θᾶσαν ἐπάνω εἰς τὴν κλίμακα· διότι αὐτὴ ἡ χορδὴ δηλοῖ τὴν ἡμιδιάμετρον τοῦ κύκλου, ὁποῦ ἐχρησίμευσεν εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς κλίμακος, καθὼς θέλομεν ἰδεῖ. Ἀφ' οὗ λοιπὸν γράψῃ τὸ τόξον εἰς τοῦτον τὸν τρόπον, δὲν τῷ μένει πλέον, παρὰ νὰ λάβῃ τὴν χορδὴν αὐτοῦ μὲ τὸν διαβίτην, καὶ νὰ τὴν προσαρμόσῃ ἐπάνω εἰς τὴν κλίμακα, εἰς τρόπον ὥστε ἡ μία μύτη τοῦ διαβίτου νὰ ἦναι ἐπάνω εἰς τὸ σημεῖον τῆς κλίμακος, ὁποῦ εἶναι σημειωμένον μὲ τὸ μηδὲν 0, καὶ ἡ ἄλλη θέλει τῷ φανερώσει ἐπάνω εἰς τὴν κλίμακα τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν, ὁποῦ κάμνει τὸ μέτρον τῆς ζητουμένης γωνίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ τῶν Τριγώνων.

47. Τὸ ΤΡΙΓΩΝΟΝ εἶναι ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τρεῖς πλευράς, καὶ περιλαμβάνει τρεῖς γωνίας. ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τρεῖς εὐθείας γραμμάς· ΤΡΙΓΩΝΟΝ δὲ ΣΦΑΙΡΙΚΟΝ λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐπάνω εἰς μίαν σφαῖραν ἀπὸ τρία τόξα μεγάλων κύκλων (α).

(α) Μεγάλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ ἠμποροῦν νὰ τὴν κόψουν εἰς δύο ἴσα μέρη, καὶ μικροὶ ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος δὲν εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.

Τὸ τρίγωνον ἀναφέρεται, τόσον ἐις τὰς τρεῖς γωνίας τȣ, ὥσαν ϗ ἐις τὰς πλευράς τȣ, ϗ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν ὀνομάζεται ϗ πολλαχῶς.

α΄. Ἀναφερόμενον ἐις τὰς γωνίας τȣ.

48. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ἔχῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ὀνομάζεται ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ, καθὼς τὸ ΑΒΓ (σχη: κδ΄). Καὶ ἡ πλευρὰ ἀυτȣ̃ ΑΓ, ὁπȣ̃ ὑποτένει ἐις τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ὀνομάζεται ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ.

49. Ἐὰν δὲ αἱ τρεῖς γωνίαι τȣ̃ τριγώνȣ ἦναι ὀξεῖαι, ὀνομάζεται ΟΞΥΓΩΝΙΟΝ, καθὼς τὸ ΔΕΦ (σχη: κε΄).

50. Ἐὰν τέλος πάντων ἡ μία ἀπὸ τὰς τρεῖς γωνίας τȣ̃ τριγώνȣ ἦναι ἀμβλεῖα, τὸ τρίγωνον ὀνομάζεται ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟΝ, καθὼς τὸ ΘΗΙ (σχη: κϛ΄).

β΄. Ἀναφερόμενον ἐις τὰς πλευράς τȣ̃.

51. Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνȣ ἦναι ἴσαι ἀναμεταξύτων, τὸ τρίγωνον ὀνομάζεται ΙΣΟΠΛΕΥΡΟΝ, καθὼς τὸ ΛΜΝ (σχη: κζ΄).

52. Ἐὰν δὲ αἱ δύω μόνον ἦναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον λέγεται ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ, καθὼς τὸ ΟΠΞ (σχη: κη΄).

53. Ἐὰν δὲ τέλος πάντων ἔχῃ ϗ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσȣς, ὀνομάζεται ΣΚΑΛΗΝΟΝ, καθὼς τὸ ΡΣΤ (σχη: κθ΄).

54. Τὰ τρίγωνα, ὁπȣ̃ μέχρι τȣ̃δε περιεγράψαμεν, ἔχȣν μίαν ἰδιότητα, ὅσον θαυμαςὴν, ἄλλο τόσον ἀναγκαίαν, ϗ ὠφέλιμον ἐις τȣ̀ς Ναύτας, ἥτις εἶναι ἄυτη. „ Αἱ τρεῖς γωνίαι κάθε ἐυθυγράμμȣ τριγώνȣ

„ εἴτε ὀρθογωνίȣ, εἴτε ὀξυγωνίȣ, εἴτε ἀμβλυγωνίȣ συνάμα λαμβανόμεναι εἶναι πάντοτε ἴσαι μὲ δύω γωνίας ὀρθὰς, ἤτοι μὲ 180° μοίρας „. Διότι ἂν μὲ μίαν ϗ τὴν αὐτὴν ἡμιδιάμετρον, ἢ μὲ τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα τȣ̃ διαβίτȣ, γράψωμεν εἰς τὸ τρίγωνον τȣ̃ λ′ σχήματος τρία τόξα τȣ̃ κύκλȣ, λαμβάνοντες ὡς κέντρα τὰς γωνίας Α, Β, ϗ Γ, διὰ νὰ τὰς μετρήσωμεν, αὐτὰ τὰ τρία τόξα ἡνωμένα ὁμȣ̃ κάμνȣν τὸ ἥμισυ μιᾶς περιφερείας, ϗ ἑπομένως δύνανται πάντοτε 180° μοίρας. Θέλει ἀκολȣθήσει τὸ ἴδιον κἂν ἡμεῖς ἀνοίξωμεν, ἢ κλείσωμεν τὰς γωνίας Α ϗ Γ. Αἱ γωνίαι θέλȣν γένει μεγαλήτεραι, ἢ μικρότεραι· ϗ αἱ δύω πλευραὶ, ὁπȣ̃ συμπίπτȣν τώρα κατὰ τὸ Β, θέλȣν συμπέσει μακρύτερα ἢ κοντήτερα. Ἡ γωνία ὅμως Β, ἥτις, καθὼς εἴπομεν, δὲν λαμβάνει κἀμμίαν αὔξησιν, ἢ ἐλάττωσιν, ἀπὸ τὴν αὔξησιν, ἢ ἐλάττωσιν τῶν πλευρῶν, θέλει γένει πλέον ὀξεῖα, ἢ πλέον ἀμβλεῖα, μεγαλητέρα, ἢ μικροτέρα, ϗ κατὰ τȣ̃τον τὸν τρόπον αἱ τρεῖς γωνίαι θέλȣν εἶσθαι ἴσαι μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, ἢ μὲ 180° μοίρας. Διὰ νὰ καταλάβωμεν ὅμως καλήτερα τὴν αἰτίαν τῆς ἰδιότητος ταύτης, δὲν ἔχομεν νὰ κάμωμεν, παρὰ ἀπὸ τὸ σημεῖον Β νὰ σύρωμεν μίαν παράλληλον, καθὼς εἶναι ἡ ΔΕ, εἰς τὴν ΑΓ πλευρὰν τȣ̃ τριγώνȣ. Αἱ δύω εὐθεῖαι γραμμαὶ μὲ τὸ νὰ ἦναι παράλληλοι, ἡ θέσις, ἢ ἡ κλίσις τῆς ΑΒ εὐθείας γραμμῆς θέλει εἶσθαι ἡ αὐτὴ, τόσον ὡς πρὸς τὴν μίαν, ὡσὰν ϗ ὡς πρὸς τὴν ἄλλην, ἤτοι θέλει κλίνει τόσον ἐπάνω εἰς τὴν μίαν, ὅσον ϗ ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ϗ διὰ τȣ̃το δυνάμεθα νὰ βάλλωμεν τὴν γωνίαν Α εἰς τὸν τόπον τῆς γωνίας ΑΒΔ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι ἀναμεταξύ των. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐμποροῦμεν νὰ βάλλωμεν τὴν γωνίαν Γ ἐς τὸν τόπον τῆς γωνίας ΓΒΕ. Ὅθεν εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὴν ἀλλαγὴν ταύτην, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου κάμνουν τὸ ἥμισυ μιᾶς περιφερείας, ἢ 180° μοίρας.

