Πρόβλημα.

Ο' φέρεται πρὸς Εὐκλείδην.

Ἡμίονος καὶ Ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον.
αὐτὰρ Ὄνος στονάχιζεν ἐπ' ἄχθει φόρτου ἑοῖο·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη.
μῆτερ, τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη;
εἰ μέτρον ἐμοὶ δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα,
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως Ἰσότητα φυλάξεις.
εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε Γεωμετρίης ἐπιΐστορ.

Πρὸς ὃν ἔφητις τῶν ἐκείνου Τροφίμων.

Τοὶ γὰρ ἐγὼν ἐρέω, σὺ δ' ἀκούων ἔνδοθι κρύπτε·
πέντε μὲν ἡ Ὄνος, Ἡμίονος δ' ἔφερεν μέτρα ἑπτά.

Κείσθω γὰρ ἀντὶ τοῦ φόρτου τῆς Ἡμιόνου χ, ἀντὶ δὲ τῆς Ὄνου τὸ φ, καὶ ἐπεὶ ἐὰν δῷ τῇ Ἡμιόνῳ ἡ Ὄνος ἕν, γίνεται ὁ τῆς Ἡμιόνου φόρτος $= \chi + 1$, ἐναπολειφθήσεται ὁ τῆς Ὄνου $= \varphi - 1$, τούτου δὲ ὑποκειμένου, ἔσται ὁ τῆς Ἡμιόνου φόρτος διπλάσιος τῷ τῆς ὄνου, ἢ ἴσος αὐτῷ ἐπὶ τὸν 2, πολλαπλασιασθέντι ἤτοι, $\chi + 1 = 2\varphi - 2$, ἐπεὶ δ' αὖθις ἐὰν ἡ Ἡμίονος δῷ τῇ Ὄνῳ ἕν, γίνεται ὁ φόρτος αὐτῆς $= \chi - 1$, ὁ δὲ τῆς Ὄνου $= \varphi + 1$, καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν Ἰσότητα φυλάξουσιν, ἔσται πάντως $\chi - \iota$, $= \varphi + \iota$, ἀναφύεται δὲ ἐκ τῆς προτέρας ἰσώσεως ἡ $\chi = 2\varphi - 3$, ἐὰν ἡ σημασία αὕτη τοῦ χ, ἐπὶ τῆς ἄλλης ἰσώσεως ἀντ' αὐτῆς εἰσαχθῇ, γενήσεται $2\varphi - 4 = \varphi + \iota$, καὶ μεταθέσει τοῦ 4, $2\varphi = \varphi + 5$, μεταθέσει δὲ καὶ τοῦ φ, $2\varphi - \varphi = 5$, ἤτοι $\varphi = 5$. Τοῦ δὲ 5, ἀντεισαγομένου ἀντὶ τοῦ φ, ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἰσώσεως τῆς $\chi = 2\varphi - 3$, ἔσται $\chi = 10 - 3$, ἤτοι $= 7$.

Πρόβλημα.

Ἐὰν ὁ τοῦ σίτου μέδιμνος πωλῆται μνῶν τριάκοντα καὶ ὀκτώ· ὁ δὲ τῆς κριθῆς εἴκοσι καὶ δύο, ἐθέλῃ δέ τις ἀναμίξαι τὸν σῖτον τῇ κριθῇ, ὥστε, σωζομένης τῆς προτέρας τούτων τιμῆς, τὸν μέδιμνον τοῦ τοιούτου μίγματος τιμᾶσθαι μνῶν τριάκοντα, πόσον λήψεται ἀφ' ἑκατέρου σπέρματος;

„Ἥμισυ οὗτος λήψεται ἔκ τε σίτου, ἠδὲ κριθῆς.

Κείσθω γὰρ ἀντὶ τοῦ 22, α, ἀντὶ τοῦ 38, β, ἀντὶ τοῦ 30, γ. ἀντὶ τοῦ μέρους τῆς κριθῆς, χ, ἀντὶ τοῦ μέρους τοῦ σίτου φ. Ἔσται πρῶτον $\chi + \varphi = \iota$, οὕτω γὰρ ὑπόκειται τὰ μέρη συμπληροῦν μέδιμνον· ἑπομένως δὲ τὸ ἐν τῷ μίγματι μέρος τῆς κριθῆς $= \alpha\chi$, τὸ δὲ τοῦ σίτου $= \beta\varphi$· καὶ ἐπεὶ ὁ τοῦ μίγματος μέδιμνος ὑπόκειται τιμᾶσθαι μνῶν 30, ἔσται $\alpha\chi + \beta\varphi = \gamma$· μεταποιουμένης δὲ τῆς πρώτης ἰσώσεως εἰς τήνδε $\chi = \iota - \varphi$, καὶ τῆς σημασίας ταύτης τοῦ

χ, ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἰσώσεως ἀντὶ τȣ͂ χ, εἰσαγομένης, ἀναφύεται αὕτη $\alpha - \alpha\varphi + \beta\varphi = \gamma$· ἧς μεταποιηθείσης κατὰ τȣ̀ς εἰρημένȣς τρόπȣς, παρέξει σοι τὸ φ, εἶναι $=$ τῷ $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$, ἤτοι $= \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, ταύτης δὲ τῆς σημασίας ἀντεισαχθείσης ἐπὶ τῆς $\chi = \iota - \varphi$, ἰσώσεως ἀντὶ τȣ͂ φ, γενήσεται ἡ $\chi = \iota - \frac{1}{2}$, ἤτοι $\chi = \frac{1}{2}$.

Πρόβλημα.

Ἔχων τις δύο εἴδη νομισμάτων, ὧν τὸ μεῖζον εἰκοσαπλάσιον ἦν τȣ͂ ἐλάττονος, καὶ βȣλόμενος ἑπτὰ λίτρας ὠνήσασθαι χαλκȣ͂, ἐνδεῖν αὐτῷ συνῆκε πρὸς τὴν ὠνὴν δύω, οἷον τὸ μεῖζον νόμισμα· διὸ ὠνήσατο μόνας τέσσαρας· μετὰ δὲ τὴν ὠνὴν εὑρέθη ἔχων πέντε, οἷον τὸ ἔλαττον νόμισμα· ζητεῖται ἥτε τιμὴ τῆς λίτρας τȣ͂ χαλκȣ͂, καὶ πόσα νομίσματα εἶχεν ἕκτε τȣ͂ πρώτȣ εἴδȣς καὶ ἐκ τȣ͂ δευτέρȣ. νομίσματα ἑτεροειδῆ.

