Πόρισμα.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι εἴπερ πάντες οἱ ὅροι ἑκατέρου μέρους ἐπὶ τὸ αὐτὸ εἶεν διῃρημένοι, οὐδεμιᾶς δεησόμεθα πολλαπλασιάσεως, μόνης δὲ τῆς τοῦ διαιρέτου ἐκ πάντων ἀπαλείψεως.
εἰ γὰρ $\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\gamma+\varepsilon}{2}$, ἔσαι καὶ $\alpha-\beta=\gamma+\varepsilon$.

Θεώρημα τρίτον.

Ο ἔκτινος, ἡ ἔκτινων ὅρων τῆς ἰσώσεως ἀπαλειφόμενος σύζυγος, εἴγε διέλῃ πάντας τοὺς ἄλλους ἀμφοτέρων τῶν μερῶν, οὐ λυμανεῖται τὴν ἰσότητα.
εἰ γὰρ εἴη $2\alpha+4=10$, ἔσαι $\alpha+2=5$.

Δεῖξις. Τὸ γὰρ ἀφελεῖν τὸν σύζυγον ἔκτινος, διελεῖν ἐσὶ τοῦτο ἐπ' αὐτόν· οἷον τὸ 2α διαιρούμενον ἐπὶ τὸν 2, δίδωσι τὸ α. ὅτι $\frac{2\alpha}{2}=\alpha$. ἀλλὰ καὶ τῶν λοιπῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν 2, διαιρεθέντων, πάντες ἐπὶ τὸ αὐτὸ διῃρημένοι ἔσονται, ἄρα καὶ τὴν ἰσότητα κατὰ τὸ προεκτεθὲν ἀξίωμα διατηρήσουσι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὡς εἰ καὶ πάντες οἱ ὅροι ἑκατέρου μέρους τὸν αὐτὸν σύζυγον ἔχοιεν ἀπαλειφομένου ἐκ πάντων τούτου, τὰ μέρη ἴσα ἔσαι, ὡς καὶ πρότερον,
εἰ γὰρ $2\alpha+2\beta=2\gamma-2\varepsilon$, ἔσαι $\alpha+\beta=\gamma-\varepsilon$.

Θεώρημα τέταρτον.

Δυνατὸν διασώζεσθαι τὴν ἰσότητα, εἴτε ὑπερβιβαζομένων τῶν μερῶν τῆς ἰσώσεως ἐφ' οἱανδήτινα δύναμιν, εἴτε ἐξαγομένων τῶν ῥιζῶν.

Εἰ γὰρ $\alpha = \beta$ ἔσται $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\beta}$.

Δεῖξις. εἰλήφθωσαν αἱ τυχοῦσαι ῥίζαι β, καὶ γ, ἴσαι ἀλλήλαις· αὗται ἵνα ἐπί τινα ὑπερβιβασθῶσι δύναμιν, δεήσει τοσάκις, ἢ τοσάκις πολλαπλασιασθῆναι ἐφ' ἑαυτάς, ἢ ἐπὶ ἴσα αὐταῖς· οἷον εἰπεῖν ἵνα τό,τε α, καὶ τὸ β, εἰς κύβον ὑπερβιβασθῇ, ἀνάγκη ἑκάτερον δὶς ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθῆναι· εἰσὶ δὲ καὶ ἴσα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, τὰ δὲ ἴσα ἐπὶ ἴσα πολλαπλασιαζόμενα διασώζουσι τὴν ἰσότητα κατὰ τὸ ἀξίωμα, ἄρα καὶ τὰ α, β, εἰς ὁποιανδηποτοῦν δύναμιν ὑπερβιβαζόμενα διασώσουσι τὴν ἰσότητα· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον. οὐ χαλεπὸν δὲ συνιδεῖν καὶ τὸ δεύτερον. εἰ γὰρ οὐκ ἔνι τὰς ἀνίσους τῶν ῥιζῶν ἐπὶ τὴν αὐτὴν ὑπερβιβασθῆναι δύναμιν, εἶεν γὰρ ἂν οὕτω τὰ ἄνισα ἰσάκις πολλαπλασιαζόμενα, ἄνισα παράγοντα, ὅπερ ἀδύνατον, φανερὸν ὅτι καὶ τῶν δυνάμεων τῶν τὸν αὐτὸν βαθμοδείκτην ἐχουσῶν ἴσων οὐσῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἀντὶ μιᾶς τῶν πολλῶν λογιζομένων, καὶ τὰς ῥίζας αὐτῶν ἴσας εἶναι.

Ὑποσημείωσις.

Τὰ προεκτεθέντα θεωρήματα καὶ δίχα τῶν προσκειμένων αὐτοῖς ἀξιωμάτων τὸ πιςὸν ἔχουσιν ἐκ τῆς ιε΄. τοῦ ε΄. τοῦ ςοιχ.

Πρᾶξις Δ΄. δι' ἧς διακρίνεται ἀπ' ἀλλήλων τὰ ςοιχ. ἤτοι τὰ τῶν δήλων παραςατικὰ ἀπὸ τὰ τῶν ἀδήλων.

Εὑρεθείσης κατὰ τὴν τρίτην πρᾶξιν τῆς ἰσώσεως, ἑπόμενον ἐςὶ διακρῖναι τὰ ςοιχεῖα, ἄχρις οὗ ἐφ' ἕν τι παραςατικὸν ἀδήλου τινὸς καταντήσωμεν. καὶ μηδόλως λυμαινομένης τῆς ἰσότητος, τοῦτο μὲν ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν μερῶν ᾖ κείμενον, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ τῶν προδήλων παραςατικὰ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου. οἷον ἐπὶ τῆς δε τῆς ἰσώσεως $\chi+\beta=\gamma$, τῆς ἀνωτέρω διὰ τῆς τρίτης πράξεως εὑρεθείσης, μετατιθεμένου τοῦ ϐ, ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέρους εἰς τὸ ἕτερον, ἧτε ἰσότης διασώζεται, καὶ ἑτέρα ἴσωσις ἀναφύεται αὕτη $\chi=\gamma-\beta$, ἔχουσα ἐπὶ μὲν τοῦ ἑνὸς μέρους τὸ χ, παραςατικὸν τοῦ ἀδήλου, ἐπὶ δὲ τοῦ ἑτέρου τὰ τῶν δήλων ϐ, καὶ γ. τοιαύτῃ γὰρ ἐφόδῳ ἡ σημασία τοῦ παραςατικοῦ ἀδήλου τινὸς γνωσθήσεται, καὶ τὸ προτεθὲν εὐχερῶς λυθήσεται. ὄντος γὰρ δήλου ὅτι τὸ γ, σημαίνει 8, τὸ β, 3, πάντως τὸ χ, σημαίνει τὸν 5. εὔγε $\chi=8-3=5$. συναπαρτίζεται δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη πέντε τρόποις.