55. Ἕπεται ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ταύτην τῶν τριγώνων, ὅτι ὅταν ἡμεῖς ἐξεύρωμεν τὰς δύω γωνίας ἑνὸς τριγώνου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πάντοτε καὶ τὴν τρίτην, ἀφαιροῦντες αὐτὴν ἀπὸ 180° μοίρας. Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, ἡ μὲν μία ἦναι 60° μοιρῶν, ἡ δὲ ἄλλη 80°, ἡ τρίτη πρέπει νὰ ἦναι ἀναγκαίως 40° ὅταν αἱ τρεῖς ὁμοῦ ἦναι 180° μοιρῶν. Ὁπόταν τὸ τρίγωνον ἦναι ὀρθογώνιον, ἡ ὀρθὴ μόνη γωνία εἶναι 90° μοιρῶν. Ὅθεν πρέπει ἀναγκαίως αἱ λοιπαὶ δύω, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὀξεῖαι, νὰ κάμνουν ὁμοῦ 90° μοίρας, καὶ ἑπομένως νὰ ἦναι παραπλήρωμα ἡ μία τῆς ἄλλης. καὶ ἂν ὑποθέσωμεν τὴν μίαν 30° μοιρῶν, ἡ αλλη θέλει εἶσθαι 60°. Ἂν δὲ τὴν ὑποθέσωμεν 41° 15', ἡ ἄλλη θέλει εἶσθαι 48°, 45'.

56. Ἔχουσι δὲ πρὸς τούτοις τὰ τρίγωνα καὶ ἄλλην μίαν ἰδιότητα λίαν ὠφέλιμον ἐς τὸν σκοπόν μας, ἥτις εἶναι αὕτη. „ Ὅτι ἡ μεγαλητέρα γωνία ἑνὸς τριγώ-
„ νου ὑποτείνει πάντοτε ἐς τὴν μεγαλητέραν πλευρὰν,
„ καὶ ἡ μικροτέρα ἐς τὴν μικροτέραν, ὡς τρόπον ὅτι
„ ὅταν αἱ δύω πλευραὶ ἦναι ἴσαι, εἶναι ἴσαι ὡσαύ-
„ τως καὶ αἱ γωνίαι, ὁποῦ ὑποτείνουν ἐς αὐτάς.

57. Τὰ σχήματα, ὁποῦ περιορίζονται ἀπὸ τέσσαρας πλευρὰς, ὀνομάζονται ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ, καὶ ὅταν αἱ ἀντικείμεναι πλευραὶ ἦναι παράλληλοι ἀναμεταξύ των, τότε λέγονται ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ. Τὸ λγ' σχῆμα παρασαίνει ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ παραλ-

ληλόγραμμα, ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι παράλληλ☉ εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ, κ̓ ἡ ΑΒ εἰς τὴν ΓΔ, τὸ λδ΄ σχῆμα εἶναι ὡσάυτως ἓν παραλληλόγραμμον, ὀνομάζεται ὅμως κατ' ἐξοχὴν ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ· διότι ἔχει ὅλας τὰς γωνίας ὀρθάς.

58. Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ, καθὼς ἡ ΑΓ, ὁπȣ̃ τμιγȣν τὰς δύω ἀντικειμένας γωνίας, κ̓ κόπτȣν τὰ σχήματα ταῦτα εἰς τὴν μέσην λέγονται διάμετροι, τὰς ὀνομάζομεν ὅμως κοινῶς ΔΙΑΓΩΝΙΟΥΣ, διὰ νὰ τὰς διακρίνωμεν ἀπὸ τὰς διαμέτρȣς τῶν κύκλων.

Περὶ τῶν Ἴσων, κ̓ Ὁμοίων Τριγώνων.

59. Ἐὰν θέλῃς νὰ κάμῃς ἓν τρίγωνον ἴσον μὲ ἓν ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ κάμῃς τινὰ μέρη τȣ̃ ἑνὸς ἴσα μὲ τινὰ μέρη τȣ̃ ἄλλȣ. Παραδείγματ☉ χάριν, ἂν κάμῃς τὴν γωνίαν Α τȣ̃ ΜΝΟ τριγώνȣ (σχη: λά) ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α τȣ̃ ΑΒΓ τριγώνȣ (σχη: λ΄) κ̓ πρὸς τȣ́τοις τὰς δύω πλευρὰς ΜΝ, κ̓ ΜΟ ἴσας μὲ τὰς δύω πλευρὰς ΑΒ κ̓ ΑΓ, τὰ δύω τρίγωνα θέλȣν εἶσθαι ἴσα ἀναμεταξύ των. Και διὰ νὰ βεβαιωθῇς, ἀρκεῖ νὰ προσαρμόσῃς μὲ τὸν νȣ̃ν σȣ τὸ δέυτερον τρίγωνον ἐπάνω εἰς τὸ πρῶτον, εἰς τρόπον ὥςε ἡ μὲν γωνία Μ νὰ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν γωνίαν Α, αἱ δὲ πλευραὶ ΜΝ κ̓ ΜΟ εἰς τὰς πλευρὰς ΑΒ κ̓ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι μὲ αὐτάς.

60. Ἓν ἄλλο μέσον τȣ̃ νὰ κάμῃς τὰ δύω τρίγωνα ἴσα εἶναι τὸ νὰ κάμῃς τὰς τρεῖς πλευρὰς τȣ̃ ἑνὸς ἴσας μὲ τὰς τρεῖς τȣ̃ ἄλλȣ μίαν πρὸς μίαν. Σημείωσαι ὅμως, ὅτι ἡ συνθήκη τῆς ἰσότητ☉ τῶν πλευρῶν, ἥτις ζητεῖται διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων, δὲν

ἀρκεῖ

ἀρκεῖ διὰ νὰ κάμῃς ϗ τ᾽ ἄλλα σχήματα ἴσα, ὅσα ἔχουν πλέον παρὰ τρεῖς πλευράς· διότι μ᾽ ὅλον ὅτι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι εἰς τὰ δύω σχήματα, δύνανται ὅμως νὰ κάμουν γωνίας ἀνίσους, ἢ νὰ λάβουν μίαν διάφορον θέσιν ἡ μία ὡς πρὸς τὴν ἄλλην. Ἐὰν ῥίψῃς τοὺς ὀφθαλμούς σου εἰς τὰ σχήματα λγ´ ϗ λδ´, θέλεις ἰδεῖ ὅτι μ᾽ ὅλον ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου, μ᾽ ὅλον τοῦτο τὰ σχήματα εἶναι ἄνισα. Ἐὰν λοιπὸν θέλῃς νὰ τὰ κάμῃς ἴσα, πρέπει νὰ τὰ διαιρέσῃς πρῶτον εἰς τρίγωνα ϗ ἔπειτα νὰ κάμῃς ἕκαστον τρίγωνον ἴσον μὲ τὸ ἀνταποκρινόμενον εἰς αὐτό.