Εἰς εὕρεσιν τȣ́των ἀναλυθήτω τὰ μεῖζω εἰς τὰ ἐλάττω, καὶ ἐπεὶ δέδοται ἐνδεῖν δύω, καὶ τὸ μεῖζον εἶναι εἰκοσαπλάσιον τȣ͂ ἐλάττονος, ἀναλυθήσεται τὰ 2, εἰς 40, ληφθήτω δὲ ἀντὶ τȣ͂ 40, τὸ α· ἀντὶ δὲ τῆς τιμῆς τȣ͂ χαλκȣ͂ τὸ χ, καὶ ἀντὶ τῶν ὧν εἶχε νομισμάτων τὸ φ, λογιζομένων ἀμφοτέρων ἔμπης κατὰ τὰ νομίσματα τȣ͂ δευτέρȣ εἴδȣς.

Τȣ́των ȣ̔́τω ὑποτεθέντων ἔςαι $7\chi = \varphi + \alpha$, ϗ $4\chi = \varphi - 5$, ἐξ ὧν συνάγεται τὸ $\chi = 15$, νομίσμασι τȣ̃ δευτέρȣ εἴδȣς, ϗ τὸ $\varphi = 65$, τȣ̃ αὐτȣ̃ εἴδȣς· τȣτέςι τὴν μὲν λίτραν τȣ̃ χαλκȣ̃ τιμᾶσθαι νομισμάτων 15, τȣ̃ δευτέρȣ εἴδȣς, ϗ τὸν ὠνησάμενον τὰς τέτταρας λίτρας ἐσχηκέναι 65, τȣ̃ αὐτȣ̃ εἴδȣς· ἤτοι τρία νομίσματα τȣ̃ πρώτȣ εἴδȣς, ϗ πέντε τȣ̃ δευτέρȣ.

Τὸ Υ Σ. 144, παρείληπται· οἰκειότερον ταχθήσεται ἐν τῇ πολλαπλασιάσει.

Περὶ ἐπιλύσεως.

Ἁπλῶν προβλημάτων ἀορίςων.

Τοῖς αὐτοῖς τȣ́τοις τρόποις, οἷς τὰ ὡρισμένα, ϗ τὰ ἀόριςα λυθήσονται προβλήματα, πλὴν ὅτι ἐπὶ τȣ́των, διὰ τὸ μὴ ἐξαρκεῖν τὰς γινομένας ἰσώσεις εἰς εὕρεσιν πάντων τῶν παραςατικῶν ἀδήλων τινῶν, ȣ̓ πᾶσαι αἱ σημασίαι αὐτῶν διὰ τῆς πράξεως θηράσιμοι γίνονται· ἀλλ᾽ ἔσθ᾽ ὅτε ἑνὸς, ἢ πλειόνων ἀδήλων ἡ σημασία κατὰ τὸ δοκȣ̃ν ὑπὸ τȣ̃ ἀναλύοντος ὑποτίθεται· ἐξ ἧς ϗ αἱ τῶν λοιπῶν σημασίαι διὰ των ἀναλυτικῶν πράξεων εὐχερῶς ἀνακαλύπτονται· εἰς σαφεςέραν μέντοι τῶν λεγομένων κατάληψιν κείσθω τὸ ἐφεξῆς πρόβλημα.

Πρόβλημα.

Ἐκ τριῶν εἰδῶν οἴνȣ ἐθέλει τις ὠνήσασθαι ξέςας ὀκτὼ πρὸς τοῖς δέκα· ἀλλ᾽ ȣ̓ κέκτηται πλείȣς τῶν ἑκατὸν χρυσίνων· καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ὁ ξέστης τιμᾶται ἑπτὰ χρυσίνων, τοῦ δὲ δευτέρου, πέντε, καὶ τοῦ τρίτου, τριῶν· ζητεῖ μαθεῖν πόσους ξέστας λήψεται παρ' ἑκάστου τῶν τριῶν τούτων εἰδῶν τοῦ οἴνου, ὥστε τοὺς πάντας εἶναι δέκα καὶ ὀκτὼ, καὶ τὴν τιμὴν τούτων μήτε ὑπερβαίνειν, μήτε ἐλλείπειν τῶν ἑκατὸν χρυσίνων.

Κείσθω ἀντὶ τοῦ $18 = \alpha$, ἀντὶ τοῦ $100 = \beta$, ὁ ἀριθμὸς τῶν ξεστῶν τοῦ πρώτου εἴδους, οὓς μέλλει λαβεῖν $= \chi$, τῶν τοῦ δευτέρου $= \varphi$, τῶν τοῦ τρίτου $= \psi$, ἐξ ὧν ἕπεται τὴν μὲν τιμὴν τῶν τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι ἴσην τῷ 7χ, τὴν δὲ τοῦ δευτέρου $= 5\varphi$, τὴν δὲ τοῦ τρίτου $= 3\psi$, ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται τὴν ὅλην τούτων ἁπάντων τιμὴν εἶναι $= 100$, χρυσίνοις, ἔσται πρώτη Ἴσωσις $7\chi + 5\varphi + 3\psi = \beta$, αὖθις ἐπεὶ ὑποτίθεται τοὺς πάντας ξέστας εἶναι δέκα καὶ ὀκτὼ, ἔσται δευτέρα ἴσωσις $\chi + \varphi + \psi = \alpha$, καὶ αὗται μὲν ἂν γένοιντο αἱ ἰσώσεις κατὰ τὰς ὑποθέσεις τοῦ προβλήματος, ὅπερ, ὅτι ἀόριστον πρόδηλον· ἔχει γὰρ καὶ τρίτον στοιχεῖον ἀδήλου παραστατικὸν, οὗ ἡ σημασία οὐκ ἂν θηρευθείη ὑπὸ τῆς πράξεως διὰ τῶν εἰρημένων ἰσώσεων, ἀλλὰ δεῖται τῆς τοῦ ἀναλύοντος ὑποθέσεως· ἵνα δὲ βαθμηδὸν ἐπὶ τὴν πρᾶξιν προΐωμεν, μεταποιηθήτω ἡ δευτέρα ἴσωσις εἰς τὴν δε $\chi = \alpha - \varphi - \psi$, καὶ ἡ σημασία αὕτη τοῦ χ, ἀντεισαχθήτω ἀντ' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἰσώσεως, ἵνα γένηται αὕτη $7\alpha - 7\varphi - 7\psi + 5\varphi + 3\psi = \beta$, ἢ συντομώτερον $7\alpha - 2\varphi - 4\psi = \beta$.