Πρῶτον. κειμένων κλασμάτων εἴτε ἐν ἑκατέρῳ, εἴτε ἐν θατέρῳ μέρει τῆς ἰσώσεως, ἀκεραιωθήτω πρὸ πάντων τὰ κλάσματα. γίνεται δὲ τοῦτο σωζομένης ἅμα καὶ τῆς τῶν μερῶν ἰσότητος, ἐὰν ἀπαλειφόμενος ἀπὸ τοῦ κλάσματος ὁ παρωνυμῶν αὐτὸ πολλαπλασιάσῃ τοὺς λοιποὺς ὅρους ἀμφοτέρων τῶν μερῶν, οἷον εἴπερ εἴη $\frac{\alpha\chi}{2} - \beta = \gamma$, ἔσαι $\alpha\chi - 2\beta = 2\gamma$, ἀκεραιωθέντος τοῦ κλάσματος· κἂν ὦσι πολλὰ καὶ διάφορα τὰ κλάσματα, πολλάκις χρησόμεθα τῇ ἀκεραιώσει βαθμηδὸν προϊόντες ἀφ᾽ ἑτέρου εἰς ἕτερον.

Δεύτερον. Σκεπτέον, εἰ τὸ παρασατικὸν ἀδήλου τινὸς σοιχεῖον, οὗ τὴν σημασίαν θηρώμεθα ἐν θατέρῳ, ἢ ἐν ἑκατέρῳ κεῖται τῶν μερῶν· κειμένου γὰρ ἐν ἑκατέρῳ τοῦ τοιοῦδε σοιχείου, μετενεκτέον αὐτὸ ἀπὸ θατέρου εἰς θάτερον, ὥσε κεῖσθαι ἐν θατέρῳ μόνον τῶν μερῶν. ἀλλὰ προσεκτέον ἵνα μὴ σημασίαν λάβῃ σερητικὴν, εἰς ὃ οὐκ ἐχρῆν μέρος μετενεχθὲν, ἀεὶ δὲ κληροῦσθαι σημασίαν θετικήν· κείσθω παραδείγματος χάριν αὕτη ἡ ἴσωσις $3\chi + \beta = \alpha + \chi$. ἐνταῦθα εἰκότως τὸ χ, μετενεχθήσεται δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀρισερὰ, ἵνα γένηται ἡ $3\chi - \chi + \beta = \alpha$. εἰ γὰρ τοὐναντίον συμβῇ, καὶ γένηται ἡ $\beta = \alpha + \chi - 3\chi$, οὐ χαλεπὸν συνιδεῖν, ὅτι τὸ χ, σερητικὴν σημασίαν λήψεται· κἀντεῦθεν γινώσκομεν, ὅτι κἂν τὸ τοιοῦδε σοιχεῖον ἐν θατέρῳ μέρει ὑπάρχῃ κείμενον, ἔχον προσέτι τὸ τῆς ἐλλείψεως σύμβολον προσκείμενον ἐπὶ τὸ λοιπὸν μέρος προσήκει μετενεγκεῖν τὸ τοῦ πλεονασμοῦ προσιθέντας σύμβολον. εἰ γὰρ εἴη $α-χ=β$, ἔσται $α=β+χ$, μετενεχθέντος τοῦ $χ$, ἀριστερόθεν ἐπὶ τὰ δεξιά.

Τρίτον. ἀναμὶξ κειμένων τῶν στοιχείων τὸ τυτυχόν τε προσκείμενον αὐτοῖς ἐχόντων σύμβολον, τὰ τῶν δήλων παραστατικὰ ἀπὸ θατέρου μέρους ἐπὶ τὸ ἕτερον μετενεχθήτωσαν.

Εἰ γὰρ εἴη $αχ+β-γ=βθ$, ἔσται $αχ=βθ-β+γ$, μετατιθεμένων τοῦ $β$, καὶ $γ$, ἀριστερόθεν ἐπὶ τὰ δεξιά, καὶ τῶν προσκειμένων αὐτοῖς συμβόλων ἐναλλαττομένων.

Τέταρτον. Προσκειμένου συζύγου τινὸς τῷ ἀδήλου παραστατικῷ στοιχείῳ, ἀπαλειπτέον τὸν σύζυγον, ἀλλὰ καὶ διαιρετέον ἐπ' αὐτὸν πάντας τοὺς λοιποὺς ὅρους ἑκατέρου μέρους· τοῦτον γὰρ τὸν τρόπον τό,τε στοιχεῖον ἐκεῖνο μονωθήσεται, καὶ ἡ ἰσότης τῶν μερῶν σωθήσεται κατὰ τὸ λῆμμα· οἷον ἡ ἴσωσις αὕτη $2αχ=β+γ$, εἰς τήνδε μεταποιηθήσεται, $χ=\frac{β+γ}{2α}$.

Πέμπτον. Μετὰ τὴν ἀπ' ἀλλήλων διάκρισιν τῶν στοιχείων ἐὰν τὸ μονωθὲν ὑπερβεβιβασμένον εὑρεθῇ ἐπί τινα δύναμιν φέρ' εἰπεῖν ἐπὶ τετράγωνον, παρ' ἑκατέρου μέρους ἐξαχθήτω ἡ ῥίζα τῆς δυνάμεως, ἣν ἐνδείξεταί σοι ὁ βαθμοδείκτης τῆς αὐτῆς· πλὴν ὅτι οὐχ ὁμοίως ἐπ' ἀμφοτέρων γίνεται ἡ τῆς ῥίζης ἐξαγωγή· ἐπὶ γὰρ τοῦ ἀδήλου ἐνεργείᾳ ἀποτελεῖται, ἐπὶ δὲ τῶν δήλων δυνάμει τῇ προσθέσει τούτου τοῦ συμβόλου $\surd$, ὅπερ ὅπου ἂν προστεθῇ τὴν γενησομένην ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης παρίστησιν, οἷον ἐὰν ᾖ $\chi^2 = \alpha - \beta$, ἔσται $\chi = \surd\,(\alpha - \beta)$, ἐὰν δὲ, ἐξ ἐναντίας, ὑπάρχῃ τὸ σύμβολον τῷ ἀδήλῳ προσκείμενον, ὑπερβιβασθήτω ἑκάτερον τῶν μερῶν ἐπὶ τὴν δύναμιν, ἧς ὁ βαθμοδείκτης τῷ συμβόλῳ ἐπίκειται δυνάμει, ἢ ἐνεργείᾳ· Οἷον τὸ $\surd\,\chi = \alpha + \beta$, εἰς τὸ $\chi = (\alpha + \beta)^2$ ἔσται ὑπερβιβαζόμενον, τηρημένης τῆς ἰσότητος τῶν μερῶν καθεκάτερον τῶν ὑποδειγμάτων τούτων.

Ὑποσημείωσις.