61. Δύω τρίγωνα εἶναι ϗ λέγονται ΟΜΟΙΑ, ὁπόταν ἁπλῶς αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς ἦναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου. Τὸ μικρὸν τρίγωνον ΦΘΗ (σχη: λβ´) εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ μεγάλον ΜΝΟ (σχη: λα´), δὲν εἶναι ὅμως ϗ ἴσον καθὼς, βλέπεις, λέγεται δὲ ὅμοιον διότι παρίστησι τὸ μεγάλον εἰς μικρὸν, ϗ διότι ἂν, καθ᾽ ὑπόθεσιν, ἡ μία πλευρὰ ΟΝ τοῦ μεγάλου τριγώνου ἦναι δύω τρίτα τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτοῦ ΜΟ, ϗ τρία τέταρτα τῆς ΜΝ πλευρᾶς, τὸ αὐτὸ θέλει ἀκολουθήσει ϗ εἰς τὸ μικρόν· ἡ μὲν πλευρὰ αὐτοῦ ΘΗ θέλει εἶσθαι ὡσαύτως δύω τρίτα τῆς ἄλλης αὐτοῦ πλευρᾶς ΦΗ, ϗ τρία τέταρτα τῆς ΦΘ· ϗ μ᾽ ἕνα λόγον τὸ μικρὸν τρίγωνον εἶναι ὡσὰν μία εἰκόνα τοῦ μεγάλου, ὅπερ συμβαίνει πάντοτε, ὅταν αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς ἦναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου μία πρὸς μίαν. Διὰ νὰ καταλάβῃς ὅμως τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν, πρέπει νὰ δώσῃς προσοχὴν εἰς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἴπομεν (20), ὅτι τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν δὲν προέρχεται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

62. Ἡ καθόλου ἰδιότης τῶν ὁμοίων τριγώνων εἶναι αὕτη. „ Δύω ὅμοια τρίγωνα παραβαλλόμενα τὸ ἓν μὲ „ τὸ ἄλλο, ἡ μικροτέρα πλευρὰ τοῦ πρώτου στέκει εἰς „ τὴν μικροτέραν πλευρὰν τοῦ δευτέρου, καθὼς ἡ με- „ γαλητέρα τοῦ πρώτου εἰς τὴν μεγαλητέραν τοῦ δευτέρου· ὡσαύτως κ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ α' στέκει εἰς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ β'· κ μ' ἕνα λόγον αἱ διαστάσεις τῶν ὁμοίων, κ ὁμοίως κειμένων τριγώνων, ἔχουσι πᾶσαι τὸν αὐτὸν λόγον, ἢ τὴν αὐτὴν σχέσιν πρὸς ἀλλήλας. Αὐτὴ εἶναι μία συνέπεια, ἥτις ἕπεται ἀναγκαίως ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων. Διὰ νὰ σαφηνίσωμεν ὅμως τὰ εἰρημένα περισσότερον ἡμεῖς θέλομεν ἐξηγήσει ἐντὸς ὀλίγου τὰς λέξεις λόγος, σχέσις, κ ἀναλογία, μ' ὅσην συντομίαν, μ' ἄλλην τόσην καθαρότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Ὁρισμοὶ, ἤτοι Ἐξηγήσεις τῶν Ἡμιτόνων, Ἐφαπτομένων, κ Τεμνουσῶν.

63. Ἐὰν ἀπὸ τὴν ἄκραν ἑνὸς τόξου, ὁποίου κ ἂν ἦναι, σύρῃ τις μίαν κάθετον γραμμὴν ἐπάνω εἰς τὴν ἡμιδιάμετρον, ἥτις ἀπερνᾷ ἀπὸ τὴν ἄλλην ἄκραν τοῦ ἰδίου τόξου, αὐτὴ ἡ κάθετος ὀνομάζεται ΟΡΘΟΝ ΗΜΙΤΟΝΟΝ, ἢ ἁπλῶς ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἡ αὐτὴ κάθετος ὀνομάζεται κ ἡμίτονον τῆς γωνίας, ἥτις μετρᾶται ἀπὸ τὸ ἴδιον τόξον. Ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἀπὸ τὴν ἄκραν Γ τοῦ ΑΓ τόξου (σχη: λε') σύρωμεν τὴν ΓΕ κάθε-

τὸν ἐπάνω εἰς τὴν ἡμιδιάμετρον ΑΒ, ἥτις ἀπερνᾷ ἀπὸ τὴν ἄλλην ἄκραν Α τοῦ ἰδίου τόξου, ἡ κάθετος ΓΕ ὀνομάζεται ἡμίτονον τοῦ ΑΓ τόξου, καὶ εἰς τὸν ἴδιον καιρὸν ἡμίτονον τῆς ΑΒΓ γωνίας, τὴν ὁποίαν μετρεῖ τὸ ΑΓ τόξον. Ὡσαύτως καὶ ἡ κάθετος ΓΦ εἶναι ἡμίτονον τοῦ ΓΘ τόξου, καὶ τῆς ΓΒΘ γωνίας, ἥτις μετρεῖται ἀπὸ αὐτό.

64. Τὸ μέρος ΑΕ τῆς ἡμιδιαμέτρου, τὸ ὁποῖον ἐναπολαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἡμιτόνου ΓΕ, καὶ τῆς ἄκρας Α τοῦ τόξου ΑΓ, ὀνομάζεται ΠΛΑΓΙΟΝ ΗΜΙΤΟΝΟΝ τοῦ ἰδίου τόξου, ἢ τῆς γωνίας ΑΒΓ (σχη: λε').

65. Τὸ δὲ μέρος ΑΝ τῆς καθέτου γραμμῆς ἐπάνω εἰς τὴν ἄκραν Α τῆς ἡμιδιαμέτρου ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἐναπολαμβάνεται μεταξὺ τῆς αὐτῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΒΓ, ἐκβαλλομένης μέχρι τοῦ Ν, ὀνομάζεται ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ τοῦ τόξου ΑΓ, ἢ τῆς γωνίας ΑΒΓ.

66. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΓ, ἥτις δὲν εἶναι ἄλλο, παρὰ ἡ ἰδία ἡμιδιάμετρος ΒΓ, ἐκβαλλομένη μέχρι τῆς ἐφαπτομένης ΑΝ, ὀνομάζεται ΤΕΜΝΟΥΣΑ τοῦ ἰδίου τόξου ΑΓ, καὶ τῆς ἰδίας γωνίας ΑΒΓ. Ὡσαύτως ἡ ΘΙ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ΘΒΓ, καὶ τοῦ τόξου ΘΓ, καὶ ἡ ΒΙ εἶναι ἡ τέμνουσα αὐτῶν.

67. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον ΓΘ εἶναι Παραπλήρωμα τοῦ τόξου ΑΓ, διότι τὰ δύω ὁμοῦ εἶναι ἴσα μὲ ἓν τεταρτημόριον τοῦ κύκλου, ἢ μὲ 90° μοίρας (21), διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ ΓΦ εἶναι τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος, ἡ ΦΘ τὸ πλαγίον ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος, ἡ ΘΙ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ παραπληρώματος, καὶ ἡ ΒΙ ἡ τέμνουσα τοῦ παραπληρώματος τοῦ τόξου ΑΓ, ἢ τῆς ΑΒΓ γωνίας. Βλέπεις

ὅμως πόσον γίνεται διεξοδικὸς ὁ λόγος μὲ αὐτὰς τὰς ὀνομασίας, ὅθεν διὰ συντομίαν ἡμεῖς λέγομεν ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ ἀντὶ ἡμιτόνου παραπληρώματος, ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ ΠΛΑΓΙΟΝ ἀντὶ ἡμιτόνου πλαγίου παραπληρώματος, ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΝ ἀντὶ ἐφαπτομένης παραπληρώματος, καὶ ΣΥΝΔΙΑΤΕΜΝΟΥΣΑΝ ἀντὶ τεμνούσης παραπληρώματος, εἰς τρόπον ὅτι αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ ΓΦ, ΘΙ, ΒΙ, καὶ ΘΦ λέγονται συνημίτονον, συνεφαπτομένη, συνδιατέμνουσα, καὶ συνημίτονον πλάγιον τοῦ ΑΓ τόξου, ἢ τῆς ΑΒΓ γωνίας· ὡσαύτως καὶ αἱ ΓΕ, ΑΕ, ΑΝ, καὶ ΒΝ λέγονται ἐξ ἐναντίας συνημίτονον, συνημίτονον πλάγιον, συνεφαπτομένη, καὶ συνδιατέμνουσα τοῦ ΓΘ τόξου, ἢ τῆς ΓΒΘ γωνίας· διότι καὶ τὸ ΑΒ τόξον εἶναι παραπλήρωμα τοῦ ΓΘ, καθὼς καὶ τὸ ΓΘ τοῦ ΑΒ (σχημ: λε').

68. Εἶναι φανερὸν λοιπὸν. α'. „ ὅτι τὸ συνημίτονον „ ΓΦ ἑνὸς τόξου, ὁποίου καὶ ἂν ἦναι ΑΓ, εἶναι ἴσον μὲ „ τὸ μέρος ΒΕ τῆς ἡμιδιαμέτρου, ὅπερ ἐναπολαμβάνεται „ μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ ἡμιτόνου.

„β'. Ὅτι τὸ ἡμίτονον ἑνὸς ὁποιουδήποτε τόξου ΑΓ, εἶναι „ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς ΓΗ ἑνὸς διπλασίου τόξου „ ΓΑΗ.

Ἕπεται ἐκ τῆς τελευταίας προτάσεως, „ ὅτι τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου, ἢ μιᾶς γωνίας μοιρῶν 30° εἶναι ἴσον „ μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιδιαμέτρου „· ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς 60° μοιρῶν, ἥτις εἶναι, ὡς ἴδαμεν, ἴση μὲ τὴν ἡμιδιάμετρον.

„ Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ 45° μοιρῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιδιάμετρον „· διότι ἂν ὑποθέσωμεν (σχημ: λε') τὴν γωνίαν ΑΒΓ μοιρῶν 45°, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΝ εἶναι ὀρθή, ἤτοι μοιρῶν 90° ἡ γωνία ΑΝΒ θέλει εἶσθαι ὡσαύτως 45° μοιρῶν· ὅθεν τὸ τρίγωνον ΑΒΝ θέλει εἶσθαι ἰσοσκελὲς, κ) ἐπομένως ἡ ΑΝ θέλει εἶσθαι ἴσὴ μὲ τὴν ΑΒ.

69. Ἐν ὅσῳ τὸ τόξον ΑΓ (σχη: λε') αὐξάνει, τὸ μὲν ἡμίτονον ἀυτῦ ΕΓ αὐξάνει, τὸ δὲ συνημίτονον ἀυτῦ ΓΦ, ἢ ΒΕ ἐλαττῦται. Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, κάμωμεν τὸ τόξον ΑΓ ἴσον μὲ τὸ ΑΘ, ἤτοι μὲ 90° μοίρας, εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ μὲν ἡμίτονον ἀυτῦ ΓΕ γίνεται τότε τὸ ΘΒ, ἤτοι ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιάμετρον, τὸ ὁποῖον μὲ τὸ νὰ ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ ὅλα λέγεται ΟΛΟΚΛΗΡΟΝ ΗΜΙΤΟΝΟΝ, τὸ δὲ συνημίτονον ἀυτῦ ΦΓ γίνεται μηδὲν· διότι ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Γ πίπτει ἐπάνω εἰς τὸ σημεῖον Θ, ἡ κάθετος ΓΦ γίνεται ἀναγκαίως μηδὲν, ἤτοι ἀφανίζεται παντάπασιν.

Ὅσον δὲ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΑΝ (σχη: λε'). κ) τὴν συνεφαπτομένην ΘΙ, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἡ μὲν ἐφαπτομένη ΑΝ μεγαλώνει συνεχῶς, ἡ δὲ συνεφαπτομένη ἐκ τῦ ἐναντίυ σμικραίνει. Εἰς τρόπον ὅτι ὅταν τὸ τόξον ΑΓ γένῃ 90° μοιρῶν, ἡ μὲν ἐφαπτομένη ἀυτῦ γίνεται ἄπειρος, ἡ δὲ συνεφαπτομένη μηδὲν, ἤτοι ἀφανίζεται· διότι ὅσον τὸ τόξον ΑΓ μεγαλώνει, τόσον τὸ σειμεῖον Ν ὑψῦται ἐπάνω εἰς τὴν ΑΒ, κ) ὅταν τὸ σημεῖον Γ πλησιάσῃ ἀπείρως εἰς τὸ σημεῖον Θ, αἱ δύω εὐθεῖαι γραμμαὶ ΒΝ κ) ΑΝ γίνονται σχεδὸν παράλληλοι, κ) δὲν συμπίπτυν παρὰ εἰς ἓν ἄπειρον διάστημα. Λοιπὸν ἡ ΑΝ τότε γίνεται ἄπειρος, λοιπὸν γίνεται τοιαύτη, ὅταν τὸ σημεῖον Γ πίπτῃ ἐπάνω εἰς τὸ σημεῖον Θ.

„ Ὅθεν τὸ μὲν ἡμίτονον ἑνὸς τόξυ μοιρῶν 90° εἶναι „ ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιάμετρον, τὸ δὲ συνημίτονον μηδὲν; κ)

„ ἡ μὲν ἐφαπτομένη ἄπειρος, ἡ δὲ συνεφαπτομένη μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἡμίτονον 90° εἶναι τὸ μεγαλήτερον ἀφ' ὅλα τὰ ἄλλα, ὀνομάζεται εἰς διάκρισιν τῶν ἄλλων ὁλόκληρον ἡμίτονον, καθὼς εἴπομεν, εἰς τρόπον ὅτι ὁλόκληρον ἡμίτονον, ἡμιδιάμετρος, κ' ἡμίτονον 90° μοιρῶν σημαίνουσιν ἕνα κ' τὸ αὐτὸ πρᾶγμα.