ταύτης δὲ τῆς ἐσχάτης ἰσώσεως μεταποιηθείσης, εὑρεθήσεται τελευταῖον τὸ $φ =$ εἶναι τῷ $\frac{7α-β}{2} - 2ψ$.

Ἀλλ' ἐπεὶ διὰ τούτων οὐκ ἀπεσκορακίσθη καὶ τὸ $ψ$, σώζεται δ' ἔτι ἐν τῇ ἐσχάτῃ ταύτῃ ἰσώσει, ὑποθετέον τῷ ἀναλύοντι σημασίαν τινὰ τούτῳ, ἣν βούλεται· προσεκτικὸν μέντοι προσήκει εἶναι ἐν ταῖς τοιαύταις ὑποθέσεσιν, ἅμα δὲ καὶ διορατικόν, ἵνα καταλλήλους τὰς ὑποθέσεις τοῖς ὑποκειμένοις ποιῇ· ἄλλως γὰρ ἢ οὐδεμιᾶς, ἢ ἀρνητικῆς τεύξεται σημασίας, καὶ διὰ ταῦτα ἀμφοτέρωθεν ἀχρήσου· ἐνταῦθα δὲ ὑποκείσθω τὸ $ψ = 3$, τοῦ τοίνυν 3, ἀντεισαγομένου ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἰσώσεως ἀντὶ τοῦ $ψ$, ἕξομεν $φ = \frac{7α-β}{2} - 6$, καὶ ἑπομένως κυφρῶν καὶ τοῖς λοιποῖς ἀντεισαγομένων $φ = \frac{126-100}{2} - 6 = 7$, εὑρεθήσεται ἡ σημασία τοῦ $φ$, ἤτοι ὁ 7· ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἡ τοῦ $χ$· ἀντεισαγομένων γὰρ ἐπὶ ταύτης τῆς ἰσώσεως $χ = α - φ - ψ$, τοῦ 7, ἀντὶ τοῦ $φ$, καὶ τοῦ 3, ἀντὶ τοῦ $ψ$, ἐξ ὧν ὁ μὲν εὕρηται, ὁ δὲ ὑπετέθη, ἔσται ἴσωσις $χ = 18 - 7 - 3 = 8$, καὶ ἔσονται αἱ σημασίαι πᾶσαι τῶν ἀδήλων καταφανεῖς διὰ τοῦ 3, 7, καὶ 8· $χ = 8$, $φ = 7$, $ψ = 3$.

Πρόβλημα.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, προσλαβὸν τὸ ἐξ αὐτῶν συμποσούμενον ποιήσει τὸν 79. κειμένε ἀντὶ τȣ̃ 79, α· ἀντὶ τȣ̃ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν χ, ϗ ἀντὶ τȣ̃ ἑτέρε φ, ἔςαι ἀντὶ τȣ̃ γινομένε χφ, ϗ ἀντὶ τȣ̃ συμποσȣμένου χ + φ, ϗ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τȣ̃ προβλήματος·

$$\chi\varphi + \chi + \varphi = \alpha.$$

μεταθέσει τȣ̃ φ.

$$\chi\varphi + \chi = \alpha - \varphi.$$

διαιρέσει

$$\chi = \frac{\alpha - \varphi}{\varphi + 1}$$

ἐπεὶ δὲ ϗ ἐπὶ τῆς ἐσχάτης ταύτης ἰσώσεως σώζεται το φ, ὑποτεθήτω τις σημασία τȣ́τε, ἀλλὰ μὴ μείζων τῆς τȣ̃ α, ἵνα μὴ ἡ τȣ̃ χ, ἀρνητικὴ εὑρεθῇ· ὑποτεθήτω τοίνυν ὁ 7, ϗ γενήσεται $\chi = \frac{79-7}{8}$ $= 9.$

Πρόβλημα.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμȣ̀ς, ὧν τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον ἴσον ἔςαι τῷ δὶς ἐξ αὐτῶν συμποσȣμένῳ.

Κείσθω ἀντὶ τȣ̃ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν τὸ χ, ἀντὶ τȣ̃ ἑτέρε τὸ φ, ἔςαι τὸ γινόμενον χφ, τὸ δὲ δὶς συμποσȣ́μενον $2\chi + 2\varphi$· ὑποτίθεται δὲ τὸ $\chi\varphi =$ τῷ $2\chi + 2\varphi$· μεταθέσει τȣ̃ 2χ, γενήσεται $\chi\varphi - 2\chi = 2\varphi$· ὑποτιθεμένου δὲ ϗ ἀντὶ τȣ̃ φ, τȣ̃ 3, ἔςαι $3\chi - 2\chi = 2\varphi$, ἤτοι $\chi = 6$.

Πρόβλημα.

Διένειμέ τις εἴκοσι πένησι δραχμὰς ἑκατόν· ἀλλ' ἑκάστῳ ἀνδρὶ δέδωκεν ἀνὰ ἑπτὰ δραχμὰς, ἑκάστῃ δὲ γυναικὶ ἀνὰ πέντε, ϗ ἑκάστῳ παιδίῳ ἀνὰ μίαν· εἰπὲ πόσοι μὲν ἄνδρες, πόσαι δὲ γυναῖκες, πόσα δὲ παιδία ἦσαν, κείσθω ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν τὸ χ, ἀντὶ τοῦ τῶν γυναικῶν τὸ φ, ϗ ἀντὶ τοῦ τῶν παιδίων τὸ ψ, ϗ ἀντὶ μὲν τοῦ 100, τὸ α, ἀντὶ δὲ τοῦ 20, τὸ β· καὶ ἔσται πρῶτον $\chi + \varphi + \psi = \beta$, δεύτερον δὲ $7\chi + 5\varphi + \psi = \alpha$· τούτων δὲ μεταποιηθέντων γίνεται ἀντὶ μὲν τῆς πρώτης ἰσώσεως $\psi = \beta - \varphi - \chi$· ἀντὶ δὲ τῆς δευτέρας, $\psi = \alpha - 7\chi - 5\varphi$· ϗ συντεθέντων τούτων τῶν δύο σημασιῶν τοῦ ψ εἰς μίαν, ἀποτελεῖται $\beta - \varphi - \chi = \alpha - 7\chi - 5\varphi$· μεταθέσει δὲ τοῦ β, ϗ φ, ϗ 7χ, ἀναφύεται $6\chi = \alpha - \beta - 4\varphi$, ϗ διαιρέσει $\chi = \frac{\alpha - \beta - 4\varphi}{6}$, τουτέστι $\chi = \frac{80 - 4\varphi}{6}$.