Σημείωσαι α'. ὅτι ἐπὶ τῆς ἀκεραιώσεως τῶν κλασμάτων ἐπιτομωτέρᾳ ἄντις ἐφόδῳ χρήσαιτο, πολλαπλασιάσας πάντας μὲν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἐφ' οἱασοῦν Ἰσώσεως ἐπὶ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν παρωνυμέντων τὰ ἐν αὐτῇ κλάσματα πολλαπλασιασθέντων πρὸς ἀλλήλους· πάντας δὲ τοὺς ἀριθμητὰς τῶν αὐτῶν κλασμάτων ἐπὶ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν αὐτῶν παρωνυμέντων, ἄνευ τοῦ ἰδίου ἑκάστου κλάσματος, ὁμοίως πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιασθέντων· οἷον ἐπὶ τῆσδε τῆς Ἰσώσεως· $\frac{\alpha}{3} + \beta - \frac{\gamma}{2} = \chi + \frac{\varepsilon}{4}$ τὸ μὲν β, καὶ χ, πολλαπλασιάσας ἐπὶ τὸν 24, ὅστις γίνεται ἐκ τοῦ 4, 2, καὶ 3, πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων, τὸ δὲ α ἐπὶ τὸν 8, τὸν ἐκ τοῦ 2 καὶ

4, τὸ δὲ γ, ἐπὶ τὸν 12, τὸν ἐκ τῦ 3 καὶ 4, τὸ δὲ ε, ἐπὶ τὸν 6 τὸν ἐκ τῦ 3, καὶ 2, ὁμοίως πρὸς ἀλλήλυς πολλαπλασιαζομένων, ἕξεις ἐν ἀκεραίοις ἀριθμοῖς μεταπεποιημένην τὴν ἀνωτέρω ἴσωσιν· $8\alpha + 24\beta - 12\gamma = 24\chi + 6\varepsilon$.

Δεύτερον. Τῆς σημασίας τῦ ἀδήλυ εὑρεθείσης ἐν κλάσματι, εἰς ἐλαχίςυς ὅρυς προσήκει ἄγειν τὸ κλάσμα, εἴγε ἐγχωρεῖ, διὰ τὸ σαφέςερον· ἐὰν γὰρ εὑρεθῇ τὸ χ εἶναι $= \tau\tilde{\omega}\ \frac{8}{\alpha} - \frac{8}{22}$ ἀχθήτω εἰς τὸ $\chi = \frac{4\alpha - 4}{11}$

Τύτων καλῶς τῇ μνήμῃ ἐναποτεθέντων, ἵνα ἤτε χρῆσις, καὶ τὸ χρήσιμον τῆς ἀνωτέρω πράξεως κατάδηλα γένωνται, Φέρε δὴ τὰ ἐπ' αὐτῆς εἰρημένα γυμνάσωμεν ἐπὶ τῶν Ἰσώσεων τῶν προεκτεθέντων τριῶν προβλημάτων.

Ἴσωσις τῦ πρώτου προβλήματος· $4\chi + 2\beta = \alpha$.

ἐπὶ ταύτης ὁ πρῶτος τρόπος τῆς τετάρτης ταύτης πράξεως ὐδεμίαν ἔχει χώραν· κατὰ δὲ τὸν δεύτερον μετατιθεμένου τοῦ 2β,

ἔςαι $4\chi = \alpha - 2\beta$.

κατὰ τὸν τέταρτον, διαιρέσεως γενομένης ἔςαι· $\chi = \frac{\alpha - 2\beta}{4}$

ἤτοι ταὐτὸ γάρ ἐστι διαιρεῖν τὸ 2 β. ἐπὶ τὸ 4, καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ 2.

$$\chi = \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2}.$$

Ἴσωσις τοῦ δευτέρου προβλήματος·

$$\chi + \frac{\chi}{2} + \frac{\chi - \varepsilon}{4} = \alpha$$

ἀκεραιώσει τῶν κλασμάτων κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον ἔσται

$$6\chi + \chi - \varepsilon = 4\alpha.$$

ἤ

$$7\chi - \varepsilon = 4\alpha.$$

μεταθέσει τοῦ ε, κατὰ τὸν τρίτον τρόπον

$$7\chi = 4\alpha + \varepsilon$$

Διαιρέσει κατὰ τὸν τέταρτον τρόπον.

$$\chi = \frac{4\alpha + \varepsilon}{7}$$

Ἴσωσις τοῦ τρίτου προβλήματος·

$$2\chi + \frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{4} + \iota = \alpha$$

ἀκεραιώσει τῶν κλασμάτων ἔσται.

$$16\chi + 4\chi + 2\chi + 8 = 8\alpha.$$

ἤ

$$22\chi + 8 = 8\alpha.$$

μεταθέσει τοῦ 8,

$$22\chi = 8\alpha - 8.$$

Διαιρέσει

$$\chi = \frac{8\alpha - 8}{22}$$

εἰς ἐλαχίστους ὅρους τοῦ κλάσματος ἀγομένου ἔσται.

$$\chi = \frac{4\alpha - 4}{11}$$

Πρᾶξις πέμπτη. ἐστὶν ἡ ἀπὸ στοιχείων εἰς κύφρας σημαντικὰς τούτων μετάβασις ἐπὶ τῆς ἐσχάτης Ἰσώσεως τοῦ προβλήματος. ἀμέλειτοι ἐπεὶ διὰ τῆς τετάρτης πράξεως ἐγκρατεῖς γινόμεθα τῆς σημασίας ἀδήλου τι ὄς, ἀλλὰ ἐν στοιχείοις, ἵνα τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ἀριθμοῖς σαφέστερον γνῶμεν, χρὴ ἐπὶ τὰς κύφρας μεταβαίνειν, ἀντὶ στοιχείων τῶν παραστατικῶν τῶν δήλων ἐπὶ τῆς Ἰσώσεως, τὰς καταλήλους κύφρας ἀντεισάγοντας· οὕτω γὰρ καὶ ἡ τοῦ ἀδήλου σημασία δι' ἀριθμοῦ γνωσθήσεται· ληπτέον τοίνυν εἰς τρανωτέραν κατάληψιν καὶ ταύτης τῆς πράξεως ἐκ τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων τὰ ὑποδείγματα.

Τοῦ πρώτου προβλήματος ἡ ἐσχάτη ἴσωσις ἦν αὕτη·

$$\chi = \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2}$$

ὑπόκειται τὸ μὲν α, ἀντὶ τοῦ 800, τὸ δὲ β, ἀντὶ τοῦ 100, ἀντεισαγομένων τῶν κυφρῶν ἔσται·

$$\chi = \frac{800}{4} - \frac{100}{2}$$

ἤτοι $\chi = 200 - 50$, καὶ ἑπομένως $\chi = 150$, τὸ δὲ χ, ὑπόκειται ἀντὶ τῶν ὀβολῶν οὓς ἔλαβεν ὁ πρῶτος, ἔγνωσται ἄρα τὸ μέρος τοῦ πρώτου, ἐκ τούτου δὲ καὶ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου, ἐπεὶ γὰρ ὁ μὲν δεύτερος ὑπόκειται λαβεῖν πλεῖον τοῦ πρώτου ἑκατὸν, ὁ δὲ τρίτος ὅσα οἱ δύο ὁμοῦ, ἔσται τοῦ δευτέρου 250, τοῦ τρίτου 400, ὀβολοί· ✓ $150 + 250 =$

