„ τῶν δύω μέσον γινόμενον διαιρεθὲν μὲ τὸν ἄλλον „ ἄκρον· ὕτως εἰς ταύτην τὴν ἀναλογίαν 3:5::6:10 φαίνεται ὅτι ὁ μέσος ὅρος 5 εἶναι ἴσος μὲ τὸν 3 πολλαπλασιασθέντα μὲ τὸν 10 (ὅστις κάμνει 30), ϗ διαιρεθέντα διὰ τῦ 6. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ ἄκρος 10 εἶναι ἴσος μὲ τὸν 5 πολλαπλασιασθέντα μὲ τὸν 6 (ὅστις κάμνει 30), ϗ διαιρεθέντα διὰ τῦ 3.

Ἀπὸ ἐδῶ εὐγαίνει ἡ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ, ἥτις λέγεται ϗ ΚΑΝΩΝ ἈΝΑΛΟΓΙΚΟΣ· διότι ἡ μέθοδος τῶν τριῶν δὲν εἶναι ἄλλο, παρὰ ὁ ἀναγκαῖος λογαριασμὸς διὰ νὰ εὕρῃ τις τὸν τέταρτον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, τῆς ὁποίας ἐξεύρει τὺς τρεῖς ἄλλυς. „ Διὰ „ νὰ κάμῃς λοιπὸν μίαν μέθοδον τῶν τριῶν, πρέπει „ νὰ πολλαπλασιάσῃς τὸν δοθέντα δεύτερον ὅρον μὲ „ τὸν τρίτον, ϗ νὰ διαιρέσῃς τὸ ἀπ' αὐτῶν γινόμε-„ νον μὲ τὸν πρῶτον, ϗ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁ „ ζητύμενος τέταρτος ὅρος.

Περὶ Λογαρίθμων.

85. Συμβαίνει πολλάκις, ὅταν κάμνῃ τὶς μίαν μέθοδον τῶν τριῶν, νὰ ἔχῃ νὰ πολλαπλασιάσῃ, ἢ νὰ μοιράσῃ μὲ μεγάλυς ἀριθμὺς, τὸ ὁποῖον κάμει, τὴν μέθοδον κοπιαστικὴν, ϗ ὑποκειμένην πολλάκις εἰς σφάλματα· διὰ τῦτο ἐπινοήθη ἓν μέσον ὅσον ἁπλῦν ἄλλο τόσον εὐφυὲς, μὲ τὸ ὁποῖον συντέμνεται εἰς ἄκρον ὁ λογαριασμὸς. Διότι ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς μεταβάλλεται εἰς μίαν ἁπλῆν προσθήκην, ἡ δὲ διαίρεσις εἰς μίαν ἁπλῆν ἀφαίρεσιν δύω ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ, τὺς ὁποίυς μεταχειριζόμεθα εἰς ταύτην τὴν σύντομον πρᾶξιν ὀνομάζονται ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. Οἱ λογάριθμοι

λοι—

λοιπὸν εἶναι κάποιοι ἀριθμοὶ τεχνικοὶ, ὅιτινες ἐλογαριάσθησαν ῥητῶς διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν, διὰ νὰ βάνωνται εἰς τὸν τόπον ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἢ νὰ διαιρεθῶσιν· εἰς τρόπον ὅτι κάθε ἀριθμὸς φυσικὸς ἔπρεπε νὰ ἔχῃ ἕνα λογάριθμον ἀνταποκρινόμενον, διὰ νὰ ἤθελεν ἐμπορῇ νὰ βαλθῇ εἰς τὸν τόπον αὐτȣ̃, ὅταν ἤθελε κάμῃ χρέια νὰ πολλαπλασιασθῇ, ἢ νὰ διαιρεθῇ. Διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν ἔγιναν Πίνακές τινες, εἰς τȣ̀ς ὁποίȣς πλησίον εἰς τȣ̀ς φυσικȣ̀ς ἀριθμȣ̀ς, ὅιτινες ἀρχίζȣν ἀπὸ 1, 2, 3, 4 κτ. εὑρίσκεται ὁ λογάριθμος ἑκάςȣ.

Τοιȣτοτρόπως λοιπὸν εἰς τȣ́τȣς τȣ̀ς πίνακας πλησίον εἰς τὸν ἀριθμὸν 2 εὑρίσκεται 0.301030, ὅστις εἶναι ὁ λογάριθμος τȣ̃ 2· πλησίον εἰς τὸν ἀριθμὸν 3 εὑρίσκεται 0.477121, ὅστις εἶναι ὁ λογάριθμος τȣ̃ 3· κ̀ πλησίον, φέρ' εἰπεῖν, τȣ̃ 19 εὑρίσκεται 1.278754, ὅστις εἶναι ὁ λογάριθμος αὐτȣ̃· κ̀ ȣ̃τω περὶ τῶν ἄλλων.

Πρέπει ὅμως εἰς τȣ̀ς λογαρίθμȣς νὰ παρατηρήσῃς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΝ. Αὐτὸ εἶναι ἕνας χαρακτὴρ εἰς τὴν ἀρχὴν ὅλων τῶν ἄλλων, κ̀ διακρίνεται ἀπὸ τȣ̀ς ἄλλȣς ἢ μὲ μίαν στιγμὴν, ἢ μέ μίαν ὑποδιαςολήν. Τὸ χαρακτηριςικὸν ἑνὸς λογαρίθμȣ χρησιμεύει μόνον κ̀ μόνον εἰς τὸ νὰ μᾶς κάμνῃ νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ πόσȣς χαρακτῆρας εἶναι σύνθετος ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ὅστις ἀνταποκρίνεται εἰς αὐτὸν τὸν λογάριθμον· „ διότι ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς εἶναι „ σύντεθος ἀπὸ τόσȣς χαρακτῆρας μᾶλλον ἕνα, ὅσας „ μονάδας περιέχει τὸ χαρακτηριςικὸν τȣ̃ λογαρίθμȣ „ τȣ „. Ὅθεν ὁ λογάριθμος, τȣ̃ ὁποίȣ τὸ χαρακτηριςικὸν εἶναι 3, ἀνταποκρίνεται εἰς ἕνα ἀριθμὸν σύνθετον ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, καὶ ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι μηδὲν 0, ἢ 1, ἀνταποκρίνεται εἰς ἕνα ἀριθμὸν σύνθετον ἐξ ἑνὸς, ἢ δύω χαρακτήρων κτ. Τὸ χαρακτηριστικὸν λοιπὸν συμπεραίνεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν χαρακτήρων ἑνὸς Φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Εὑρίσκονται μερικοὶ Πίνακες, εἰς τοὺς ὁποίους τὸ χαρακτηριστικὸν ἀφέθη διὰ συντομίαν, εἶναι ὅμως εὔκολον νὰ τοὺς ἀναπληρώσωμεν, λαμβάνοντες ἓν χαρακτηριστικὸν τόσων μονάδων, ὅσοι εἶναι οἱ χαρακτῆρες τοῦ Φυσικοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον, πλὴν ἑνός.