ὑποτεθήτω τοίνυν κατὰ τὸ δοκοῦν ἡ σημασία τοῦ φ, τοιαύτη ἔμπης ὥστε ϗ τὴν τοῦ χ, σημασίαν παράγεσθαι δίχα κλάσματος· διὸ δεδόχθω λαβεῖν ἀντὶ τοῦ φ, τὸν 8, τούτου δὲ κειμένου συνάγεται $\chi = \frac{80 - 32}{6}$ ἤτοι $\chi = 8$.

κεῖται δὲ ἐν τῇ προτέρᾳ ἰσώσει $\psi = \beta - \chi - \varphi$· ἄρα ϗ $\psi = \beta - 8 - 8$, ἤτοι $\psi = 4$, ὥστε ληφθέντος ἀντὶ τοῦ φ, τοῦ 8, ἔσται ϗ τὸ $\chi = 8$, ϗ τὸ $\psi = 4$.

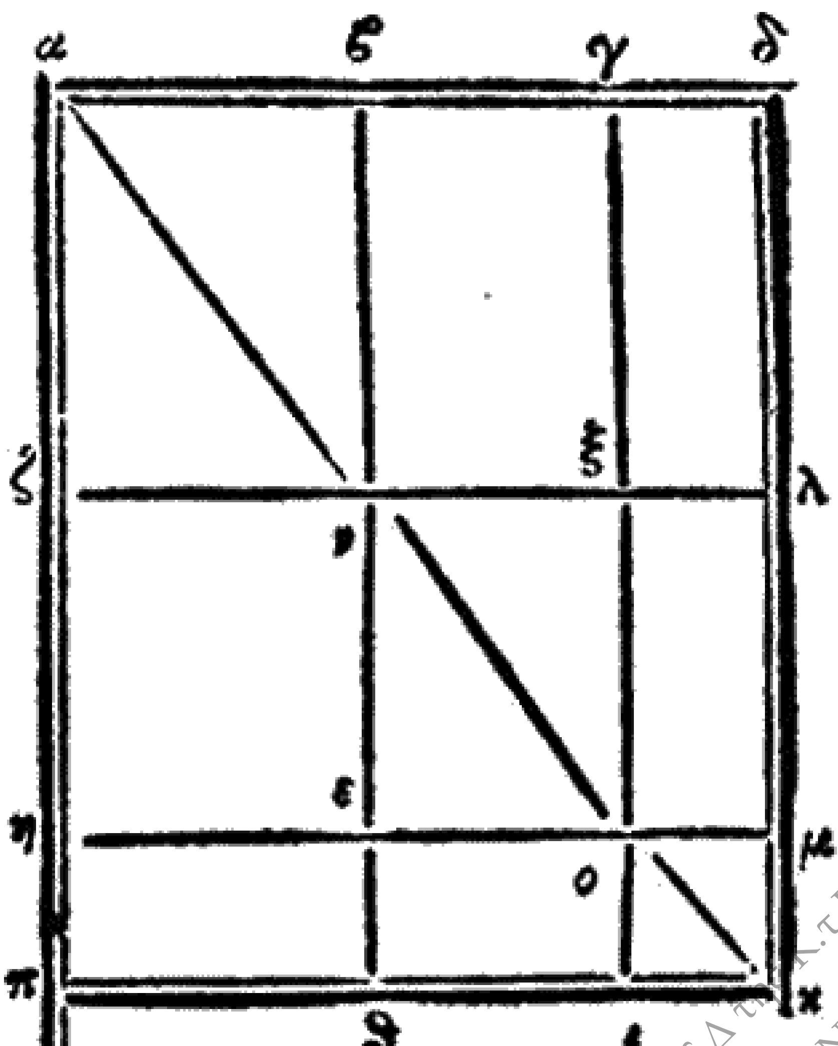
ἄνδρες ὀκτὼ, Γυναῖκες τοῖς ἀνδράσιν ἰσάριθμοι, παιδίον ἕν.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

Περὶ ἐξαγωγῆς ῥίζης τετραγωνικῆς ἀλγεβρικῶς.

Δείκνυσιν ὁ ϛοιχειωτὴς βιβλίῳ δευτέρῳ, Προτάσει τετάρτῃ, ὅτι, ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐϛὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, ϗ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Τȣ̃το δὲ ȣ̓ μόνον ἐπὶ τῆς εἰς δύο τεμνομένης εὐθείας γραμμῆς συμβαίνει. ἀλλὰ ϗ ἐπὶ τῆς εἰς τρία δὸς εἰπεῖν, ἢ τέτταρα, ἢ ὁπωσȣ̃ν ἄλλως ἁπλῶς εἰπεῖν τὴν τομὴν δεχομένης ῥᾴδιον ἐϛὶ κατιδεῖν· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης δηλονότι τετράγωνον ἴσον εἶναι τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τοῖς δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Τμηθήτω γὰρ ἡ αδ γραμμὴ κατὰ τὰ β, ϗ γ, ϗ ἀναγραφήτω τὸ ἀπ᾿ αὐτῆς τετράγωνον ακ· τῆς δὲ ακ, ἐπιζευχθείσης ἤχθωσαν ἀπὸ τȣ̃ β, ϗ γ, σημείȣ παράλληλοι τῇ δκ, αἱ βθ, γι, τέμνȣσαι τὴν διαγώνιον κατὰ τὸ ν, ϗ ο, δι᾿ ὧν ἀχθήτω-



σαν τῇ αβ, παράλληλοι αἱ ζυλ, ηομ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ ακ τετράγωνον εἰς τὰ αν, νο, οκ, γν, νη, δξ, πε, λο, οθ, καὶ ἔσται ἴσον αὐτοῖς κατὰ τὸ ἀξίωμα· ἀλλὰ τὰ αν, νο, οκ, εἰσὶ τετράγωνα κατὰ τὸ πόρισμα τῆς εἰρημένης προτάσεως, καὶ γίνονται ἀπὸ τῶν τμημάτων, ὅτι ἴσαι αἱ θι, ικ, ταῖς βγ, γδ, κατὰ τὴν λδʹ τοῦ πρώτου· τὰ δὲ γν, νη, δξ, πε, λο, οθ, τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων ὀρθογώνια, ἅτινα κατὰ συζυγίαν λαμβανόμενα γίνονται τρία δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενα, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης αδ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τρισὶν ὀρθογωνίοις τοῖς δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένοις.

Τὸ ὅλον ἴσον τοῖς οἰκείοις μέρεσιν.