70. Ὅταν τὸ τόξον ΑΛ (σχη: λε') γένῃ μεγαλήτερον ἀπὸ 90° μοίρας, τότε τὸ μὲν ἡμίτονον ΛΜ σμικραίνει, τὸ δὲ συνημίτονον ΛΦ, τὸ ὁποῖον πίπτει ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ κέντρου Β ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α, μεγαλώνει ἕως οὗ τὸ τόξον ΑΛ νὰ γένῃ 180° μοιρῶν, κ' εἰς τοῦτο τὸ συμβεβηκὸς τὸ μὲν ἡμίτονον ἀφανίζεται, τὸ δὲ συνημίτονον γίνεται ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιάμετρον. Φαίνεται πρὸς τούτοις ὅτι τὸ ἡμίτονον ΛΜ, κ' τὸ συνημίτονον ΛΦ τοῦ τόξου ΑΛ, ἢ τῆς ἀμβλείας γωνίας ΑΒΛ ἀνήκουσιν εἰς τὸν ἴδιον καιρὸν κ' εἰς τὸ τόξον ΔΛ, ἢ εἰς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΔΒΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΔΛ τόξον εἶναι ἀναπλήρωμα τοῦ ΑΛ, ἢ τῆς γωνίας· διὰ τοῦτο λέγομεν „ ὅτι διὰ νὰ εὕρῃ τὶς τὸ „ ἡμίτονον ἢ τὸ συνημίτονον μιᾶς ἀμβλείας γωνίας, „ πρέπει νὰ λάβῃ τὸ ἡμίτονον κ' συνημίτονον τοῦ ἀνα„ πληρώματος αὐτῆς „. Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ εὕρῃ τὶς τὸ ἡμίτονον κ' συνημίτονον 110°, 32', πρέπει νὰ ζητήσῃ τὸ ἡμίτονον κ' συνημίτονον 69°, 28', τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀναπλήρωμα αὐτοῦ.

Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν κ' διὰ τὴν ἐφαπτομένην κ' συνεφαπτομένην. „ Οὕτως ἡ ἐφαπτομένη, κ' „ συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας μεγαλη„ τέρας ἀπὸ 90° μοίρας εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐφαπ„ τομένην κ' συνεφαπτομένην τοῦ ἀναπληρώματος αὐτοῦ „ τοῦ τόξου, ἢ τῆς γωνίας „. Παραδείγματος χάριν ὅταν τὶς θέλῃ νὰ εὕρῃ τὴν ἐφαπτομένην ϗ συνεφαπτομένην 108°, 56′, ἀρκεῖ νὰ λάβῃ τὴν ἐφαπτομένην ϗ συνεφαπτομένην 81°, 4′, ἥτις εἶναι τὸ ἀναπλήρωμα τῶν 108°, 56′.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ Κατασκευῆς τῶν κοινῶν Κλιμάκων, ὠφελίμων εἰς τοὺς Ναύτας.

Περὶ τῆς Κλίμακος τῶν Χορδῶν, τῶν Ῥόμβων (α) τοῦ ἀνέμου ϗ τῶν Ἡμιτόνων.

71. Η λεγομένη Κλίμαξ τῶν χορδῶν κατασκευάζεται τοιουτοτρόπως. α΄. Ἐγὼ γράφω τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ (σχη: λϛ΄) ϗ διαιρῶ αὐτὸ ἀπὸ μοῖραν εἰς μοῖραν (πρόβλη: η΄. ἀριθ. 37). Ἀπὸ δὲ τὸ σημεῖον Α ϗ Δ σύρω τὴν χορδὴν ΑΔ, ἥτις θέλει εἶσθαι 90° μοιρῶν· διότι ὑποτείνει εἰς ἓν τεταρτημόριον κύκλου. Καὶ διὰ νὰ τὴν διαιρέσω εἰς μοίρας, τίθημι τὴν μίαν μύτην τοῦ διαβήτου ἐπάνω τῆς ἄκρας Α, σημειωμένης μὲ τὸ

(α) Ἡμεῖς θέλομεν λαλήσει πλατύτερον εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ β΄ τόμου. ὅπου πραγματευόμεθα περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς Ναυτικῆς Πυξίδος. διὰ τὴν λέξιν ῥόμβον. Διὰ τώρα πρέπει νὰ ἐξεύρῃς ὅτι ἡμεῖς ἐννοοῦμεν μὲ αὐτὴν τὴν λέξιν τὸ μεταξὺ δύω ἀνέμων διάστημα, ἤτοι πόσον ἀπέχει ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον.

μηδὲν Ο. Ἀνοίγω τὸν διαβίτην μου κατὰ τὸ διάστημα τὸ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἕως εἰς ὅλας τὰς μοίρας τοῦ τεταρτημορίου ΑΔ· ϗ φέρω τὰ διαστήματα ἐπάνω τῆς χορδῆς, ἢ γραμμῆς ΑΔ· ϗ γράφω ἐπάνω εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς διαιρέσεως τοὺς ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται εἰς ἐκείνους τοῦ τεταρτημορίου.

β΄. Διὰ νὰ εὕρω τὰ ὀκτὼ τέταρτα τῶν ῥόμβων τοῦ ἀνέμου τῆς Ναυτικῆς Πυξίδος (α), διαιρῶ τὸ τόξον ΑΔ εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη. Ὅθεν βλέπω, ὅτι τὸ μὲν πρῶτον τέταρτον ἀνταποκρίνεται εἰς 11°, 15΄, τὸ δὲ δεύτερον εἰς 22°, 30΄, τὸ δὲ τρίτον εἰς 33°, 45΄, τὸ τέταρτον εἰς 45°, τὸ πέμπτον εἰς 56°, 15΄, τὸ ἕκτον εἰς 67°, 30΄, τὸ ἕβδομον εἰς 78°, 45΄, ϗ τὸ ὄγδοον εἰς 90° μοίρας.

γ΄. Εὑρίσκω ϗ τὰ ἡμίτονα τῆς ἰδίας κλίμακος, ἂν ἀφ᾽ ἑκάστης τῶν ἀνταποκρινομένων μοιρῶν τῶν δύω τεταρτημορίων ΑΔ ϗ ΒΔ γράψω τοσαύτας παραλλήλους γραμμὰς μὲ τὴν ΑΒ, ὅσαι εἶναι αἱ μοῖραι τῶν τεταρτημορίων· διότι μὲ τοῦτον τὸν τρόπον ἐγὼ διαιρῶ τὴν ἡμιδιάμετρον ΓΔ, καθὼς εἶναι διῃρημένα ϗ τὰ τόξα. Αὐτὴ λοιπὸν ἡ ἡμιδιάμετρος ΓΔ, διῃρημένη κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, θέλει εἶσθαι ἡ κλίμαξ τῶν ἡμιτόνων· διότι τὰ διαστήματα Γ 10, Γ 20, ΓΔ εἶναι ἡμίτονα τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ Β10, Β20, κτ. Φαίνεταί ἄρα ἐντεῦθεν, ὅτι ἡ ΓΔ ἡμιδιάμετρος, ἥτις εἶναι ὁλόκληρον ἡμιτόνον, ἢ 90° μοιρῶν, εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν 60° μοιρῶν.