86. Κάθε μονὰς, ἥτις ἤθελε προστεθῇ εἰς ἓν χαρακτηριστικὸν, ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτὸ, σημαίνει ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν πρέπει νὰ ἀνταποκρίνεται εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἑνὸς χαρακτῆρος περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον, ἤγουν ὅτι πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν, ἢ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτὸν μία μονάς· οὕτως ὅταν ἡμεῖς προσθέσωμεν εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν ἑνὸς λογαρίθμου μίαν μονάδα, ὁ λογάριθμος ἀνήκει τότε εἰς ἕνα ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν, ὅστις πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ 10, καὶ ὅταν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτὸ μίαν μονάδα, χωρὶς ν' ἀλλάξωμεν τοὺς ἄλλους χαρακτῆρας, ὁ λογάριθμος τότε ἀνήκει εἰς ἕνα ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν, ὅστις πρέπει νὰ διαιρεθῇ μὲ 10. Καὶ καθόλου ὅσας μονάδας προσθέσομεν ἢ ἀφαιρέσομεν ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν, τοσάκις πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ἢ νὰ μοιράσωμεν τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν μὲ 10.

Εἰς τὺς Πίνακας φέρ' εἰπεῖν ἡμεῖς εὑρίσκομεν.

Λογ. 31=1.491362	Λογ. 7400=3.869232
Λογ. 310=2.491362	Λογ. 740=2.869232
Λογ. 3100=3.491362	Λογ. 74=1.869232
κτ. κτ.	κτ. κτ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν εἰς αὐτὺς, ὅτι 3.138934 εἶναι ὁ λογάριθμος τῦ 1377. Ἐὰν ὅμως ἡμεῖς ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 3 αὐτῦ τῦ λογαρίθμυ μίαν μονάδα, τότε ὁ 2.138934 ἀνταποκριθήσεται μὲν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1377, διαιρεθέντα ὅμως διὰ τῦ 10, ἤγυν $137\frac{7}{10}$, ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν δύω μονάδας ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 3, τότε 1.138934 θέλει εἶσθαι ὁ λογάριθμος τῦ 1377, διαιρεθέντος ὅμως διὰ τῦ 100, ἤγων $13\frac{77}{100}$.

87. Πᾶσαι αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι γίνονται διὰ μέσυ τῶν λογαρίθμων, προέρχονται ἀπὸ τὰς ἀκολύθυς ἰδιότητας τῶν ἰδίων.

α'. „ Τὸ κεφάλαιον τῶν λογαρίθμων δύω ἀριθμῶν, „ ὅιτινες πολλαπλασιαζόμενοι εἷς διὰ τῦ ἄλλυ, κάμνυν ἓν γινόμενον, εἶναι ἴσον μὲ τὸν λογάριθμον τῦ „ ἰδίυ γινομένυ.

ϛ'. „ Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύω ἀριθμῶν, „ ὅιτινες διαιρύμενοι εἷς διὰ τῦ ἄλλυ, δίδυν ἓν πη„λίκον, εἶναι ἴση μὲ τὸν λογάριθμον τῦ ἰδίυ πη„λίκυ. Ἐκ ταύτης τῆς ἰδιότητος ἕπεται μία τρίτη.

γ'. „ Ἐὰν δύω ἀριθμοὶ ἔχυσιν ἀναμεταξύ των τὸν „ αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχυσι δύω ἄλλοι, οἱ λο„γάριθμοι τῶν δύω πρώτων ἀριθμῶν διαφέρυσιν ἀνα„μεταξύ των κατα τὴν αὐτὴν ποσότητα, καθ' ἣν

„ διαφέρυν οἱ λογάριθμοι τῶν δύω ἄλλων, ἢ ἡ ἤδια-
„ φορὰ τῶν λογαρίθμων τῶν δύω πρώτων ἀριθμῶν μιᾶς
„ ἀναλογίας εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν λογα-
„ ρίθμων τῶν δύω ἄλλων ἀριθμῶν τῆς εἰρημένης ἀναλο-
„ γίας. Οὕτως εἰς ταύτην τὴν ἀναλογίαν, 3 : 9 : : 5 : 15
φαίνεται ὅτι

Λογ. 9	= 0.954242	Λογ. 15	= 1.176091
Λογ. 3	= 0.477121	Λογ. 5	= 0.698970
Διαφ.	= 0.477121	Διαφ.	= 0.477121

Καὶ διὰ νὰ γυμνάσωμεν τὰς μαθητάς μας ἂς ἀρχίσωμεν νὰ περιγράψωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι γίνονται διὰ μέσου τῶν λογαρίθμων.

α΄. Ἐὰν θέλῃς νὰ πολλαπλασιάσῃς τὸν 36 μὲ τὸν 74, δὲν ἔχεις νὰ κάμῃς, παρὰ νὰ εὕρῃς ἐν πρώτοις τὸν λογάριθμον τοῦ 36, Λογ. 36 = 1.556303
ἔπειτα τὸν λογάριθμον τοῦ 74, Λογ. 74 = 1.869232
κὶ τρίτον νὰ τὰς συνάψῃς, Κεφ: 3.425535

Ὁ ἀριθμὸς 3.425535 θέλει εἶσθαι ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν δύω ἀριθμῶν 36 κὶ 74. Καὶ ἐπειδὴ, ὡς βλέπεις, τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 3, εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ ζητήσῃς αὐτὸν τὸν λογάριθμον μεταξὺ εἰς ἐκείνους, ὅιτινες ἀνήκουν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι εἶναι σύνθετοι ἐκ 4 χαρακτήρων. Εἰς τὸν Πίνακα τῶν λογαρίθμων θέλεις εὑρεῖ 3.425534, ὅστις δὲν εἶναι κυρίως ὁ ἰδικός σου, εἶναι ὅμως ὁ ἐγγύτερος τοῦ ἰδικοῦ σου λογαρίθμου, τὸν ὁποῖον ζητεῖς. Αὐτὸς λοιπὸν ὁ λογάριθμος 3.425534 ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 2664, ὅστις εἶναι κυρίως τὸ γινόμενον, ὁποῦ ζητεῖς.