Οὐκοῦν ὅπερ ὁ στοιχειωτὴς ἐπὶ τῆς εἰς δύο ὡς ἔτυχε τεμνομένης εὐθείας γραμμικῶς ἐκεῖσε ἀποδείκνυσιν, ἡμεῖς δὲ ἐνταῦθα ἐκείνῳ κατακολουθήσαντες, καὶ ἐπὶ τῆς εἰς τρία τεμνομένης ὁμοίως συναπεδείξαμεν, καὶ οὐ χαλεπὸν καὶ ἐπὶ τῆς ὁπωσοῦν ἄλλως τὴν τομὴν δεχομένης προσαποδεῖξαι· τοῦτ᾽ αὐτὸ οἱ νεώτεροι ἐκθετικῶς διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τῶν στοιχείων παριστῶσι.

Ληφθήτω γὰρ ἡ $\alpha + \beta$ ῥίζα διμερὴς ἀναλογοῦσα τῇ εἰς δύο τεμνομένῃ εὐθείᾳ γραμμῇ· αὕτη πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ᾽

$$\begin{array}{c} \alpha + \beta. \\ \alpha + \beta. \\ \hline \alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta. \\ \alpha\beta \\ \hline \alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta. \\ \text{ἢ } \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2. \end{array}$$

ἑαυτὴν καὶ ποιήσασα τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, παραστήσει ἡμῖν ἐκθετικῶς, ὃ δὴ ὁ στοιχειωτὴς γραμμικῶς ἀπέδειξεν, εἶναι δηλονότι τὸ ἀπὸ διμεροῦς ῥίζης τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων δύο τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ληφθήτω ἔτι ῥίζα τριμερὴς ἀναλογοῦσα τῇ εἰς τρία τεμνομένῃ, καὶ γενέσθω τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· ἰδοὺ δὴ κἀνταῦθα τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον σύγκειται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τρισὶ τετραγώνοις, καὶ τοῖς δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένοις τρισὶν ὀρθογωνίοις.

$$
\begin{array}{l}
\eta \quad \alpha+\beta+\gamma \\
\quad\;\; \alpha+\beta+\gamma \\
\hline
\alpha\alpha+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\beta+\beta\gamma+\gamma\gamma \\
\quad\;\; \alpha\beta+\alpha\gamma \qquad\quad +\beta\gamma \\
\hline
\alpha\alpha+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta\beta+2\beta\gamma+\gamma\gamma.
\end{array}
$$

Τούτων οὖν οὕτω κειμένων, ἐξ ὧν ἅπασα ἡ μέθοδος ἤρτηται τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς, καὶ ὁ τῆς πράξεως λόγος θηρεύεται· δεδόσθω τὰ α, καὶ β, τετράγωνα, καὶ ὑποκείσθω εἰς ζήτησιν ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν αὐτῶν·

$$\alpha \quad \chi\chi+2\chi\gamma+\gamma\gamma. \quad \overset{\varepsilon}{\underset{\delta}{(}}\chi+\gamma.$$

$$\beta \quad \chi\chi+2\chi\gamma+\gamma\gamma+2\chi\psi+2\gamma\psi+\psi\psi(\chi+\gamma+\psi.$$

ἐπεὶ τοίνυν τὸ α, τετράγωνον συνέστηκεν ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τοῦ χ, καὶ γ, τετραγώνων, καὶ τοῦ δὶς ὑπὸ τοῦ χ, καὶ γ, περιεχομένου ὀρθογωνίου, εὐδῆλον ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων, ὅτι τε ἡ ῥίζα αὐτοῦ διμερής, καὶ τὸ χχ τετράγωνον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος· ἀνθ' ὅτου ταχθήτω τὸ χ, ἐπὶ τοῦ ε, ὡς πρῶτον τμῆμα τῆς ζητουμένης ῥίζης, τὸ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον χχ, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ α πρώτου τετραγώνου, εἶτα διαιρεθήτω τὸ δὶς ὑπὸ τοῦ χ, καὶ γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τὸ 2χ, καὶ ἐναπολειφθήσεται τὸ γ, δεύτερον ὂν τμῆμα τῆς ῥίζης, ὅπερ πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ἑαυτό τε καὶ ἐπὶ τὸ 2χ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν 2χγ + γγ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ ἐναπολειφθέντος ἐν τῷ α, διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ χχ· καὶ ἐπεὶ οὐδὲν ἐναπολείπεται, ἡ χ + γ, ἐστὶν ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α, τετραγώνου.

Τὸν αὐτὸν προϊόντες τρόπον καὶ ἐπὶ τοῦ β, τετραγώνου, εὑρήσομεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ· ἐπεὶ γὰρ συνίσταται ἔκ τε τριῶν τετραγώνων τῶν χχ, γγ, ψψ, καὶ τριῶν ὀρθογωνίων 2χγ, 2χψ, 2γψ, πρόδηλον ὅτι ἡ ῥίζα αὐτοῦ ὑπάρχει τριμερής, καὶ τὸ χχ, τετράγωνον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος τῆς ῥίζης· διὸ ταχθήτω ἐπὶ τοῦ δ, τὸ χ, ὡς πρῶτον τμῆμα τῆς ῥίζης, καὶ τὸ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ β, πρώτου τετραγώνου· εἶτα διαιρεθήτω τὸ 2χγ, ἐπὶ 2χ, καὶ τὸ παραγόμενον πηλίκον γ, ταχθήτω ἐφεξῆς τοῦ χ, ὡς δεύτερον τῆς ῥίζης μέρος· πολλαπλασιασθήτω δὲ τὸ αὐτὸ γ, ἐφ' ἑαυτό τε καὶ ἐπὶ τὸ 2χ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῶν ἐν τῷ β, 2χγ + γγ, καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπονται τὰ 2χψ, 2γψ, ψψ, διαιρεθήτωσαν ταῦτα τελευταῖον ἐπὶ το 2 χ, καὶ τοῦ παραγομένου πηλίκου ψ, ταττομένου ἑξῆς τοῦ γ, ὡς τρίτου τμήματος τῆς ῥίζης, πολλαπλασιαζομένου τε ἐφ' ἑαυτό τε καὶ ἐπὶ τὰ 2 χ, 2 γ, καὶ τῶν ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἐν τῷ β, 2 χψ, 2 γψ, ψψ, ἀφαιρουμένων, ἐπεὶ οὐδὲν ἐναπολείπεται, ἡ χ + γ + ψ ἐστὶν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ β τετραγώνου· ὅπερ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτεθέντων σχημάτων ῥᾴδιον ἐστὶ κατιδεῖν· ἀφελὼν γάρ τις ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος ἀπὸ τοῦ ὅλου τὸ αθ, τετράγωνον ὃ ἀναλογεῖ τῷ ἐν τῷ α, χχ, τετραγώνῳ, ἐναπολειφθήσεται ὁ εβγδηθ γνώμων, ἤτοι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον, ἀναλογοῦντα τοῖς 2 χγ, γγ, καὶ ἐπεὶ τοῦ 2 αβ, ἡ μία πλευρὰ δέδοται ἡ 2 α, ἐὰν τὸ 2 αβ, ἐπ' αὐτὴν διαιρεθῇ, ἐξαχθήσεται ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ἡ εβ, ἥτις ἐστὶ καὶ πλευρὰ τοῦ λοιποῦ τετραγώνου θγ, ἀναλογοῦντος τῷ γγ· ἐξ ὧν προφανῶς εἴσεται τοῦ χάριν εἰς εὕρεσιν τοῦ γ, διῄρηται τὸ 2 χγ, ἐπὶ τὸ 2 χ, καὶ ὃ δέδοται ἤτοι τὸ γ, ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ῥίζης τοῦ α, τετραγώνου εἴληπται· αὐτὰ δὲ ταῦτα προφανῆ ἔσονται τῷ καὶ μικρὸν ἐπιστήσαντι οὐ μόνον καὶ ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος δευτέρου σχήματος, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου καίτοι πλειόνων ὄντων τῶν τε τετραγώνων ἐν τούτοις καὶ τῶν ὀρθογωνίων.