δ. Μεταφέρω δὲ μετὰ τὰς εἰρημένας πράξεις τὰς κλί-

(α) Τῆς Βούσολας.

μακας

μακας, ὁπῦ κατεσκεύασα, ἐπάνω ἐις ἕνα προητοιμασμένον κανόνα ἀπὸ Πυξάριον, ἀπὸ κυφοξυλίαν, ἢ ἀπὸ χάλκωμα ὕτως. Ἀφ' ὗ σύρω τὰς παραλλήλυς γραμμὰς ἐπὶ τῦ κανόν@, καθὼς βλέπεις ἐις τὸ λζ' σχῆμα, μεταφέρω κατὰ διαδοχὴν τὰς χορδὰς κ) τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων 5°, 10°, 15°, μοιρῶν κτ. ἐπὶ τῶν σχετικῶν γραμμῶν.

Ὡσαύτως μεταφέρω μὲ τὸν διαβίτην μυ ἐπὶ τῶν ἐυθειῶν τῶν ῥόμβων τῦ ἀνέμυ τὰς χορδὰς τῶν διαφόρων τόξων, τὰ ὁποῖα δηλῦσι τὺς ῥόμβυς, ὡς εἴπομεν, γράφων τὸν μὲν πρῶτον ἄντικρυ τῆς χορδῆς $11^{\circ}, 15'$, τὸν δὲ δεύτερον ἄντικρυ τῆς χορδῆς $22^{\circ}, 30'$, κ) τὺς λοιπὺς κατὰ τὴν ἄνω σημειωθεῖσαν τάξιν (β').

Εἶναι λοιπὸν φανερὸν, ὅτι μία κλίμαξ κατεσκευασμένη τοιυτοτρόπως ἀναπληροῖ τὴν χρέιαν ἀναμφιβόλως ἑνὸς κύκλυ διῃρημένυ ἐις μοίρας κ) χρησιμεύει ἐις τὸ νὰ μετρῇ τὶς κάθε εἶδ@ γωνίας, καθὼς εἴπομεν.

Περὶ τῆς Κλίμακ@ τῶν ἴσων μερῶν.

72. Σημειῦται ὡς ὑπὲρ τὸ πλεῖςον τῦτο τὸ εἶδ@ τῆς κλίμακ@ ἐπίτιν@ κανόν@ ξυλίνυ, ἢ ἐπάνω ἐις κἀμμίαν ἄλλην ὕλην ςερεὰν, καθὼς αἱ κλίμακες τῶν χορδῶν, τῶν ἡμιτόνων, κτ. Κατασκευάζεται δὲ τοιυτοτρόπως. Σύρω πρῶτον τὴν ΑΦ εὐθεῖαν γραμμὴν (σχη: λη'), ἥτις διαιρεῖται κοινῶς ἐις ἴσα δέκα μέρη, ἐγὼ ὅμως θέλω τὴν διαιρέσει ἐδῶ ἐις πέντε ἴσα μέρη, διὰ νὰ κάμω τὰ μέρη αἰσθητικώτερα.

β'. Ἄγω τὰς καθέτυς ΑΘ, κ) ΦΜ ἐπάνω ἐις τὰς δύω ἄκρας αὐτῆς τῆς εὐθέιας γραμμῆς, τὰς ὁποίας κάμνω ἴσας ἀναμεταξύτων. Καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Θ κ̉ Μ σύρω τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΘΜ, ἥτις διὰ τὴν ἰσότητα τῶν καθέτων εἶναι παράλληλος κ̉ ἴση μὲ τὴν ΑΦ. Διαιρῶ δὲ αὐτὴν, καθὼς κ̉ τὴν ΑΦ, ἤγουν κάμνω τὰ διαστήματα ΘΗ, ΗΙ, ΙΚ, ΚΛ, ΛΜ τῆς μιᾶς ἴσα μὲ τὰ διαστήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κτ. τῆς ἄλλης· κ̉ σμίγω τὰ σημεῖα ΒΗ, ΓΙ, ΔΚ, κτ. μὲ τὰς εὐθείας γραμμὰς, ὡς βλέπεις εἰς τὸ σχῆμα.

γ'. Ὑποδιαιρῶ τὴν ΑΒ κ̉ ΘΗ ἑκατέραν εἰς ἴσα δέκα μέρη. Καὶ γράφω τοὺς ἀριθμοὺς τῶν διαιρέσεων αὐτῶν τῶν εὐθειῶν γραμμῶν ἀπὸ 10 εἰς 10 μετὰ τὸ μηδὲν 0, τὸ ὁποῖον σημειῶ εἰς τὸ σημεῖον Β κ̉ Η, ἕως εἰς 100· γράφω ἔπειτα τὰς πλαγίας Β10, 10–20, 20–30, 30–40, κτ. ἀπὸ τὴν ΑΒ ἕως εἰς ΘΗ.

δ'. Τέλος πάντων διαιρῶ τὰς καθέτους ΑΘ κ̉ ΦΜ εἰς 10 ἴσα μέρη· κ̉ ἀπὸ τὰ ἀνταποκρινόμενα σημεῖα τῶν διαιρέσεων 1, 2, 3, 4, κτ. ἄγω τὰς παραλλήλους εἰς τὰς δύω πρώτας ΑΦ κ̉ ΘΜ, ὡς βλέπεις. Ὅθεν κάθε μία ἀπὸ τὰς πλαγίας εὐθείας εὑρίσκεται διῃρημένη εἰς 10 ἴσα μέρη. Καὶ τοιουτοτρόπως κατασκευάζεται ἡ λεγομένη κλίμαξ τῶν ἴσων μερῶν.

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ τῆς Ἐπιπέδυ, ϗ Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, Ἐν ᾧ ϗ περὶ Λόγυ ἢ Σχέσεως, ϗ περὶ τῶν Λογαρίθμων.

73. Πᾶσαι σχεδὸν αἱ πράξεις τῆς Ναυτικῆς ἐπιςήμης γίνονται πρῶτον ϗ κυρίως διὰ μέσυ τῦ ἀμέσυ λογαριασμῦ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἢ τὰ γράφομεν, ἢ τὰ φανταζόμεθα τοιαῦτα ἐπάνω εἰς τὴν γῆν, ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην, ἢ ἐπάνω εἰς τὰς Χάρτας, ἢ τὰ φανταζόμεθα ὡς ἐγχαραγμένα ἢ ἐπάνω εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαίρας, ἢ ὑποκάτω εἰς τὴν κοίλην ἐπιφάνειαν αὐτῆς. Δεύτερον δὲ γίνονται διὰ μέσυ τινῶν Πινάκων, ὅιτινες ἔγιναν ῥητῶς, διὰ νὰ μᾶς παραςήσυν αὐτὺς τὺς λογαριασμὺς καμομένυς. Καὶ τρίτον τέλος πάντων γίνονται διὰ μέσυ ἄλλων τινῶν ἐργασιῶν διὰ χειρὸς, αἱ ὁποῖαι ἰσοδυναμῦσι σχεδὸν μὲ τὸν ἄμεσον λογαριασμόν.