Τοῦ δευτέρου ἐσχάτη ἴσωσις·

$$\chi = \frac{4\alpha + \varepsilon}{7}$$

ὑπόκειται δὲ τὸ α, ἀντὶ
τοῦ 80,
τὸ ε, ἀντὶ τοῦ 30,
ἔσαι τοίνυν ἐν κύφραις. $\chi = \frac{320 + 30}{7}$

ἤτοι $= \frac{350}{7} = 50$ εἰδὲ ἐσὶ τὸ $\chi = 50$, ὃ παρασατικὸν τῶν τοῦ πατρὸς ἐτῶν, τὰ ἔτη τοῦ υἱοῦ ἔσαι 20, εἴγε $\chi - \varepsilon = 50 - 30 = 20$, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν· καὶ ὁ μὲν πατὴρ εὑρίσκεται πεντηκοντούτης, ὁ δὲ υἱὸς εἰκοσαετής.

Τοῦ τρίτου ἐσχάτη ἴσωσις· $\chi = \frac{4\alpha - 4}{11}$

καὶ ὑπόκειται τὸ α, ἀντὶ
τοῦ 100, ἔσαι ἐν κύφραις· $\chi = \frac{400 - 4}{11} = \frac{396}{11}$
$= 36$ τουτέσιν ὁ ἀριθμὸς τῶν προβάτων ἐσὶν ὁ 36.

Καὶ αὗται μὲν αἱ κυριώτεραι, μᾶλλον δὲ αἱ γενικώτεραι πράξεις τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, αἵτινες ἐπὶ παντὸς προβλήματος τὴν οἰκείαν αὐτῶν παρέχονται λυσιτέλειαν· εἰσὶ μέν τοι καὶ ἄλλαι μερικώτεραι ἐπί τινων ἄλλων προβλημάτων ἰδίᾳ συμβαλλομέναι, περὶ ὧν ἐροῦμεν ἐφεξῆς· ἤδη δὲ καὶ τὸν τρόπον προσθεῖναι δέον, καθ' ὃν αἱ Πράξεις βασανίζονται.

Περὶ βασάνου τῶν πράξεων.

Μετὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος οὑτωσίπως τὰς πράξεις βασανιστέον. Πᾶσι τοῖς, οἷς ἐχρησάμεθα ἐπὶ τῶν πράξεων στοιχείοις, προσαρμοστέον τὰς κύφρας τὰς παραστατικὰς τῆς καταλλήλου ἑκάστου σημασίας, εἴτε ὑποτεθείσης, εἴτε εὑρεθείσης διὰ τῆς πράξεως, σκεπτέοιτε τὰς ὑποθέσεις τοῦ προβλήματος ἀκριβῶς· κἂν συνάδει ταύταις τὰ διὰ τῶν πράξεων, ὑγιεῖς πάντως αἱ πράξεις τυγχάνουσιν· οἷον ἐπὶ τοῦ πρώτου προβλήματος ἐπεὶ κατὰ τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, οἱ ὀβολοὶ, οὓς πρὸς ἀλλήλους ἐνείμαντο οἱ τρεῖς ἐκεῖνοι ἄνδρες ὑπῆρχον 800, εὕρηται δὲ τοῦ μὲν πρώτου τὸ μέρος $= 150$, τοῦ δὲ δευτέρου $= 250$, καὶ τοῦ τρίτου $= 400$, ὀβολοῖς· ταῦτα δὲ $150 + 250 + 400$, συμπληροῦσι τὸν 800, συνάδει πάντως τῇ πρώτῃ ὑποθέσει τοῦ προβλήματος τὰ εὑρεθέντα διὰ τῆς πράξεως· αὖθις ἐπεὶ διὰ τῶν λοιπῶν ὑποθέσεων τοῦ προβλήματος ὑποτίθεται τὸ μέρος τοῦ δευτέρου $=$ τῷ τοῦ πρώτου $+ 100$, ἤτοι $= 150 + 100$, καὶ τὸ τοῦ τρίτου, ἴσον τῷ τοῦ πρώτου, καὶ δευτέρου ὁμοῦ, καὶ εὕρηται ὁ μὲν $250 =$ τῷ $150 + 100$, ὁ δὲ $400 = 150 + 250$, ὑγιὴς ἄρα ἐστὶν ἡ πρᾶξις, καὶ ἡ ἐπίλυσις τοῦ προεκτεθέντος προβλήματος.

Τέτταρα τὰ εἴδη τῶν λυσίμων προβλημάτων ἐπὶ τοῦ προληφθέντος κεφαλαίου ἐξεθέμεθα· δηλανότι τῶν απλῶν, ἢ συνθέτων, τῶν ὡρισμένων, ἢ αοςίςων· ꙋ ἁπλᾶ μὲν εἰσὶν, ὧν αἱ Ἰσώσεις τὰ παραςατικὰ τῶν ἐν αὐταῖς ἀδήλων ἁπλᾶ ἐσχήκασιν, ἤτοι ἁπλῶν ποσοτήτων σημαντικά· σύνθετα δὲ ὧν τὰ τοιαῦτα ἐπίτινα δύναμιν ἄνεισι φερ' εἰπεῖν τετράγωνον, κύβον ꙋ τὰς λοιπὰς δυνάμεις, οἷον τὸ τοιάνδε Ἴσωσιν $\chi = \alpha - \beta$, ἐσχηκὸς, ἁπλῦν ἐςὶ, τὸ δὲ τοιάνδε $\chi^2 - \chi = \alpha\beta$, σύνθετον· ꙋ αὖθις ὡρισμένα, ἐν οἷς ἡ τῦ ἀδήλυ σημασία ἐξ αὐτῆς μόνης τῆς πράξεως καταφανὴς γίνεται, μὴ δεομένη τῆς ὑπὸ τῦ ἀναλύοντος ἐπικυρίας· ꙋ τελευταῖον ἀόριςα, ἐν οἷς ὁ ἀναλύων ὀφείλει θύραθεν ἐπεισαγαγεῖν, κατὰ τὸ δοκῦν, τὴν σημασίαν ἀδήλυ τινός· ὗ γνωσθέντος, ꙋ τὰ λοιπὰ ὅσα ἐνυπάρχει τῷ προβλήματι ἄδηλα διὰ τῆς πράξεως γνωσθήσεται· οἷον προκειμένυ εὑρεῖν δύο ἀριθμὺς, ὧν τὸ συμποσύμενον εἴη $=$ τῷ 100, ἔξεσιν ἡμῖν κατὰ τὰ εἰρημένα, τῷ μὲν τῶν ζητυμένων ἀριθμῶν προσοικειῶσαι τὸ χ, τῷ δὲ τὸ φ, ꙋ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῦ προβλήματος τοιαύτην ποιῆσαι Ἴσωσιν $\chi + \varphi = 100$, μεταθεῖναιτε τὸ φ· ὥςε γενέσθαι $\chi = 100 - \varphi$, εἰμὲν ὖν ἐγνωσμένη ἦν ἡ σημασία τῦ φ, ἐν κύφραις, ἐξῆςα ἂν ꙋ τὸ χ ἔγνωςο, ꙋ τὸ πρόβλημα ἐλέλυτο· ἐπεὶ δὲ ἀγνοεῖται ἑκατέρου ἡ σημασία, ꙋ μήτε ἄλλη τις ὑπόθεσις ἐν τῷ προβλήματι δέδοται, μήτε διὰ τῆς πράξεως προϊέναι περαιτέρω ἔχομεν, ἀναγκαζόμεθα ἐπιθεῖναι σημασίαν τῷ φ, κατὰ τὸ δοκῦν δὸς εἰπεῖν σημαντικὸν εἶναι τῦ 20, τύτυ γὰρ κειμένυ εὐχερῶς καὶ τὸ χ σημαντικὸν εἶναι τῦ 80, εὑρίσκεται διὰ ταύτης τῆς Ἰσώσεως $\chi = 100 - 20 = 80$.