Περὶ ἐξαγωγῆς ῥίζης τετραγωνικῆς ἀριθμητικῶς.

Τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ ϗ ἐπὶ τῶν διὰ κυφρῶν παριϛαμένων τετραγώνων χρησάμενοι, τὰς ῥίζας εὑρήσομεν· εἴγε ϗ ἐπὶ τῶν τοιούτων διμεροῦς οὔσης τῆς ῥίζης, τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον συνέϛηκεν ἔκ τε τῶν ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνων, ϗ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένου ὀρθογωνίου· πολυμεροῦς δὲ, ἁπλῶς εἰπεῖν, ἐκ πλειόνων τετραγώνων τε ϗ ὀρθογωνίων· πλὴν ὅτι ἐν τούτοις οὐκ εἰσὶν ὥσπερ ἐπὶ τῶν ϛοιχείων εὐσύνοπτα, διὰ τὸ μὴ εἶναι διακεκριμένα ϗ εὐκρινῆ, ἀλλ' οἱονεὶ συμπεπλεγμένα ϗ σύμμικτα· γένοιντο δ' ἂν ἡμῖν καταφανῆ πολλαπλασιάζουσι τὰς κύφρας κατὰ τὰ ϛοιχεῖα· αὐτίκα γοῦν ἔϛω ὁ δ, τετράγωνος 1024, οὗ ῥίζα ὁ 32, ἢ 3 + 2, διμερὴς γάρ ἐϛὶ συνιϛαμένη ἐκ δύο μονάδων ϗ τριῶν δεκάδων· ταύτης αἱ κύφραι πολλαπλασιαζόμεναι κατὰ τὰ ϛοιχεῖα παρέξουσι

3 + 2
3 + 2
―――――
900, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τετράγωνον.
120, τὸ δὶς ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας περιεχόμενον ὀρθογώνιον.
4 τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τετράγωνον
―――――
δ. 1024. ἃ συναπτόμενα ποιοῦσι τὸν δ.

Ἔςω δεύτερον ὁ β 412164, ȣ̓ ῥίζα ὁ α 642, ἡ 6 + 4 + 2.

α 6 + 4 + 2,
6 + 4 + 2,

γ. 3 6 0 0 0 0, τὸ ἀπὸ τȣ̃ 6 τετράγωνον
δ. — 4 8 0 0 0, τὸ δὶς ὑπὸ τȣ̃ 6 ϗ 4,
ε. — — 2 4 0 0, τὸ δὶς ὑπὸ τȣ̃ 6 ϗ 2,
ζ. — — 1 6 0 0, τὸ ἀπὸ τȣ̃ 4, τετράγωνον
η. — — — 1 6 0, τὸ δὶς ὑπὸ τȣ̃ 4, ϗ 2,
θ. — — — — 4, τὸ ἀπὸ τȣ̃ 2, τετράγωνον.

β. 4 1 2 1 6 4.

Ἀλλ' ἵνα, καίτοι συμπεπλεγμένων ὄντων τῶν μερῶν τȣ̃ δοθέντος τετραγώνȣ, τὴν ῥίζαν εὐχερῶς εὑρίσκειν ἔχωμεν, εἰδέναι δέον ὅτι ϗ τὸ ἀπὸ τῆς μεγίςης τῶν μονομερῶν ῥίζης οἷα ἐςὶν ὁ 9, ȣ̓ συνίςαται ἐκ πλειόνων κυφρῶν, ἢ δύο· οἷον ὁ 81, τὸ δὲ ϗ ἀπὸ τῆς μεγίςης τῶν διμερῶν οἷα ὁ 99, ȣ̓κ ἐκ πλειόνων ἢ τεσσάρων, τὸ δὲ ϗ ἀπὸ τῆς μεγίςης τῶν τριμερῶν, οἷα ὁ 999, ȣ̓κ ἐκ πλειόνων ἢ ἕξ, ϗ ἁπλῶς εἰπεῖν, τὸ πλῆθος τῶν κυφρῶν παντὸς τετραγώνȣ μέχρι τȣ̃ διπλασίου ἄνεισι τῶν κυφρῶν τῆς ῥίζης· ϗ ȣ̓δέποτ' ἂν εὑρεθείη μεῖζον, ἔλαττον δὲ πολλάκις· ἐξ ὧν ἕπεται, ὡς εἴγε δοθῇ τετράγωνον ἐξ ἐλαττόνων ἢ τεσσάρων κυφρῶν, δὸς εἰπεῖν, τριῶν συνιςάμενον, ϗ ἡ τȣ́τȣ ῥίζα, ὥσπερ ϗ τȣ̃ ἐκ τεττάρων, εἴη ἂν διμερής· εἰ γὰρ μὴ τȣ̃το, ἀλλὰ μονομερής, τὸ πλῆθος τῶν κύφρων τοῦ τετραγώνου ὑπερέξει τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης, ὅπερ ἀπομάχεται τοῖς ἀνωτέρω· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ εἴγε δοθῇ τετράγωνος ἐξ ἐλαττόνων ἢ ἓξ κύφρων συνεστηκὸς, φέρ᾽ εἰπεῖν πέντε, καὶ τούτου ἡ ῥίζα, ὡς καὶ τοῦ ἐκ τῶν ἕξ, εἴη ἂν τριμερής· τούτοις τοίνυν καὶ τοῖς τοιούτοις χειραγωγούμενοι, εὑρήσομεν ποσαμερὴς ἂν εἴη ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ δοθέντος τετραγώνου, εἴγε διέλωμεν αὐτὸν εἰς μέρη, ἀρχόμενοι δεξιόθεν, καὶ ἀποδῶμεν ἑκάστῳ μέρει ἀνὰ δύο κύφρας πλὴν τοῦ τελευταίου, ὅπερ ἐπαμφοτερίζει ἐπί τινων μὲν δύο, ἐπί τινων δὲ μίαν κύφραν ἔχον· ἔσονται γὰρ αἱ κύφραι τῆς ζητουμένης ῥίζης ἰσάριθμοι τοῖς τοῦ τετραγώνου μέρεσιν, ὡς ἐπὶ τῶν α, καὶ β, ὁρᾶται τετραγώνων, ὧν τοῦ μὲν α, τετραμεροῦς ὄντος, καὶ ἡ ῥίζα ἐστὶ τετραμερής, τοῦ δὲ β, ἑξαμεροῦς, καὶ ἡ ῥίζα ἑξαμερής.