74. Ἡμεῖς θέλομεν μεταχειρισθῆ κατὰ διαδοχὴν εἰς τὰ μαθήματά μας αὐτὺς τὺς τρεῖς τρόπυς παρακινῦμεν ὅμως ἐκείνυς, ὅσοι θέλυν νὰ μεταχειρισθῦν τὴν Ναυτικὴν μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν, ϗ ὀρθότητα, νὰ καταγίνυν ἐν πρώτοις εἰς τὸν ἄμεσον ἐπιλογισμὸν τῶν τριγώνων, ὅστις εἶναι ὁ ἀκριβέςερος τρόπος ϗ ὀρθότερος ἀπὸ ὅλυς τὺς ἄλλυς. Εἰς τρόπον ὅτι εἶναι ἐντροπὴ ϗ κατηγορία εἰς ἕνα, ὅστις κάμνει τὸν κυβερνήτην, νὰ μὴ τὸν ἐξεύρῃ. Καὶ διὰ

νὰ τὸν ὑποχρεώσωμεν νὰ λάβῃ τὴν ἕξιν ᾗ εὐκολίαν αὐτῦ τῦ λογαριασμῦ ἡμεῖς θέλομεν περιγράψει εἰς τῦτο τὸ τμῆμα τὺς πλέον ἁπλῦς τρόπυς, χωρὶς νὰ τὺς ἀποδείξωμεν μὲ ἀποδείξεις ἰσχυράς· διότι ᾗ αὐτοὶ οἱ πλέον προκομμένοι μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται πάντοτε αὐτὺς τὺς κανόνας, χωρὶς νὰ συγχίζωνται παντάπασιν ἀπὸ τὰς ἀποδείξεις των, ἀφ᾽ ὗ ἔφθασαν νὰ τὰς καταλάβυν μίαν φοράν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α′.

Περὶ Λόγυ ἢ Σχέσεως. Περὶ Ἀναλογίας, περὶ τῆς Μεθόδυ τῶν Τριῶν, ᾗ περὶ τῦ τρόπυ, μὲ τὸν ὁποῖον συντέμνομεν τὴν πρᾶξιν αὐτῆς διὰ μέσυ τῶν Λογαρίθμων.

75. ΛΟΓΟΣ ἢ ΣΧΕΣΙΣ δύω ἀριθμῶν, δύω γραμμῶν, ᾗ καθόλυ δύω ποσοτήτων ὀνομάζεται ἡ σύγκρισις, τὴν ὁποίαν κάμνομεν μεταξὺ αὐτῶν, ὅταν ἐξετάζωμεν ποσάκις ἡ μία περιέχει τὴν ἄλλην, ἢ περιέχεται ἀπὸ αὐτήν.

76. Οἱ δύω ἀριθμοὶ, ἢ καθόλυ αἱ δύω ποσότητες, τὰς ὁποίας συγκρίνομεν ἀναμεταξύ των, ὀνομάζονται ὍΡΟΙ τῦ λόγυ ἢ τῆς σχέσεως. Αὐτὴ ἡ σχέσις, ἢ ὁ λόγος δηλῦται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν, ὅστις δηλοῖ τὸ ποσάκις ὁ εἷς ὅρος περιέχει τὸν ἄλλον, ἢ περιέχεται ἀπὸ αὐτόν. Ἐὰν, φέρ᾽ εἰπεῖν, συγκρίνωμεν τὸν 12 μὲ τὸν 4, βλέπομεν φανερὰ ὅτι ὁ 12

περιέχει τὸν 4 τρεῖς φοραῖς, ϗ ὁ 4 περιέχεται ἀπὸ τὸν 12 τρεῖς φοραῖς. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 3, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συγκρίσεως ταύτης τῶν δύω ἀριθμῶν, φανερώνει τὸν λόγον, ἢ τὴν σχέσιν τοῦ 12 πρὸς τὸν 4: εἰς τρόπον ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς συγκρίσεως ἀποτέλεσμα εὑρίσκεται διὰ μέσου τῆς διαιρέσεως τῶν δύω ὅρων, οἱ ὁποῖοι παραβάλλονται ἀναμεταξύ των· ϗ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν λέγεται, ὅτι ὁ λόγος τῶν δύω ὅρων συνίσταται εἰς τὸ πηλίκον αὐτῶν.

77. Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ὅταν δύω ὅροι παραβαλλόμενοι εἷς μὲ τὸν ἄλλον μᾶς δίδουν τὸ αὐτὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδουν δύω ἄλλοι συγκρινόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τότε λέγομεν ὅτι οἱ δύω λόγοι εἶναι ἴσοι, ἢ ὅτι εἶναι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ ὅτι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἢ τὴν αὐτὴν σχέσιν μὲ δύω ἄλλους. Παραδείγματος χάριν ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4 εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 6 πρὸς τὸν 2· διότι τὸ πηλίκον εἶναι 3 τόσον εἰς τοὺς δύω πρώτους ὅρους, ὡσὰν ϗ εἰς τοὺς δύω δευτέρους. Λέγομεν λοιπὸν ὅτι ὁ 12 ϗ ὁ 4 εἶναι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 6 πρὸς τὸν 2.

78. Διὰ νὰ εὕρῃς τὸ πηλίκον ἑνὸς λόγου δύνασαι νὰ μοιράζῃς τὸν μεγαλητέρον ὅρον μὲ τὸν μικρότερον, ἢ τὸν μικρότερον μὲ τὸν μεγαλήτερον, τοῦτο εἶναι ἀδιάφορον· φθάνει ὅμως, ὅταν θέλῃς νὰ μάθῃς ἂν οἱ δύω λόγοι ἦναι ἴσοι, νὰ κάμῃς τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὸν καθ' ἕνα· ἤγουν ἂν διαιρέσῃς τὸν μεγαλήτερον ὅρον τοῦ ἑνὸς λόγου μὲ τὸν μικρότερον, πρέπει ὡσαύτως νὰ διαιρέσῃς ϗ τὸν μεγαλήτερον τοῦ ἄλλου μὲ τὸν μικρότερον.

79. Εἰς τὴν ἰσότητα τῶν δύω λόγων δὲν εἶναι ἀναγ-

καῖον τὸ πηλίκον νὰ ἦναι ὁλοσχερὴς ἢ κλασματικὸς ἀριθμός· ἀρκεῖ μόνον τὰ δύω πηλίκα νὰ ἦναι ἴσα, διὰ νὰ κάμουν τὴν ἰσότητα τῶν λόγων, παραδείγματος χάριν ὁ λόγος τοῦ 3 πρὸς τὸν 5 εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν λόγον τοῦ 6 πρὸς τὸν 10· διότι τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$.