Πάλιν ἂν θέλῃς νὰ πολλαπλασιάσῃς τὸν 282 μὲ τὸν 130, ἐργάζου τοιουτοτρόπως, ὡς βλέπεις.

Λογ.	282 =	2.450249
Λογ.	130 =	2.113943
Κεφ.	=	4.564192

Ὁ λογάριθμος λοιπὸν 4.564192 ἀνήκει εἰς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ Πίνακες, τοὺς ὁποίους ἡμεῖς ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης πραγματείας δὲν φθάνουν ἕως εἰς ἐκείνους τοὺς ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων τὸ χαρακτηριστικὸν σύγκειται ἐκ 4 μονάδων, ἢ ἔχουσι 5 χαρακτῆρας· πρέπει νὰ ζητήσῃς αὐτὸν τὸν λογάριθμον μ' ἓν χαρακτηριστικὸν 3, ἤγουν 3.564192, ὅστις θέλεις ἰδεῖ ὅτι ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 3666, καὶ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν ὁ λογάριθμός σου 4.564192 πρέπει νὰ ἀνταποκρίνεται (85) εἰς τὸν 36660. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 36660 θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Δῆλον λοιπὸν ὅτι κάθε πολλαπλασιασμὸς μεταβάλλεται εἰς μίαν ἁπλῆν προσθήκην διὰ μέσου τῶν λογαρίθμων.

β'. Ἡ δευτέρα πρᾶξις συνίσταται εἰς τὸ νὰ μεταβάλῃ τις τὸν μοιρασμὸν εἰς μίαν ἁπλῆν ἀφαίρεσιν.

Ἂν παρα : χάρ : θέλῃς νὰ μοιράσῃς 1665 μὲ 15, ἐργάζε ὕτως ὡς βλέπεις.

Ἀφαίρετον	Λογ.	1665	=	3.221414
	Λογ.	15	=	1.176091
	Διαφ.		=	2.045323

Ὁ λογάριθμ⊙ 2.045323, θέλει εἶσθαι ἐκεῖν⊙, ὅστις ἀνήκει εἰς τὸ ζητύμενον πηλίκον. Ἐὰν ζητήσῃς αὐτὸν τὸν λογάριθμον εἰς τὺς Πίνακας, θέλεις ἰδεῖ ὅτι ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν 111, κ) διὰ τῦτο ἐμπορεῖς νὰ συμπεράνῃς ὅτι τὸ πηλίκον τῦ 1665 διαιρεθέντ⊙ διὰ τῦ 15 εἶναι 111.

Πάλιν ἂν θέλῃς νὰ διαιρέσῃς τὸν 7846 μὲ τὸν 389, ἰδὺ ἡ πρᾶξις.

Ἀφαίρεσο.	Λογ.	7846	=	3.894648
	Λογ.	389	=	2.589950
	Διαφ.		=	1.304698

Ἐὰν ζητήσῃς εἰς τὺς πίνακας αὐτὸν τὸν λογάριθμον, ἢ τὸν ἐγγύτερον εἰς αὐτὸν, ὅστις εἶναι ὁ 1.301030, θέλεις ἰδεῖ ὅτι ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν 20· ὅθεν ὁ 20 εἶναι τὸ ὡς ἔγγυστα πηλίκον. Ἂν ὅμως θέλῃς νὰ εὕρῃς ἓν πηλίκον ἀκριβέστερον, πρέπει νὰ ζητήσῃς τὸν λογάριθμόν σου εἰς τὺς πίνακας μὲ ἓν χαρακτηριστικὸν 3, ἤγυν 3.304698, ἢ τὸν ἐγγύτερον αὐτῦ, ὅστις εὑρίσκεται εἶναι ὁ 3.304491, κ) ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν 2016. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λογάριθμός σου, ὁ ὁποῖ⊙ παριστάνει τὸ πηλίκον, ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν 1, ὁ ἀριθμὸς 2016 πρέπει νὰ διαιρεθῇ (85) διὰ τοῦ 100, διὰ νὰ παραστήσῃ τὸν λογάριθμόν του. Ὅθεν ὁ 2016 διαιρεθεὶς διὰ τοῦ 100, ἤγουν $20\frac{16}{100}$ φανερώνει τὸ ζητούμενον πηλίκον, τὸ ὁποῖον εἶναι, ὡς βλέπεις, ἀκριβέστερον ἀπὸ τὸ πρῶτον.

γ'. Ἡ τρίτη πρᾶξις συνίσταται εἰς τὴν προσαρμογὴν τῶν λογαρίθμων, ἥτις γίνεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν, ἤγουν εἰς τὸ νὰ εὕρῃ τὶς τὸν τέταρτον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας.

Αὐτὴ ἡ τρίτη πρᾶξις εἶναι μία ἕνωσις τῶν δύω προηγουμένων. Ἡμεῖς ἴδαμεν (82) ὅτι διὰ νὰ εὕρῃ τὶς τὸν τέταρτον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας πρέπει νὰ πολλαπλασιάσῃ ὁμοῦ τοὺς δύω μέσους ὅρους, καὶ νὰ διαιρέσῃ τὸ γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου ὅρου. Ἂν λοιπὸν θέλῃς νὰ
„ κάμῃς αὐτὸν τὸν λογαριασμὸν διὰ μέσου τῶν λογα-
„ ρίθμων, πρέπει νὰ συνάψῃς τὸν λογάριθμον τοῦ δεύ-
„ τέρου ὅρου μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ τρίτου, καὶ νὰ ἀφαι-
„ ρέσῃς ἀπὸ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν τὸν λογάριθμον τοῦ
„ πρώτου ὅρου, καὶ ἡ διαφορὰ θέλει εἶσθαι ὁ λογάριθμος
„ τοῦ ζητουμένου τετάρτου ὅρου. Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, εἰς
„ τὸν ὁποῖον ἤθελεν ἀνταποκρίνεται αὐτὸς ὁ λογά-
„ ριθμος, θέλει εἶσθαι ὁ ἴδιος τέταρτος ὅρος.