Ἐπεὶ δὲ τὰ προεκτεθέντα προβλήματα, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ἁπλᾶ εἰσὶ καὶ ὡρισμένα· ἑπόμενον ἦν εἰπεῖν καὶ περὶ τῶν ἁπλῶν, καὶ ἀορίστων· ἀλλὰ διττῆς τάξεως ὄντων τῶν ὡρισμένων, τὰ πλεῖστα γὰρ τούτων ἑνὶ ἀρκοῦνται στοιχείῳ παραστατικῷ τῶν ἐν αὐτοῖς ἀδήλων· ἔνια δὲ τούτων ἀπαιτοῦσι πλείω ἢ ἕν, περὶ τούτων πρῶτον δέον εἰπεῖν, εἶτα καὶ περὶ ἐκείνων· πλείονος μέντοι ἐξασκήσεως χάριν προεκτεθήτωσαν καὶ ἄλλα τινὰ προβλήματα ἁπλᾶ καὶ ὡρισμένα, καὶ ἑνὶ στοιχείῳ ἀρκούμενα εἰς ἔνδειξιν τῶν ἐν αὐτοῖς ἀδήλων· ἅπερ λύονται κατὰ τὴν προλαβοῦσαν μέθοδον, καὶ τοὺς κατ᾽ αὐτὴν τρόπους παραπλησίως τοῖς ἀνωτέρω.

Ἅπαν Πρόβλημα

ἢ

λύσιμον Λ ἄλυτον

ἁπλοῦν Λ σύνθετον

ὡρισμένον Λ ἀόριστον ὡρισμένον Λ ἀόριστον

ἐξ ἑνὸς ἀδήλου Λ ἐκ δύο.
συγκείμενον.

Α'.

Ὄλβιε Πυθαγόρη μουσῶν Ἑλικώνιον ἔρνος
Εἰπέ μοι εἰρομένῳ, ὁπόσοι σοφίης κατ' ἀγῶνα
Σοῖσι δόμοισιν ἔασιν ἀεθλεύοντες ἄριστα;
Τοὶ γὰρ ἐγὼν εἴποιμι, Πολύκρατες· ἡμίσεες μὲν
Ἀμφὶ καλὰ σπεύδουσι μαθήματα· τέτρατοι αὖται
Ἀθανάτου φύσεως πεπονήαται· ἑβδομάτοις δὲ
Σιγὴ πᾶσα μέμηλε, καὶ ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι
Τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι, Θεανὼ δ' ἔξοχος ἄλλων
Τόσσους πιερίδων ὑποφήτορας αὐτὸς ἀγινῶ.

Ἔστω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ, ὁ διδόμενος 3. α.
Ἔσται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ προβλήματος.

$$\chi = \frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{7}\,3 + \acute{\alpha}$$

ἀκεραιώσει

$$56\chi = 28\chi + 14\chi + 8\chi + 168\acute{\alpha} + 56\alpha$$

συνάψει.

$$56\chi = 50\chi = 168\acute{\alpha} + 56\alpha.$$

ἀφαιρέσει.

$$56\chi - 50\chi = 168\acute{\alpha} = 56\alpha$$

ἤτοι

$$6\chi = 108\acute{\alpha} = 56\alpha$$

ἄρα

$$\chi = \frac{168\acute{\alpha}}{6} = 28$$ καὶ οὗτος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

$$6\begin{cases} 56\alpha \\ \cdot 2 \\ 9\alpha + \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{3}{27} \qquad \frac{1}{3}\,\frac{3}{1}\,\frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{1}{28}$$

ὡσαύτως λυθήσε-
ται καὶ τὸ
καὶ τὰ λοιπά.

„Αἱ κύπρις τὸν ἔρωτα.
„Τίπτέ με τῶν καρύων
„πᾶσι μῆλα βέβηκεν
Δρεψαμένη ποτὲ μῆλα.

Βάσανος.

Ἐπεὶ εὕρηται ὁ $\chi = 28$, ἔςαι $\frac{\chi}{2} = 14$, $\frac{\chi}{4} = 7$, $\frac{\chi}{7} = 4$· ταύτας τὰς κύφρας ἐφαρμόττοντες ἐπὶ τῆς εὑρεθείσης ἐν ἀρχῇ ἰσώσεως, εὑρίσκομεν συμπληρέσας τὸν 28, καὶ ἑπομένως τὴν πρᾶξιν γενομένην ὑγιῶς.

Πρόβλημα.

„Ὁδοιπόρος τις πρὸ ἓξ ἀποδημήσας ἡμερῶν, δια-
„νύει καθ' ἑκάςην ἡμέραν ὥρας τρεῖς· ἕτερος δὲ ἤ-
„δη ἀποδημῶν, καὶ τὴν αὐτὴν ὁδοιπορίαν ἐκείνῳ ποιού-
„μενος, ἀλλὰ διανύσων ἑκάςης ἡμέρας ὥρας πέντε,
„ὡς τὸν πρῶτον καταληψόμενος, ζητεῖ μαθεῖν ἐν
„πόσαις ἡμέραις αὐτὸν καταλήψεται· κείσθω $6 = \alpha$, $3 = \beta$, $5 = \gamma$, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν $= \chi$.

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ προβλήματος συνορᾶν ἔχομεν, ὅτι τηνικαῦτα καταλήψεται ὁ δεύτερος τῶν ὁδοιπόρων τὸν πρῶτον, ἡνίκα διανύσῃ ὥρας, ὅσας κἀκεῖνος· ἀνθ' ὅτου διορίσασθαι δεῖ τὰς καθ' ἑκάτερον ὥρας ἀλγεβρικῶς, καὶ ἰσῶσαι· καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος ἐν ἡμέραις α, αἷς πρὔλαβε τὸν δεύτερον, διήνυσεν ὥρας αβ, ας δὲ διανύσει ἐν ἡμέραις χ, παραςήσοιεν ἂν τὸ χβ, ἔςαι τὸ αβ + χβ, παραςατικὸν τῶν ὡρῶν ἃς διήνυσεν ὁ πρῶτος μέχρι τῆς τῦ δευτέρυ συναντήσεως· τῶν δὲ τῦ δευτέρου ὡρῶν ὁμοίως ἔςαι παραςατικὸν τὸ γχ· ἐξ ὧν θηρεύεται αὕτη ἡ ἴσωσις.

$$\gamma\chi = \alpha\beta + \chi\beta$$

μεταθέσει τῦ $\chi\beta$, ὅτι τὸ $\gamma\chi >$ τῦ $\chi\beta$.