80. Ὁπόταν δύω λόγοι ἦναι ἴσοι, οἱ τέσσαρες ὅροι αὐτῶν γραφόμενοι, ἢ προφερόμεναι κατὰ τὴν τάξιν, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρέθη ἡ ἰσότης τῶν πηλίκων αὐτῶν, σχηματίζουν μίαν ΑΝΑΛΟΓΙΑΝ. Οὕτως ὁ 3 καὶ 5 ὄντες ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μὲ τὸν 6 καὶ 10, κάμουν μίαν ἀναλογίαν γραφόμενοι κατὰ ταύτην τὴν τάξιν 3, 5, 6, 10. Διὰ νὰ φανερώσωμεν ὅμως, ὅτι οἱ τέσσαρες ὅροι εἶναι κυρίως ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡμεῖς τοὺς γράφομεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον 3:5::6:10 καὶ τοὺς διαβάζομεν οὕτως ὁ 3 ἔχει πρὸς τὸν 5, καθὼς ὁ 6 πρὸς τὸν 10· ἢ οὕτως ὥσπερ ὁ 3 πρὸς τὸν 5 οὕτως ὁ 6 πρὸς τὸν 10.

81. Ὁ δεύτερος ὅρος καὶ ὁ τρίτος μιᾶς Ἀναλογίας ὀνομάζονται ΜΕΣΟΙ ὅροι, ὁ δὲ πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος λέγονται ΑΚΡΟΙ· καθὼς εἰς ταύτην τὴν ἀναλογίαν 12:4::6:2, 4 καὶ 6 εἶναι οἱ μέσοι ὅροι, 12 καὶ 2 οἱ ἄκροι.

82. Μία ἀπὸ τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας τῶν ἀναλογιῶν εἶναι αὕτη. „Ὅταν τέσσαρες ὅροι εἶναι γραμ-„μένοι εἰς ἀναλογίαν, δύναταί τις νὰ ἀλλάξῃ δια-„φόρως τοὺς τόπους αὐτῶν χωρὶς νὰ μεταβάλῃ τὴν „ἀναλογίαν αὐτῶν. Ἡ οὐσιώδης συνθήκη εἶναι, ὅτι οἱ δύω ὅροι, ὅπου ἦσαν μέσοι ἢ μένουσι πάντοτε μέ-

σοι, ἢ γίνονται ἄκροι, κ̧ ὅτι οἱ δύω ὅροι ὅπου ἦσαν ἄκροι ἢ μένουσι πάντοτε ἄκροι, ἢ γίνονται μέσοι· οὕτως εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην 3:5::6:10 δύναταίτις νὰ κάμῃ τὰς ἑπτὰ ἀκολούθους ἀλλαγάς.

3:5::6:10 εἶναι ἡ α' ἀναλογία.

Ἀλλαγαί	α' 3:6::5:10	ε' 5:10::3:6
	β' 5:3::10:6	ς' 10:5::6:3
	γ' 6:10::3:5	ζ' 6:3::10:5
	δ' 10:6::5:3	

Ἀγκαλὰ κ̧ ἡ μορφὴ τοῦ πηλίκου ἑκάστου λόγου νὰ μὴ φυλάττηται πάντοτε ἡ αὐτή, ἥτις ἦτον πρὸ τῆς ἀλλαγῆς τῶν ὅρων, ἡ δύναμις ὅμως τοῦ πηλίκου μένει ἡ αὐτὴ εἰς κάθε λόγον μιᾶς κ̧ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας.

83. Μία ἄλλη καθόλου ἰδιότης τῶν ἀναλογιῶν εἶναι „ὅτι τὸ ἀπὸ τῶν δύω ἄκρων γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ „τὸ γινόμενον ἀπὸ τῶν δύω μέσων. Τέσσαρες ὅροι δὲν δύνανται νὰ κάμουν μίαν ἀναλογίαν, ὅταν δὲν ἔχῃ χώραν ἡ ἰδιότης αὕτη· οὕτως εἰς ταύτην τὴν ἀναλογίαν 3:5::6:10 φαίνεται ὅτι οἱ δύω ἄκροι 3 κ̧ 10 πολλαπλασιαζόμενοι ἀναμεταξύ των κάμνουσι 30, κ̧ ὅτι οἱ δύω μέσοι 5 κ̧ 6 πολλαπλασιαζόμενοι ὡσαύτως ἀναμεταξύ των κάμνουν 30.

84. Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ταύτην ἕπεται κ̧ ἡ ἀκόλουθος. „Εἷς ὅρος μιᾶς ἀναλογίας, ὁποῖος κ̧ ἂν „ἦναι, εἰ μὲν εἶναι μέσος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἀπὸ „τῶν δύω ἄκρων γινόμενον διαιρεθὲν μὲ τὸν ἄλλον „μέσον· εἰ δὲ εἶναι ἄκρος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἀπὸ

„ τῶν δύω μέσον γινόμενον διαιρεθὲν μὲ τὸν ἄλλον „ ἄκρον· οὕτως εἰς ταύτην τὴν ἀναλογίαν 3:5::6:10 φαίνεται ὅτι ὁ μέσος ὅρος 5 εἶναι ἴσος μὲ τὸν 3 πολλαπλασιασθέντα μὲ τὸν 10 (ὅστις κάμνει 30), ϗ διαιρεθέντα διὰ τοῦ 6. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ ἄκρος 10 εἶναι ἴσος μὲ τὸν 5 πολλαπλασιασθέντα μὲ τὸν 6 (ὅστις κάμνει 30), ϗ διαιρεθέντα διὰ τοῦ 3.

Ἀπὸ ἐδῶ εὐγαίνει ἡ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ, ἥτις λέγεται ϗ ΚΑΝΩΝ ἈΝΑΛΟΓΙΚΟΣ· διότι ἡ μέθοδος τῶν τριῶν δὲν εἶναι ἄλλο, παρὰ ὁ ἀναγκαῖος λογαριασμὸς διὰ νὰ εὕρῃ τις τὸν τέταρτον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, τῆς ὁποίας ἐξεύρει τοὺς τρεῖς ἄλλους. „ Διὰ „ νὰ κάμῃς λοιπὸν μίαν μέθοδον τῶν τριῶν, πρέπει „ νὰ πολλαπλασιάσῃς τὸν δοθέντα δεύτερον ὅρον μὲ „ τὸν τρίτον, ϗ νὰ διαιρέσῃς τὸ ἀπ᾿ αὐτῶν γινόμε- „ νον μὲ τὸν πρῶτον, ϗ τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι ὁ „ ζητούμενος τέταρτος ὅρος.

Περὶ Λογαρίθμων.

85. Συμβαίνει πολλάκις, ὅταν κάμνῃ τις μίαν μέθοδον τῶν τριῶν, νὰ ἔχῃ νὰ πολλαπλασιάσῃ, ἢ νὰ μοιράσῃ μὲ μεγάλους ἀριθμοὺς, τὸ ὁποῖον κάμει τὴν μέθοδον κοπιαστικὴν, ϗ ὑποκειμένην πολλάκις εἰς σφάλματα· διὰ τοῦτο ἐπινοήθη ἓν μέσον ὅσον ἁπλοῦν ἄλλο τόσον εὐφυὲς, μὲ τὸ ὁποῖον συντέμνεται εἰς ἄκρον ὁ λογαριασμός. Διότι ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς μεταβάλλεται εἰς μίαν ἁπλῆν προσθήκην, ἡ δὲ διαίρεσις εἰς μίαν ἁπλῆν ἀφαίρεσιν δύω ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους μεταχειριζόμεθα εἰς ταύτην τὴν σύντομον πρᾶξιν ὀνομάζονται ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. Οἱ λογάριθμοι λοι-