Ἰδοὺ ἡ πρόοδος τοῦ λογισμοῦ διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν τετάρτων ὅρων τῶν δύω τούτων ἀναλογιῶν.

α'. 15 : 45 :: 17 : πρὸς ἕνα τέταρτον ὅρον
β'. 111 : 386 :: 154 : πρὸς ἕνα τέταρτον ὅρον.

Διὰ τὴν . α΄.

Σύναψον	Λογ.	45 =	1.653213
	Λογ.	17 =	1.230449
Ἀφαίρεσον	Κεφ.	=	2.883662
	Λογ.	15 =	1.176091
	Διαφ.	=	1.707571

Ἂν ζητήσῃς αὐτὸν τὸν λογάριθμον εἰς τοὺς πίνακας, θέλεις ἰδεῖ ὅτι ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν 51 ἀριθμὸν, καὶ διὰ τοῦτο ὁ 51 θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος τέταρτος ὅρος τῆς α΄ ἀναλογίας 15 : 45 : : 17 : 51.

Διὰ τὴν . β΄.

Σύναψον	Λογ.	386 =	2.586587
	Λογ.	154 =	2.187521
Ἀφαίρεσον	Κεφ.	=	4.774108
	Λογ.	111 =	2.045323
	Διαφ.	=	2.728785

Ἐὰν ζητήσῃς αὐτὸν τὸν λογάριθμον εἰς τοὺς πίνακας ἢ τὸν ἐγγύτερον εἰς αὐτὸν θέλεις ἰδεῖ ὅτι ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν 535, ὅστις ἑπομένως θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος τέταρτος ὅρος τῆς β΄ ἀναλογίας 111 : 386 : : 154 : 535. Ἂν ὅμως ἤθελε ζητήσῃς ἢ τὸν λογάριθμόν μας, ἢ τὸν ἐγγύτερον εἰς αὐτὸν μὲ ἓν χαρακτηριστικὸν 3, καὶ ἑπομένως τὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν 3.728185, ἢ εἰς τὸν ἐγγύτεγύτερον εἰς αὐτὸν, θέλεις ἰδεῖ ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 5355· ὅθεν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ὅστις ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν ἡμέτερον λογάριθμον πλέον ἐγγύτερα θέλει εἶσθαι ὁ 5355 διαιρεθεὶς (86) διὰ τοῦ 10, ἤγουν $535 \frac{5}{10}$, καὶ ὁ ἀκριβέστερος τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας θέλει εἶσθαι $535 \frac{1}{2}$· ὅθεν

$111:386::154:535 \frac{1}{2}$.

88. Εἰς τὴν προσαρμογὴν τῶν λογαρίθμων, ὁποῦ ἡμεῖς ἐκάμαμεν, καὶ δυνάμεθα νὰ κάμωμεν, συμβαίνει πολλάκις νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα λογάριθμον ἀπὸ ἕνα ἄλλον, εἰς τρόπον ὅτι εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πρᾶξιν νὰ ἔχῃ χώραν, τόσον ἡ προσθήκη, ὡσὰν καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν λογαρίθμων, ὡς ἴδαμεν. Εὑρέθησαν ὅμως κάποιοι ἀριθμοὶ ὅιτινες ὀνομάζονται ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΑ· διὰ μέσου τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ πράξεις τῶν λογαρίθμων ἀνάγονται εἰς ἁπλᾶς προσθήκας, ἰδοὺ εἰς τί συνίστανται οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοί.

Τὸ ἀριθμητικὸν παραπλήρωμα ἑνὸς λογαρίθμου εὑρίσκεται τοιουτοτρόπως. „Ἀφαίρεσον ὅλους τοὺς χαρακτῆρας „τοῦ λογαρίθμου ἕνα πρὸς ἕνα ἀπὸ τὸν 9, „πλὴν τοῦ κατὰ τὰ δεξιὰ τελευταίου, τὸν ὁποῖον „πρέπει νὰ ἀφαιρέσῃς ἀπὸ τὸν 10„· οὕτω τὸ ἀριθμητικὸν παραπλήρωμα ἑνὸς λογαρίθμου δύναται νὰ εὑρεθῇ μὲ μίαν μόνην ὀμματίαν τῶν ἁπλῶν χαρακτήρων χωρὶς κάμμίαν πρᾶξιν. Φαίνεται λοιπὸν ἀπὸ ἐδῶ παρευθὺς, ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν παραπλήρωμα τοῦ λογαρίθμου 3.728785 εἶναι 6.271215, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τοὺς χαρακτῆρας 3, 7, 2, 8, κτ. ἀπὸ τὸν 9, κ̀ τὸν τελευταῖον 5 ἀπὸ τὸν 10· ὕτω τὸ ἀριθμητικὸν παραπλήρωμα τῦ λογαρίθμυ 2.854406· θέλει εἶσθαι 7.145594.

Τὰ αριθμητικὰ παραπληρώματα χρησιμεύυν εἰς τὸ νὰ μεταβάλῃ τὶς τὰς ἀφαιρέσῃς εἰς προσθήκας· ὕτως ἂν θέλῃς νὰ ἀφαιρέσῃς τὸν 3.486098 ἀπὸ τὸν 5.040321, λάβε τὸ ἀριθμητικὸν παραπλήρωμα τῦ λογαρίθμυ, τὸν ὁποῖον ἔχεις νὰ ἀφαιρέσῃς, τὸ ὁποῖον εἶναι 6.513902, κ̀ σύναψον αὐτὸ μὲ τὸν δεύτερον λογάριθμον 5.040321 ἀπὸ δὲ τύτυ τῦ κεφαλαίυ 11.554223 ἄφελε μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν κατὰ τὰ ἀριςερὰ πρῶτον χαρακτῆρα· κ̀ ἐπειδὴ αὐτὸς ὁ πρῶτος χαρακτὴρ εἶναι ἡ μονὰς, διὰ τῦτο ἀφ' ὖ ἀφαιρέσῃς 1 ἀπὸ αὐτὸν, δὲν μένει παρὰ 1.554223, ὅςτις θέλει εἶσθαι ἡ ζητυμένη διαφορά.

