςέκει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον.
Ὥσπερ ἡ συνεφαπτομένη τῆς ὑποτεινούσης,
ςέκει πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ζητουμένης γωνίας,

ἥτις θέλει εἶσθαι ὀξεῖα ἂν ἡ δοθεῖσα πλευρὰ κ̕ ἡ ὑποτείνουσα ἦναι τῦ αὐτῦ εἴδυς (127).

Καὶ ἂν λάβω πρῶτον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὴν ἡμιδιάμετρον, δύναμαι νὰ κάμω ταύτην τὴν ἄλλην ἀναλογίαν.

Ἡ ἡμιδιάμετρος,
σέκη πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης πλευρᾶς.
Ὥσπερ ἡ συνεφαπτομένη τῆς ὑποτεινύσης,
σέκη πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ζητεμένης γωνίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ $=\left\{\begin{matrix}52^{\circ},36' \\ 54\ ,\ 7\end{matrix}\right\}$ μοίρας, τὴν πλευρὰν $\left\{\begin{matrix}AB=42^{\circ},20' \\ B\Gamma=23\ ,10'\end{matrix}\right\}$.

κ̕ ζητῶ τὴν γωνίαν $\left\{\begin{matrix}A \\ \Gamma\end{matrix}\right\}$ (πίναξ. ϛ'. σχ. 9).

Ἀπόκρ. 45°,51' . 71°,58'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

146. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς κ̕ τῆς ὑποτεινέσης, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν γωνίαν, τὴν ὑπεναντίον εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

Ἀπὸ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν τῆς πρώτης ἀρχῆς δύναμαι νὰ συμπεράνω ἀμέσως (130).

Τὸ ἡμίτονον τῆς ὑποτινύσης,
σέκη πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον.
Ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς δοθείσης πλευρᾶς,
σέκη πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας, τῆς ὑπεναντίον εἰς αὐτὴν τὴν πλευράν.

Αὐτὴ ἡ γωνία εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν (123).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν ὑποτείνουσαν $\mathrm{A\Gamma} = \begin{Bmatrix} 60^\circ \\ 55 \end{Bmatrix}$ μοίρας, τὴν δὲ πλευρὰν $\begin{Bmatrix} \mathrm{AB} = 45^\circ,\ 0' \\ \mathrm{B\Gamma} = 33\ ,45 \end{Bmatrix}$

καὶ ζητῶ τὴν γωνίαν $\begin{Bmatrix} \Gamma \\ \mathrm{A} \end{Bmatrix}$ (πίναξ. ς'. σχ. θ').

Ἀπόκρ. $54^\circ, 44'$. $42^\circ, 42'$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'.

147. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς ἀπὸ τὰς λοξὰς γωνίας, νὰ εὕρῃ τὶς τὴν πρὸς τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ πλευράν.

Ἐκβάλλω, καὶ συμπεραίνω ἀπὸ τὴν τρίτην ἀναλογίαν τῆς δευτέρας ἀρχῆς (131).

Τὸ συνημίτονον τῆς δοθείσης γωνίας,
στέκει πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς ὑποτεινούσης.
Ὥσπερ ἡ ἡμιδιάμετρος.
στέκει πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς ζητουμένης πλευρᾶς,

ἥτις θέλει εἶσθαι μικροτέρα ἀπὸ 90° μοίρας, ἂν ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ ἡ ὑποτείνουσα ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους (128).

Καὶ ἂν λάβω πρῶτον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὴν ἡμιδιάμετρον, δύναμαι νὰ εἰπῶ,

Ἡ ἡμιδιάμετρος,
στέκει πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς γνωστῆς γωνίας.
Ὥσπερ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ὑποτεινούσης,
στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ζητουμένης πλευρᾶς.