α 23, 45, 67, 89.   β 7, 96, 40, 97, 45. 67.

Ἀλλ᾽ ὅπως ἐπὶ τῶν πράξεων τὰ μέρη καταλλήλως τάττοιντο ἐπιστάσεως ἄξιον.

ὅτι τὸ ἀπὸ μονάδων τετράγωνον μονάδων ἐστὶ παρακτικόν·
τὸ ἀπὸ δεκάδων — ἑκατοντάδων.
τὸ ἀπὸ ἑκατοντάδων — δεκάδων χιλιάδων, ἢ μυριάδων· καὶ
τὸ μὲν ὑπὸ δεκάδων καὶ μονάδων, δεκάδων.
τὸ δὲ ὑπὸ δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων, χιλιάδων.

Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀναλόγως· ταῦτα δὲ, εἰ καὶ εἰς ἀνωτέρας προσηγορίας ἄνεισι, λήγουσι μέντοι εἰς τὰς εἰρημένας, ἐξ ὧν καὶ τὴν προσηγορίαν ἐρανίζονται· ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ 2, φέρ' εἰπεῖν καὶ 90, καί τοι παράγων τὸν 180, ὃς ἄνεισιν εἰς ἑκατοντάδα, ἀλλὰ ἐπεὶ λήγει εἰς 8, δεκάδας, ἐρανίζεται καὶ ἡ ἑκατοντὰς τὴν τῶν δεκάδων προσηγορίαν, ὥστε λέγεσθαι τὸ ὅλον δέκα καὶ ὀκτὼ δεκάδας· τὸ αὐτὸ συμβήσεται καὶ ἐπὶ τῶν τετραγώνων.

Κανόνιον.

ῥίζαι ἢ πλευραί.	τετράγωνα.	κύβοι.
1,	1,	1.
2,	4,	8.
3,	9,	27.
4,	16,	64.
5,	25,	125.
6,	36,	216.
7,	49,	343.
8,	64,	512.
9,	81,	729.

Τούτων οὕτω κειμένων οὐ χαλεπὸν καὶ ἀριθμητικῶς τὴν ῥίζαν τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἀριθμοῦ ἐξαγαγεῖν, καὶ τὸν λόγον τῆς πράξεως κατιδεῖν· δεδόσθω γὰρ πρῶτον ὁ α, τετράγωνος, καὶ διαιρεθήτω στιγμαῖς· καὶ ἐπεὶ διῄρηται εἰς δύο, ἔσται πάντως καὶ ἡ ῥίζα αὐτοῦ κατὰ τὰ εἰρημένα διμερής· εἰ μὲν οὖν τὸ πρῶτον αὐτοῦ τμῆμα τετράγωνος ἦν ἀριθμὸς τῶν ἀπὸ μονάδων γινομένων, ἡ ῥίζα αὐτοῦ εἴη ἂν τὸ πρῶτον μέρος τῆς

α 11,56	β 34.
9	
2,56	ὑπόδειγμα πρῶτον.
2 56	
0	

ῥίζης κειμένης ἐν τῷ ἀνωτέρῳ κανονίῳ· ἐπεὶ δὲ ὁ τετράγωνος, εὑρεθήτω ἐν τῷ αὐτῷ κανονίῳ ἡ ῥίζα τοῦ προσεχεστέρου αὐτῷ τετραγώνου οἷος ἐστὶν ὁ 9, οὗ ῥίζα ὁ 3· ὅθεν σημειωθήτω ὁ 3, ἔνθα τὸ β, ὡς πρῶτον μέρος τῆς ζητουμένης ῥίζης, εἶτα τετραγωνισθήτω, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος ταχθήτω ὑπὸ τὸν α, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν ἐπὶ τὴν ἐν τῷ α, ἑκατοντάδα, τὸ γὰρ πρῶτον μέρος τῆς ζητουμένης ῥίζης λέγω ὁ 3, ὡς οὔσης διμεροῦς δεκάδων ὂν σημαντικὸν, εἰς ἑκατοντάδας ἄνεισιν· εἶτα ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος τοῦ α, λέγω τοῦ 11, καὶ γραμμῆς ἀγομένης, τὸ λειπόμενον ὁ 2, σημειωθήτω μετὰ τῆς στιγμῆς ὑπὸ τὸν 9· προσεθήτω δὲ τῷ 2, τὸ δεύτερον τμῆμα τοῦ α, ὁ 56, καὶ ζητηθήτω ποσάκις τὸ διπλάσιον τοῦ 3, μετρεῖ τὸν 25· καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται τετράκις, τεθήτω ὁ 4, ἐπὶ τοῦ 6, ὡς δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης (κἂν μηδὲν ᾖ τὸ ἐναπολειπόμενον τὴν δευτέραν μόνον κύφραν τοῦ δευτέρου μέρους, ὡς ὀψόμεθα ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς τρίτου ὑποδείγματος) τελευταίου τοῦ 4, πολλαπλασιάσαντος ἑαυτὸν, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ 3, καὶ τῶν ἐξ αὐτῶν γινομένων εἰς ἓν συναπτομένων, καὶ τοῦ συμποσουμένου ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τὸν α 256, ἀφαιρουμένου, εἴγε οὐδὲν ἐναπολειφθῇ ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος, ὁ 34, ἔσται ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ α.