Ἰδὲ σοι ἡ ἔκθεσις τῆς πράξεως.	5.040321
Ἀριθμητικὸν παραπλήρωμα τῦ 3.486098	6.513902
Ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀφ' ὖ ἀφαιρέσῃς Κεφ.	11.554223
τὴν μονάδα, μένει	1.554223

Ἂν δὲ ἤθελον εἶσθαι δύω οἱ λογάριθμοι, ὁπῦ ἔχεις νὰ ἀφαιρέσῃς, πρέπει τότε νὰ λάβῃς δύω παραπληρώματα, κ̀ πρέπει νὰ ἀφαιρέσῃς δύω μονάδας ἀπὸ τὸν κατὰ τὰ ἀριςερὰ πρῶτον χαρακτῆρα τῦ κεφαλαίυ. Καὶ διὰ νὰ εἰπῶ καθόλυ πρέπει νὰ ἀφαιρῇς πάντοτε ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς ὁλοκλήρυ πράξεως τόσας μονάδας ἀπὸ τὸν κατὰ τὰ ἀριςερὰ πρῶτον χαρακτῆρα, ὅσα ἀριθμητικὰ παραπληρώματα ἤθελες λάβῃ εἰς τὴν ἰδίαν πρᾶξιν.

Διὰ νὰ κάμῃς λοιπὸν μίαν μέθοδον τῶν τριῶν διὰ μέσυ τῶν λογαρίθμων μεταχειριζόμενος ἀντ᾽ αὐτῶν τὰ ἀριθμητικὰ παραπληρώματα αὐτῶν, πρέπει νὰ συνάψῃς τὺς λογαρίθμυς τῶν δύω μέσων ὅρων μὲ τὸ ἀριθμητικὸν παραπλήρωμα τῦ λογαρίθμυ τῦ πρώτυ ὅρυ, κ) νὰ ὀλιγοστεύσῃς μίαν μονάδα τὸν κατὰ τὰ ἀριστερὰ πρῶτον χαρακτῆρα τῦ ἀποτελέσματος, κ) ὕτω θέλεις εὑρεῖ τὸν λογάριθμον τῦ ζητυμένυ τετάρτυ ὅρυ. Διὰ νὰ εὕρῃς, παρα: χάρ: τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ἀναλογίας ταύτης 15:45::17: πρὸς τὸν τέταρτον, ἐργάζυ τοιυτοτρόπως, ὡς βλέπεις.

	Λογ. 45	=	1.653213
	Λογ. 17	=	1.230449
	Κεφ.	=	2.883662
Ἀριθμητ. παραπλή. τῦ	Λογ. 15	=	8.823909
	Κεφ.	=	11.707571

Ἄφελε μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν κατὰ τὰ ἀριστερὰ πρῶτον χαρακτῆρα τῦ κεφαλαίυ, κ) ὁ 1.707571 θέλει εἶσθαι ὁ λογάριθμος τῦ ζητυμένυ τετάρτυ ὅρυ. Αὐτὸς ὁ λογάριθμος ἀνταποκρίνεται, ὡς ἴδαμεν ἀνωτέρω, εἰς τὸν ἀριθμὸν 51, ὅστις διὰ τῦτο εἶναι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας.

Ἀρχαὶ καθόλυ.

89. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς γωνίας, κ) τρεῖς πλευρὰς, διὰ τῦτο ἡμεῖς δυνάμεθα νὰ τὸ φαντασθῶμεν ὡς σύνθετον ἀπὸ ἕξ μέρη. Ὅθεν ὁ τριγωνομετρικὸς λογισμὸς συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὕρῃ τὶς ἢ τὴν δύναμιν μιᾶς γωνίας, ἢ τὴν δύναμιν μιᾶς πλευρᾶς,

ὅταν ἦναι γνωςὰ ἢ διδόμενα τὰ τρία μέρη αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

90. Ἡμεῖς ἴδαμεν ὅτι ἡ μεγαλητέρα γωνία ἑνὸς τριγώνου ὑποτάνει εἰς τὴν μεγαλητέραν πλευρὰν, καὶ ἡ μικροτέρα εἰς τὴν μικροτέραν. Ἀλλ᾽ ὅμως μ᾽ ὅλον ὅτι ἀπὸ τὴν αὔξησιν μιᾶς γωνίας προέρχεται ἡ αὔξησις τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς, μ᾽ ὅλον τοῦτο ἡ αὔξησις τῆς γωνίας δὲν εἶναι ἀνάλογος μὲ τὴν αὔξησιν τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς· εἰς τρόπον ὅτι ἂν ἡ γωνία διπλασιασθῇ, ἢ τριπλασιασθῇ, ἡ ἀντικειμένη πλευρὰ μ᾽ ὅλον ὅτι αὐξάνει, δὲν διπλασιάζει ὅμως, οὔτε τριπλασιάζει τὸ μάκρος της. καθὼς ἔπρεπε νὰ συμβαίνῃ ἂν αἱ αὐξήσεις τῶν γωνιῶν ἦσαν ἀνάλογοι μὲ τὰς αὐξήσεις τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν, ἢ ἂν αἱ πλευραὶ ἦσαν ἀνάλογοι μὲ τὰς ἀντικειμένας γωνίας.

91. Ἐπειδὴ λοιπὸν δὲν ὑπάρχει μία τελεία, καὶ ἀκριβὴς ἀναλογία μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, διὰ τοῦτο δὲν δυνάμεθα νὰ προσαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν μιᾶς πλευρᾶς, ἢ μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου, ἂν δὲν μεταχειρισθῶμεν ἀντὶ τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα μετροῦσι τὰς γωνίας, κάποιας εὐθείας γραμμὰς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἱκαναὶ εἰς τὸ νὰ κάμουν μίαν ἀκριβῆ ἀναλογίαν. Αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ δὲν εἶναι παρὰ τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα, ἐφαπτόμεναι, συνεφαπτόμεναι, αἱ τέμνουσαι καὶ συνδιατέμνουσαι, τῶν ὁποίων ἡμεῖς ἐδώσαμεν τοὺς ὁρισμοὺς εἰς τὸ τέταρτον κεφάλαιον τοῦ πρώτου τμήματος, καὶ εἴπομεν ἀρκετὰ περὶ αὐτῶν.