Ἔςαι $\gamma\chi - \chi\beta = \alpha\beta$.

διαιρέσει ἐπὶ τὸ $\gamma - \beta$

Ἔςαι $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma-\beta}$ ταύτης τῆς ἰσώσεως

εἰς κύφρας μετενεχθείσης ἔςαι $\chi = \frac{6.3}{5-3}$ ἤτοι $\chi = \frac{18}{2} = 9$.

Θεώρημα.

Ἐὰν δοθῇ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, καὶ τὸ συμποσύμενον ἐξ αὐτῶν, δοθήσονται καὶ οἱ ἀριθμοί.

Κείσθω ἀντὶ τῦ συμποσυμένου τὸ σ, ἀντὶ τῆς διαφορᾶς τὸ δ, ἀντὶ τῦ μείζονος τῶν ἀριθμῶν τὸ χ, τύτυ δὲ κειμένυ, ἔςαι ἀντὶ τῦ ἐλάττονος τὸ χ—δ· ὐ τῦτο δὲ μόνον, ἀλλὰ καὶ τὸ σ—χ, εἴγε ἐγκαταλείπεται ἀεὶ ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῦ συμποσυμένυ ἐκ δύο ἀνίσων ἀριθμῶν τῦ μείζονος, ἐξ ὧν ἀναφύεται ἴσωσις. $\chi - \delta = \sigma - \chi$

μεταθέσει δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀριςερὰ τῦ χ, ϗ ἀνάπαλιν τῦ δ, ἔςαι $2\chi = \sigma + \delta.$

διαιρέσει ἐπὶ τὸν 2. $\chi = \frac{\sigma + \delta}{2}$

„ ὅπερ ἐν ἀρχῇ ἐλέγετο· ἀμέλει δύο ἐκκειμένων ἀ-
„ νίσων ἀριθμῶν, ὁ μείζων τύτων ἐςὶν ἴσος τῷ ἡμί-
„ σει τῦ συμποσυμένυ προσκειμένης τῆς ἡμιδιαφο-
„ ρᾶς.

Αὖθις ὁ ἐλάττων ὡς εἴρηται ἐςὶν $=$ τῷ $\chi - \delta$. ἀντὶ δὲ τῦ χ, λαβόντες τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ, ἤτοι τὸ ἀρτίως εὑρεθὲν, ἕξομεν τὸν ἐλάττονα $=$ τῷ $\frac{\sigma+\delta}{2} - \delta$, ἀκεραιώσαντες τὸ κλάσμα εὑρήσομεν $\sigma + \delta - 2\delta$, ἤτοι $\sigma - \delta$, τὸ διπλάσιον τῦ ἐλάττονος ἀριθμῦ· τύτυ δίχα διαιρεθέντος, εὑρίσκεται ὁ ἐλάττων $=$ τῷ $\frac{\sigma-\delta}{2}$· ὃ δὴ πρότερον ἐλέγετο· „ ὅτι δύο ἐκκειμένων
„ ἀριθμῶν ἀνίσων, ὁ ἐλάττων τύτων ἴσος ἐςὶ τῷ ἡ-
„ μίσει τῦ συμποσυμένυ λείψει τῆς ἡμιδιαφορᾶς·

οἷον ἐκκειμένων τῦ 12, καὶ 8, ἀνίσων ἀριθμῶν, ὧν τὸ ἥμισυ τῦ ἐξ αὐτῶν συμποσυμένου ἐςὶν ὁ 10, ἡμιδιαφορὰ δὲ ὁ 2, ἔςαι ὁ μείζων ἤτοι ὁ 12 $=$ τῷ $10 + 2$, ϗ ὁ ἐλάττων τυτέςι ὁ 8, $=$ τῷ $10 - 2$. Τῶν ἑξῆς δύο προβλημάτων ἡ λύσις δι' ἐπιτομωτέρας γενήσεται πράξεως.

Πρόβλημα.

Ἐμπορικός τις ἐρωτηθεὶς πόσους στατῆρας ἐκέρδησεν. ἔφη. εἰ τοῖς $\frac{2}{3}$ τοῦ ἐμοῦ κέρδους προσθείη τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ αὐτοῦ, ἕξει τὸν 34, ἀριθμόν.

κείσθω $34 = \alpha$.

ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $= \chi$.

ἔσται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{2\chi}{3} + \frac{3\chi}{4} = \alpha$, ὥστε $\chi = 24$.

Πρόβλημα.

Ἔχοντες τινὲς νομίσματα κοινὰ ἔγνωσαν ἐξ ἴσου διανείμασθαι ταῦτα πρὸς ἀλλήλους· ἀλλὰ πόσα, ἀγνοῶ· οἶδα δὲ ὅτι πειραθέντων δοῦναι ἑκάστῳ ἀνὰ ἑπτὰ, ἐδέησαν αὐτοῖς πέντε, ὥστε γενέσθαι ἴσην τὴν διανομήν· δόντων δὲ ἀνὰ ἕξ, ἐπίσης ἐγένετο ἡ διανομή· βούλομαι μαθεῖν τὸν ἀριθμὸν τῶν τε διανενεμηκότων, καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν νομισμάτων.

ὁ τῶν διανενεμηκότων ἔστω $= \chi$·

ἔσται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $7\chi - 5 = 6\chi$, καὶ ἑπομένως $\chi = 5$, ἐξ οὗ καὶ ὁ τῶν νομισμάτων γνωσθήσεται· ἔσται γὰρ $5 \cdot 6 = 30$·