Ο λόγος τῆς πράξεως σαφής· κἀνταῦθα γὰρ ὡς καὶ ἐπὶ τῶν στοιχείων ἀφῄρηται ὁ τετράγωνος τῆς πρώτης κύφρας τῆς ῥίζης· διῄρηται τὸ λειπόμενον ἐπὶ τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δύο κυφρῶν τῆς αὐτῆς περιεχομένου ὀρθογωνίου· εὕρηται διὰ τῆς διαιρέσεως ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ λοιποῦ τετραγώνου πλευρὰ, καὶ δευτέρα τῆς ῥίζης κύφρα· αὕτη πολλαπλασιάσασα ἑαυτὴν, πεποίηκε τὸ λοιπὸν τετράγωνον· πολλαπλασιάσασα δὲ καὶ τὸ διπλοῦν τῆς πρώτης κύφρας τῆς ῥίζης τὸν 6, πεποίηκε τὸ δὶς ὑπὸ τῶν τῆς ῥίζης κυφρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον· ἅτινα ἐπεὶ εἰσὶν ἴσα τῷ ἐναπολειφθέντι διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ πρώτου τετραγώνου, καὶ ἀφαιρεθέντα, οὐδὲν ἐγκατέλιπον, παρέσχον ἡμῖν γνῶναι ὅτι ὁ 34, ῥίζα ἐστὶ τοῦ α, τετραγώνου.

Δεδόσθω δεύτερον ὁ β'· καὶ ἐπεὶ διαιρούμενος εἰς τμήματα ἑξαμερὴς εὑρίσκεται, πάντως γε ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔσται τριμερής· εὑρεθήτω τοίνυν πρῶτον ὁ προσεχὴς τετράγωνος τοῦ πρώτου τμήματος 41, ὅς ἐστιν ὁ 36, οὗ ῥίζα ὡς ἐν τῷ κανονίῳ ὁ 6· κείσθω γοῦν ὁ μὲν 6, ἔνθα τὸ γ, ὁ δὲ 36, ἔνθα τὸ δ, ὑπὸ τὸν 41· ὁ γὰρ 6, ὡς ἑκατοντάδων σημαντικὸς εἰς μυριάδας ἄνεισι, καὶ ἀφαιρεθήτω ὑπ' αὐτοῦ, καὶ ὁ λειπόμενος 5. γραφήτω ὑπὸ τὴν γραμμήν· τούτῳ προστεθήτω τὸ ὀφεξῆς τμῆμα τοῦ 6, ὁ 21, εἶτα διαπλασιασθήτω ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τῆς ῥίζης ὁ 6, καὶ ζητηθήτω

Ὑπόδειγμα δεύτερον.

```
β. 41,21,64          γ 642
δ. 36
   5,21               124
   496                  4
    25,64             496
    25,64              64
      0                 2
                     1282
                        2
                     2564
```

ποσάκις ὁ γενόμενος 12, μετρεῖ τὸν 52, καὶ ἐπεὶ τετράκις, κείσθω ἐπὶ τοῦ γ, ὁ 4, ὡς δευτέρα κύφρα τῆς ῥίζης, καὶ ὁ αὐτὸς ἐφεξῆς τοῦ 12, καὶ τοῦ γινομένου 124, ἐπὶ τὸν 4, πολλαπλασιασθέντος, ὁ ὑπ' αὐτῶν 496, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ β 5,21 ταχθεὶς ὑπ' αὐτόν, καὶ ὁ λειπόμενος 25, γραφήτω ὑπὸ τὴν γραμμήν, προστιθεμένου δὲ αὐτῷ τοῦ λοιποῦ τμήματος τοῦ β, ἤτοι τοῦ 64· τελευταῖον διπλασιασθήτωσαν αἱ εὑρεθεῖσαι κύφραι τῆς ῥίζης ἤτοι ὁ 64, καὶ ζητηθήτω ποσάκις ὁ γινόμενος 128, μετρεῖ τὸν 256, τὸν ἐν τῷ β. καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται δίς, κείσθω ὁ 2, ἐν τῷ γ, ὡς τρίτη τῆς ῥίζης κύφρα, καὶ ἐφεξῆς τοῦ 128· τούτου δὲ ἐπὶ τὸν 2, πολλαπλασιαζομένου, ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτὸν γινόμενος ἀφαιρούμενος ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ β 25.64, οὐδὲν ἐναπολείπει, εὔδηλον ὅτι ὁ γ, ἐστὶν ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ δοθέντος τετραγώνου.

Ἡ δὲ τῆς πράξεως βάσανος γίνεται διὰ πολλαπλασιάσεως· ἐὰν γὰρ ἡ ῥίζα ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλα-

σιασθεῖσιαθεῖσα ἀποδῷ τὸν δοθέντα τετράγωνον, ὑγιὴς ἔσται ἡ πρᾶξις.

Ὑπόδειγμα τρίτον, ἐν ᾧ ἀφαιρουμένης τῆς πρώτης κύφρας τῆς ῥίζης, οὐδὲν ἐναπολείπεται, καὶ τηνικαῦτα τὸ διπλάσιον αὐτῆς ποσάκις καταμετρεῖ οὐ τὸ ἐναπολειπόμενον καὶ τὴν πρώτην κύφραν τοῦ ἑξῆς τμήματος, ζητεῖται ὡς ἀνωτέρω, ἀλλὰ τὴν πρώτην μόνην κύφραν τοῦ ἑξῆς τμήματος, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος ὁ 2, τὸν 7. τὰ δὲ λοιπὰ γίνεται ὡς ἐν τοῖς πρότερον.

```
1,74,24        ( 132.
1
------
07,4
 23
------
 69
------
  52,4
  26 2
------
  52 4
------
   0
```

Ὑπόδειγμα τέταρτον ἐν ᾧ τὸ διπλάσιον τῆς πρώτης κύφρας τῆς ῥίζης οὐ καταμετρεῖ τὴν πρώτην κύφραν τοῦ ἑξῆς τμήματος, μηδενὸς λειπομένου ὡς ἀνωτέρω ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ διπλασίου, ὡς ὁ 4, ὁ ἐν τῷ γ, τὸν ἐν τῷ β, 2, καὶ τηνικαῦτα τίθεται ἀντὶ δευτέρας κύφρας τῆς ῥίζης ζῆρος.

```
4,24,36        ( 206.
γ4
------
βο 2,43,6
     40 6
------
   2 43 6
------
      0
```