92. Τινὲς ἀπὸ τοὺς φιλεπιςήμονας, γεμάτοι ἀπὸ ζῆλον διὰ τὴν αὔξησιν τῶν ἐπιςημῶν, δὲν ἐσοχάσ-

θησαν, ὔτε κόπυς, ὔτε πολυκαιρίαν, ὔτε δαπάνας, ἀλλ' ἔδωκαν τὸν ἑαυτόν τυς μὲ κάθε προθυμίαν ἐς τὸ νὰ λογαριάσυν μὲ μίαν θαυμαςὴν ἀκρίβειαν τὰ ἡμίτονα, τὰ συνημίτονα, κτ. ὅλων τῶν τόξων, κ᾽ ἑπομένως τῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων μέτρον εἶναι τὰ τόξα, ἀπὸ ἓν λεπτὸν ἕως 90° μοίρας, ὑποθέτοντες τὴν ἡμιδιάμετρον διῃρημένην εἰς 10000000000 μέρη. Οἱ πίνακες, ὅιτινες περιέχυν αὐτὺς τὺς λογαριασμὺς ὀνομάζονται ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ. Καὶ διὰ νὰ κάμυν τὴν πρᾶξιν τῦ λογαριασμῦ τῶν τριγώνων εὐκολωτέραν ἔβαλαν εἰς αὐτὺς τὺς πίνακας τὺς λογαρίθμυς τῶν ἡμιτόνων, τῶν ἐφαπτομένων, κτ., ἀντὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ὅιτινες δηλῦτι τὰς ἀπολύτυς δυνάμεις αὐτῶν· ὕτω λοιπὸν κάθε ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη, κ᾽ συνεφαπτομένη ἑνὸς δοθέντος τόξυ θέλει περιέχει ἕνα κάποιον ἀριθμὸν μερῶν τῆς ἡμιδιαμέτρυ, τῦ ὁποίυ ἀριθμῦ ὁ λογάριθμος εὑρίσκεται εἰς τὺς πίνακας τῶν ἡμιτόνων, τὺς ὁποίυς ἡμεῖς ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς παρύσης πραγματείας ὁμῦ μὲ τὺς λογαρίθμυς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, διὰ εὐκολίαν τῦ μαθητῦ μας. Ἂν, παρα: χάρ: ζητῇς τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξυ, ἢ μιᾶς γωνίας 13°, 33′, θέλεις εὑρεῖ εἰς τὺς πίνακας πλησίον αὐτῦ 9.369761, ὅςτις παριςάνει τὸν λογάριθμον τῦ ἡμιτόνυ 13° 33′. Μία μόνη παρατήρησις τύτων τῶν πινάκων εἶναι ἀρκετὴ νὰ σὲ διδάξῃ τὸν τρόπον εἰς τὸ νὰ τὺς μεταχειρίζεται. α′. Ζήτησον εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τῶν πινάκων τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, β′ εἰς τὴν ςήλην τῶν λεπτῶν τὰ δοθέντα λεπτὰ, κ᾽ ὁ λογάριθμος, ὅςτις εὑρίσκεται καταντικρὺ εἰς τὸν εἰρημένον ἀριθμὸν τῶν λεπτῶν, θέλει εἶσθαι ὁ λογάριθμος τῦ ἡμιτόνυ, ἂν ζητῆς τὸ ἡμίτονον. Φαίνεται δὲ κατὰ πρώτην προσβολὴν, ὅτι αὐτοὶ οἱ πίνακες περιέχȣν μόνον τὰ ἡμίτονα, τὰς ἐφαπτομένας, κτ., ἀπὸ 0° μοίρας ἕως 45°, δύναται ὅμως τὶς νὰ εὕρῃ τὰ ἡμίτονα, τὰς ἐφαπτομένας, κτ. ἀκόμη ᾗ διὰ τὰ τόξα, ὁπȣ̃ εἶναι μεγαλήτερα ἀπὸ 45°, ᾗ μάλιστα μέχρι τῶν 180° μοιρῶν. Ἂν θέλῃς, παραδ: χάριν, νὰ εὕρῃς τὸ ἡμίτονον, ἢ τὸ συνημίτονον, κτ., ἑνὸς τόξȣ ἢ μιᾶς γωνίας μοιρῶν 56°, 35′, ζήτησον εἰς τὸ ὑποκάτω μέρ☉ τῶν πινάκων τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, ᾗ τὸν ἀριθμὸν τῶν λεπτῶν εἰς τὴν τελευταίαν ςήλην κατὰ τὰ δεξιὰ, ᾗ ȣ̔́τω ᾗ τῶν ἄλλων τόξων ἕως 90° μοίρας. Τοιȣτοτρόπως λοιπὸν θέλεις εὑρεῖ τὰ ἡμίτονα, τὰ συνημίτονα, κτ. τῶν τόξων, ὁπȣ̃ εἶναι μεγαλήτερα ἀπὸ 45°, ᾗ μικρότερα ἀπὸ 90°. Ὅσον δὲ διὰ ἐκεῖνα, ὁπȣ̃ εἶναι μεγαλήτερα ἀπὸ 90° μοίρας, δὲν ἔχεις νὰ κάμῃς ἄλλο, παρὰ νὰ λάβῃς τὸ ἀναπλήρωμα, ᾗ νὰ ζητήσῃς τὸ ἡμίτονον, ἢ τὸ συνημίτονον, κτ. αὐτȣ̃ τȣ̃ ἀναπληρώματ☉. Διότι ἡμεῖς ἴδαμεν (70) ὅτι τὰ τόξα ὁπȣ̃ εἶναι μεγαλήτερα ἀπὸ 90° μοίρας, ἔχȣσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, ᾗ συνημίτονον, τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην ᾗ συνεφαπτομένην, τὴν αὐτὴν τέμνȣσαν ᾗ συνδιατέμνȣσαν τῶν ἀναπληρωμάτων αὐτῶν.