καὶ τοσαῦτα μὲν ἱκανὰ περὶ τῶν ἁπλῶν καὶ ὡρισμένων προβλημάτων, ἐν οἷς ἱκανὸν ἓν στοιχεῖον εἰς ἔνδειξιν τῶν ἐν τῷ προβλήματι ἀδήλων· (ἐπιστάσεως δὲ ἄξιον ὅτι ἡνίκα ἐπὶ τῶν τοιούτων), ἐν οἷς δὲ οὐκ ἀρκεῖ ἓν εἰς ἔνδειξιν πάντων τῶν ἀδήλων, συντρέχει πλείω στοιχεῖα, ἢ ἕν· κἀκτεῦθεν καὶ αἱ Ἰσώσεις γίνονται πλείους, μιᾶς, συμβαίνει τε ἐν ταῖς Ἰσώσεσι τὰ παραστατικὰ τῶν ἀδήλων εἶναι πλείω, ἢ ἕν· ἐπιστάσεως μέντοι ἄξιον ὅτι ἐκ τῶν τοιούτων Ἰσώσεων οὐκ ἔνι τὴν σημασίαν τοῦ ἀδήλου θηράσασθαι· οὐ γὰρ ἂν μεταποιηθείη ἡ Ἴσωσις, ὥστε ἐν τῷ ἑνὶ τῶν μερῶν τῆς αὐτῆς κεῖσθαι ἓν στοιχεῖον ἀδήλου τινὸς παραστατικόν. ἐν δὲ τῷ λοιπῷ τὰ τῶν δήλων μόνα· διά τοι τοῦτο ἐκβάλλειν χρὴ πάντα τὰ τῶν ἀδήλων παραστατικὰ πλὴν ἑνὸς ἐκ τῆς Ἰσώσεως, ἵνα ἡ τοῦ ἐγκαταλειφθέντος σημασία γνωσθῇ· ὅπερ τευξόμεθα διὰ τοῦ ἑπομένου προβλήματος.

Πρόβλημα.

Ἐὰν ὦσι δύο Ἰσώσεις κοινωνοῦσαι κατὰ τὰ στοιχεῖα, τὰ τῶν ἀδήλων παραστατικὰ, ἐκβαλεῖν ἀπὸ θατέρας θάτερον.

Τετραχῶς τοῦτο ἔνεστι ποιεῖν· οὐ μέντοι πᾶσι τοῖς τρόποις ἐφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ χρησόμεθα, ἀλλὰ πῇ μὲν τούτῳ, πῇ δὲ ἐκείνῳ κατὰ τὰ παρακολουθοῦντα τοῖς προβλήμασιν· ὁ πρῶτος τρόπος γένοιτ' ἂν δι' ἀντεισαγωγῆς, μεταφερομένης δηλονότι τῆς σημασίας ἀδήλου τινὸς ἀπὸ θατέρας τῶν Ἰσώτεων ἐπὶ τὴν ἑτέραν, καὶ αὐτ' ἐκείνου λαμβανομένης· οἷον κειμένων ἐπί τινος προβλήματος τούτων τῶν δύο Ἰσώσεων·

$$\chi + \varphi = \alpha \cdot \text{ καὶ } 3\chi = 2\varphi.$$

μεταθέσει ἐπὶ τῆς προτέρας τοῦ φ· γενήσεται $\chi = \alpha - \varphi.$

δυνατὸν τοίνυν ἀντεισαγαγεῖν ἐπὶ τῆς δευτέρας, τὸ $\alpha - \varphi$. λαβοῦσιν ἀντὶ τοῦ χ, καὶ γενέσθαι ἀντὶ τοῦ $3\chi = 2\varphi$!, τὴν $3\alpha - 3\varphi = 2\varphi$, ἴσην τῇ δευτέρᾳ Ἰσώσει, τὸ φ, μόνον περιεχοῦσαν ἐκβληθέντος τὸν τρόπον τοῦτον τοῦ χ.

Ὁ δεύτερος τρόπος ἀποτελεῖται διὰ συνθέσεως τῶν ἴσων τινὶ, ἡνίκα εὑρεθῶσι δύο σημασίαι τοῦ αὐτοῦ ἀδήλου ἐκ δύο τινῶν Ἰσώσεων, καὶ εἰς μίαν ἄμφω συντεθῶσιν· ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος εὐχερῶς ἂν μεταποιηθείη ἡ μὲν πρώτη Ἴσωσις εἰς τήνδε, $\chi = \alpha - \varphi$, ἡ δὲ δευτέρα, εἰς τήνδε $\chi = \frac{2\varphi}{3}$ κατὰ τοὺς προεκτεθέντας τρόπους τῆς πράξεως· καὶ διττὴ ἂν εὑρεθείη ἡ σημασία τοῦ χ, ἤτε $\alpha - \varphi$, καὶ ἡ $\frac{2\varphi}{3}$. ὧν συντιθεμένων εἰς μίαν συσταθήσεται ἡ $\alpha - \varphi = \frac{2\varphi}{3}$, τοῦ χ, ἀμέτοχος.

Ἐφιστάνειν δὲ χρὴ, καὶ παρατηρεῖν τὰς ἰσώσεις ὥστε μὴ ἠρτῆσθαι ἑτέραν τῆς ἑτέρας, καὶ μεταποιεῖσθαι πρὸς ἀλλήλας· ἐκ γὰρ τῶν τοιούτων Ἰσώσεων οὐδὲ ποτ' ἂν ἐξαχθεῖεν δύο σημασίαι διάφοροι, ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀδήλου, συνισῶσαι τινὰ Ἴσωσιν ἁρμοδίαν εἰς λύσιν τοῦ προβλήματος· ἄλλως γὰρ τοιαύτη Ἴσωσις συσταθήσεται, οἷα εἰς τὸ μηδὲν χωρήσει, μετατιθεμένων ἀφ' ἑτέρου μέρους τῶν στοιχείων εἰς τὸ ἕτερον· οἷον δεδόσθω ἐκ τούτων τῶν Ἰσώσεων λέγω τῆς τε

$\alpha\chi = \gamma - \varphi$, καὶ τῆς $\frac{\alpha}{2} + \chi = \frac{\gamma - \varphi}{2}$, ὧν ἡ προτέρα διαιρεθεῖσα ἐπὶ τὸν 2, εὐχερῶς ἂν ἐπὶ τὴν δευτέραν μεταποιηθείη· δύο διαφόρους σημασίας τοῦ χ, ἐξαχθῆναι· ἔξεστι τοίνυν τῷ βουλομένῳ διὰ τῆς πείρας συνιδεῖν, ὅτι εἰς κενὸν μοχθεῖ συντιθέμενος εἰς ἑτέραν ἴσωσιν τὰς σημασίας ταύτας, καὶ ἐκ ταύτης πειρώμενος τὴν τοῦ ἀδήλου φ, σημασίαν εὑρεῖν.

Ὁ τρίτος τρόπος γίνεται διὰ συνάψεως τῶν Ἰσώσεων· οἷον ἐὰν εὑρεθῶσι ἐπί τινος προβλήματος αὗται αἱ Ἰσώσεις $\chi + \varphi = \alpha$, καὶ $\chi - \varphi = \beta$, συναπτομένων τούτων, ἀναφύεται ἡ $\chi + \varphi + \chi - \varphi = \alpha + \beta$, κατὰ τὸ δεύτερον ἀξίωμα· καὶ οὕτως εὑρίσκεται ἑτέρα ἴσωσις, ἀναιρεθέντος τοῦ $+ \varphi$, ὑπὸ τοῦ $- \varphi$, ἄμοιρος τοῦ φ· δῆλον δὲ ὡς ἡ τοιαύτη πρᾶξις κρατεῖ ἡνίκα οὐ τὸ αὐτὸ σύμβολον πρόσκειται ὁποτερῳοῦν τῶν ἀδήλων ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν Ἰσώσεων· τηνικαῦτα γὰρ συναναιρούντων τῶν ἀντικειμένων ἄλληλα διὰ τῆς συνθέσεως, λείπεται ἡ ἐσχάτη ἴσωσις θατέρου τῶν ἀδήλων ἄμοιρος.