93 Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ἀπὸ ἐδῶ, ὅτι ὅταν τὶς ἐξεύρῃ ἓν τόξον, ἢ μίαν γωνίαν, δύναται νὰ εὕρῃ ἐν τῷ ἅμα διὰ μέσȣ τȣ́των τῶν πινάκων τὸν λογάριθμον τȣ̃ ἡμιτόνȣ, κτ. αὐτȣ̃ τȣ̃ τόξȣ, ὅστις ὀνομάζεται ἩΜΙΤΟΝΟΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ αὐτȣ̃. Καὶ ἐκ τȣ̃ ἐναντίȣ ὅταν ἐξεύρῃ τὸν ἡμιτονολογάριθμον ἑνὸς τόξȣ, δύναται νὰ εὕρῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, ᾗ τῶν λεπτῶν τȣ̃ τόξȣ, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ λογάριθμ☉, ζητῶν τὸ

ἡμίτονον εἰς τὰς στήλας τῶν ἡμιτόνων, καὶ παρατηρῶν, εἰς ποίας μοίρας καὶ λεπτὰ ἀνταποκρίνεται. Ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τῶν ἡμιτονολογαρίθμων εἶναι πάντοτε τὸ χαρακτηριστικὸν, καθὼς καὶ εἰς τοὺς λογαρίθμους τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, καὶ διακρίνεται ἀπὸ τοὺς ἄλλους χαρακτῆρας μὲ μίαν στιγμήν. Εἰς τὴν στήλην ὅμως τῶν συνεφαπτομένων μικροτέρων ἀπὸ 45° μοίρας, καὶ τῶν ἐφαπτομένων μεγαλητέρων ἀπὸ 45° μοίρας, ὁ πρῶτος χαρακτὴρ εἶναι μηδὲν 0, ἢ 1, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἐξεύρῃς ὅτι πρὸ τοῦ μηδενὸς 0, ἢ πρὸ τῆς μονάδος 1 ἐννοεῖται ἄλλη μία μονὰς, εἰς τρόπον ὅτι ὅταν ἦναι τὸ μηδὲν 0 τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 10, καὶ ὅταν ἦναι ἡ μονὰς 1 τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 11. Αὐτὴ ἡ παρατήρησις εἶναι πολὺ ὠφέλιμος καὶ ἀναγκαία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ Εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΘΟΛΟΥ.

94. α' Εἰς ὅλα τὰ εὐθύγραμμα, καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα ἂν λάβῃς τὴν ὑποτείνουσαν ὡς ἡμιδιάμετρον, ἢ ὡς ὁλόκληρον ἡμίτονον, ὁποῦ εἶναι τὸ ἴδιον, αἱ δύω λοιπαὶ πλευραὶ γίνονται ἡμίτονα τῶν ἀντικειμένων γωνιῶν. Ἐὰν, παρα: χάριν, λάβῃς τὸ σημεῖον Α ὡς κέντρον (πίναξ. ϛ'. σχῆμ: α'), καὶ τὸ διάστημα ΑΓ ὡς ἡμι-

διάμετρον, ϗ περιγράψῃς τὸ τόξον ΓΔ, τῦ ὁποίου ἡ ἡμιδιάμετρος εἶναι ἡ ὑποτένυσα ΑΓ, τότε ἡ πλευρὰ ΒΓ θέλει γένει ἡμίτονον τῦ τόξυ ΓΔ, ἢ τῆς γωνίας ΒΑΓ· ὡσαύτως ἂν λάβῃς τὸ σημεῖον Γ ὡς κέντρον, ϗ τὴν ὑποτένυσαν ΑΓ τῦ τριγώνυ ὡς ἡμιδιάμετρον, ϗ περιγράψῃς τὸ τόξον ΑΕ, ἡ πλευρὰ ΑΒ θέλει εἶσθαι τὸ ἡμίτονον τῦ τόξυ ΑΕ, ἢ τῆς γωνίας ΑΓΕ.

95. Ἕπεται ἐκ τύτυ ὅτι εἰς ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα εἴτε ὀρθογώνια, εἴτε ὀξυγώνια, εἴτε ἀμβλυγώνια,

> Το ἡμίτονον μιᾶς γωνίας.
> ςέκει πρὸς τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν αὐτῆς.
> Ὥσπερ τὸ ἡμίτονον μιᾶς ἄλλης γωνίας.
> Πρὸς τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν τῆς ἰδίας

Καὶ ἐκ τῦ ἐναντίυ.

> Μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνυ, ὅποια ϗ ἂν ἦναι.
> ςέκει ἐις τὴν ἀντικειμένην γωνίαν αὐτῆς,
> Ὥσπερ μία ἄλλη πλευρὰ,
> Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικειμένης γωνίας τῆς ἰδίας.

Σημείωσαι ὅτι αὐτὴ ἡ συνέπεια εἶναι ἕνας γενικὸς κανὼν, τῦ ὁποίυ ἡ χρῆσις εἶναι συνεχὴς εἰς ὅλην τὴν τριγωνομετρίαν, ϗ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν πρέπει νὰ τὸν ἔχωμεν πάντα παρόντα εἰς τὴν μνήμην μας.

96. ϛ΄. Εἰς ὅλα τὰ εὐθύγραμμα, ϗ ὀρθογώνια τρίγωνα ἂν λάβῃς μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ὡς ἡμιδιάμετρον, ἡ ἄλλη γίνεται ἐφαπτομένη τῆς γωνίας, ἥτις ἀντίκειται εἰς τὴν ἰδίαν πλευρὰν, ϗ ἡ ὑποτένυσα γίνεται τέμνυσα τῆς αὐτῆς γωνίας. Ἂν, παραδ: χάρ: λάβῃς τὴν ΑΒ πλευρὰν ὡς ἡμιδιάμετρον, ϗ

κ̀ περιγράψῃς μὲ τὸν διαβίτην συ τὸ τόξον ΒΦ (πίναξ. ς΄. σχη: α΄), ἡ ἄλλη πλευρὰ ΒΓ γίνεται ἐφαπτομένη, ὡς βλέπεις, τῦ τόξυ ΒΦ, ἢ τῆς γωνίας ΒΑΦ, κ̀ ἡ ὑποτείνυσα ΑΓ γίνεται τέμνυσα· ἂν ὅμως λάβῃς τὴν πλευρὰν ΒΓ ὡς ἡμιδιάμετρον, κ̀ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Γ ὡς κέντρον, ἡ λοιπὴ πλευρὰ ΑΒ γίνεται ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ΑΓΒ, κ̀ ἡ ὑποτείνυσα ΑΓ τέμνυσα.

97. Ἀπὸ τὴν πρότασιν ταύτην δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ τὲς δύω ἀκολύθυς κανόνας διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

α΄. Ἡ ἡμιδιάμετρος ἢ τὸ ὁλόκληρον ἡμίτονον,
στέκει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν,
Ὥσπερ ἡ ὑποκειμένη πλευρὰ εἰς αὐτὴν τὴν γωνίαν,
στέκει πρὸς τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν τῆς ἰδίας.

β΄. Ἡ μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς ὀρθογωνίυ τριγώνυ,
στέκει πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν.
Ὥσπερ ἡ ἡμιδιάμετρος
Πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, ἥτις ἀντίκειται εἰς τὴν δευτέραν πλευράν.

Περὶ τῆς Λύσεως τῶν Ευθυγράμμων κ̀ Ορθογωνίων Τριγώνων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

98. Δοθείσης τῆς ὑποτεινύσης, κ̀ μιᾶς ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς, νὰ εὕρῃ τὶς μίαν ἀπὸ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἑνὸς ὀρθογωνίυ τριγώνυ.

Εἰς τῦτο τὸ πρόβλημα τὰ διδόμενα, ἤτοι τὰ γνωςὰ μέρη τῦ τριγώνυ εἶναι τρία, α΄ ἡ ὑποτείνυσα, β΄ ἡ ὀρθὴ γωνία, κ̔ γ΄ μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας, τὸ δὲ ζητύμενον εἶναι μία ἀπὸ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ἥτις εὑρίσκεται πάντοτε διὰ τῆς πρώτης ἀναλογίας (95) ὕτως.

Ἡ ἡμιδιάμετρος,
ςέκει πρὸς τὴν ὑποτείνυσαν.
Ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας, ἥτις ἀντίκειται εἰς τὴν ζη-
τυμένην πλευρὰν,
ςέκει πρὸς αὐτὴν τὴν ζητυμένην πλευράν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (πίναξ. ς΄. σχη: β΄.) ὀρθὴν ἔχον τὴν Β γωνίαν, τῦ ὁποίυ τὴν μὲν ὑποτείνυσαν ΑΓ ὑποθέτομεν 355 μίλια, τὴν δὲ γωνίαν Γ 53°, 8′· ζητεῖται λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΒ.

Π Ρ Α Ξ Ι Σ.

Διὰ νὰ καθοδηγήσωμεν ὅμως τὸν μαθητήν μας εἰς τὸν λογισμὸν τῶν τριγώνων, τὸν συμβυλεύομεν νὰ κάμνη, ὅσον ἐνδέχεται, ἓν τρίγωνον ἀνάλογον, κ̔ μεγάλον, μεταχειριζόμενος τὴν κλίμακα τῶν χορδῶν, κ̔ τῶν ἴσων μερῶν· διότι θέλει ἰδεῖ ὅτι μὲ τῦτον τὸν τρόπον φθάνει εἰς τὸν ἴδιον σκοπὸν κατὰ δύω τρόπυς, τὸ ὁποῖον θέλει τῦ χρησιμεύσει εἰς ἀπόδειξιν. Καὶ διὰ νὰ μὴ συγχίζη τὰ γνωςὰ μέρη τῦ τριγώνυ μὲ τὰ ζητύμενα, θέλει σημειώνει τὰ μὲν γνωςὰ μὲ μίαν μικρὰν γραμμὴν, κ̔ τὰ ζητύμενα μὲ ἓν εἶδος μηδενὸς, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμά μας. Ἂν λοιπὸν λάβῃς τὴν ὑποτείνυσαν ὡς ἡμιδιάμετρον, ἢ ὁλόκληρον ἡμίτονον, τοῦ ὁποίου ὁ ἡμιτονολογάριθμος εἶναι πάντοτε οὗτος 10.000000, διὰ νὰ εὕρῃς τὴν πλευρὰν ὅπου ζητεῖς, κάμε τὴν ἀκόλουθον μέθοδον τῶν τριῶν (95) οὕτως.

Ἡ ἡμιδιάμετρος, ἢ τὸ ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας Β στέκει πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ $=$ 355· ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Γ $= 53°,8'$ πρὸς τὴν ζητουμένην πλευρὰν ΑΒ.

Σύναψον	Λογ. 355	$=$	2.550228
	Λογ. $53°,8'$	$=$	9.903108
Ἄφελε	Κεφ. . . .	$=$	12.453336
	Λογ. ἡμιδιαμ.	$=$	10.000000
	Διαφ. . . .	$=$	2.453336

Αὐτὴ ἡ διαφορὰ θέλει εἶσθαι ὁ λογάριθμος τῆς ζητουμένης πλευρᾶς ΑΒ, ὅστις ἂν ζητηθῇ μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς, εὑρίσκεται ἀνταποκρινόμενος εἰς τὸν ἀριθμὸν 284, καὶ τόσον θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη πλευρὰ ΑΒ, ἤτοι ἴση μὲ 284 μίλια.

ΑΛΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ὑποθέτω τὴν μὲν ὑποτείνουσαν ΑΓ (σχη: γ'.) ἴσην μὲ $\left\{\begin{array}{c}336\\28\\349\end{array}\right\}$ μίλια,

τὴν δὲ γωνίαν $\left\{\begin{array}{l}Α = 30°, 0'\\Α = 40 ,40\\Γ = 54 ,45\end{array}\right\}$ καὶ ζητῶ τὴν πλευρὰν $\left\{\begin{array}{c}\text{ΒΓ}\\ \text{ΑΒ}\\ \text{ΒΓ}\end{array}\right\}$.

Ἀπόκρισις 168.213,1.201,4.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

99. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς ἀπὸ τὰς λοιπὰς πλευρὰς νὰ εὕρῃ τὶς μίαν ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας.

Τὰ γνωστὰ μέρη εἶναι τρία, α' ἡ ὑποτείνουσα, β' ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη πλευρὰ, καὶ γ' ἡ ὀρθὴ γωνία, τὸ δὲ ζητούμενον εἶναι μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας, ἥτις εὑρίσκεται πάντοτε διὰ τῆς δευτέρας ἀναλογίας (95) οὕτως.

Ἡ ὑποτείνουσα
στέκει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον,
Ὥσπερ ἡ γνωστὴ πλευρὰ.
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικειμένης γωνίας εἰς τὴν αὐτὴν πλευράν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ (σχη: γ') 355 μίλια, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ 213· ζητεῖται λοιπὸν ἡ γωνία Α.

ΠΡΑΞΙΣ.

Ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ = 355 στέκει εἰς τὴν ἡμιδιάμετρον, ὥσπερ ἡ πλευρὰ ΒΓ = 213 στέκει εἰς τὸ ἡμίτονον τῆς ζητουμένης γωνίας Α, ἥτις εὑρίσκεται 36°, 52'· διότι·