Ὁ δὲ τέταρτος, καὶ τελευταῖος δι᾽ ἀφαιρέσεως τῶν Ἰσώσεων· ἔστωσαν γὰρ ἐπί τινος προβλήματος αἱ δύο αὗται Ἰσώσεις $\chi + \varphi = \alpha$, καὶ $\chi - \varphi = \beta$, ἀφαιρουμένης τῆς δευτέρας ἀπὸ τῆς πρώτης, ἀναφύεται τοιάδε ἴσωσις $\chi + \varphi - \chi + \varphi = \alpha - \beta$, ἤτοι $2\varphi = \alpha - \beta$· ἀλλὰ δῆλον ὡς οὐδὲ οὗτος ὁ τρόπος ἐστὶ καθόλου οὐδὲ ἐν πᾶσιν εὔχρηστος· ἀνθ᾽ ὅτου θατέρῳ ἐκ τῶν δύο προτέρων χρηστέον ὡς ἐπὶ τὸ πολύ· ἐὰν γὰρ συμπέσῃ ἐπ' αὐτῆς πάντα τὰ ἄδηλα γενέσθαι ἑτεροσύμβολα, οὐ σταθήσεται.

Περὶ ἐπιλύσεως ἁπλῶν καὶ ὡρισμένων προβλημάτων, ἐν οἷς συμβαίνει πλείω ἑνὸς ἐνυπάρχειν τὰ ἄδηλα.

Πρόβλημα.

Ἀνδρομάχη τρεῖς ἔχουσα παῖδας, καὶ ἐρωτηθεῖσα ποσαετὴς ἐστὶν ἕκαστος αὐτῶν, ἀπεκρίνατο εἰποῦσα· πρῶτος λαβὼν τὰ τοῦ δευτέρου, 25, συμπληρώσει ἔτη, ὁ δεύτερος, μετὰ τοῦ τρίτου, 60, καὶ ὁ τρίτος, μετὰ τοῦ πρώτου, 37, σκεπτέον εἰ δυνατὸν ἐκ τῆς τοιαύτης ἀποκρίσεως τὰ ἑκάστου ἔτη μαθεῖν.

Κατὰ τὴν πρώτην πρᾶξιν τῆς μεθόδου κείσθω $25 = \alpha$, $60 = \beta$, $37 = \gamma$, ἀντὶ δὲ τῶν ἐτῶν τοῦ πρώτου, $= \chi$, ἀντὶ τοῦ δευτέρου, $= \varphi$, ἀντὶ τοῦ τρίτου, $= \psi$, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, συσταθήτωσαν ἰσώσεις ἰσοπληθεῖς τοῖς διαφόροις στοιχείοις τοῖς τῶν ἀδήλων παραστατικοῖς, οἷον κατὰ τὴν πρώτην ὑπόθεσιν τοῦ προβλήματος πρώτη ἴσωσις συσταθήσεται ἡ $\chi + \varphi = \alpha$, κατὰ τὴν δευτέραν, ἡ $\varphi + \psi = \beta$, κατὰ τὴν τρίτην, ἡ $\chi + \psi = \gamma$· κατὰ τὴν τετάρτην πρᾶξιν πειρατέον τὰς προκειμένας ταύτας ἰσώσεις εἰς μίαν ἀγαγεῖν, ἐν ᾗ ἓν καὶ μόνον στοιχεῖον τῶν παραςατικῶν τῶν ἀδήλων ἐγκαταλειφθήσεται τῶν λοιπῶν ἐκβληθέντων, ϗ ἑπομένως εὑρεῖν τὴν σημασίαν αὐτȣ̃ διὰ τῆς τοιαύτης ἰσώσεως· ταῦτα δ᾽ ἂν περανθείη εὐχερῶς ἄμφω τοῖς προειρημένοις τρόποις ὑπὸ τῶν ἐξησκημένων ἐν τοῖς τοιȣ́τοις καλῶς, ϗ συνορᾷν δυναμένοις, τὰ εἰς τὰς λύσεις συντείνοντα· οἷον ἐπὶ τȣ̃ ὑπ᾽ ὄψιν ὑποδείγματος· ἵνα πρὸ τῶν ἄλλων τὸ ψ, ἐκβληθῇ, δύο τȣ̃ αὐτȣ̃ σημασίαι εὑρεθήτωσαν, καίτοι ȣ̓ πάντη ἀδήλȣ ἀμέτοχοι, τῇ μεταποιήσει τῆς πρώτης ἰσώσεως εἰς τήνδε, $\chi = \alpha - \varphi$, ϗ τῆς τρίτης, εἰς τήνδε $\chi = \gamma - \psi$, ταύτας τὰς σημασίας τȣ̃ χ, εἰς μίαν συνθετέον ἴσωσιν τὴν $\alpha - \varphi = \gamma - \psi$, ἐξ ἧς ἠφάνιςαι τὸ χ· ἀλλ᾽ ἵνα ὥσπερ τὸ χ, ȣ̈τω ϗ τὸ φ, ἀφανισθῇ, ἡ ἀρτίως συςαθεῖσα ἴσωσις μεταποιηθήτω εἰς ἑτέραν ἴσωσιν τὴν $\varphi = \alpha - \gamma + \psi$, ϗ ἡ δευτέρα $\varphi + \psi = \beta$, εἰς τὴν $\varphi = \beta - \psi$, ϗ εὑρεθήσονται δύο σημασίαι τȣ̃ φ, ἐν αἷς ἐκ τῶν ἀδήλων μόνον κεῖται τὸ ψ· ὧν συντιθεμένων εἰς μίαν, πρόεισιν ἡ $\alpha - \gamma + \psi = \beta - \psi$, ἐν ᾗ μόνον τὸ ψ, τῶν ἄλλων ἀφανισθέντων εὑρίσκεται, ἢ πάρεςι· ταύτης εἰς ἑτέραν μεταποιȣμένης κατὰ τȣ̀ς τρόπȣς τῆς τετάρτης πράξεως, αὕτη παραχθήσεται $\psi = \frac{\beta - \alpha + \gamma}{2}$ ἐξ ἧς ϗ ἡ σημασία τȣ̃ ψ, φανερὰ γενήσεται· ϗ ἑπομένως ἥτε τȣ̃ φ, ϗ χ, ὅπερ διὰ τὸ συντομώτερον τὰ ςοιχεῖα παραλιπόντες, ἐν κύφραις κατὰ τὴν πέμπτην πρᾶξιν ἀποδεῖξαι πειρασόμεθα.

Κατὰ ταύτην τοίνυν ἡ προσεχῶς εὑρεθεῖσα σημασία ἀδήλου τινὸς ἀναλυθεῖσα εἰς κύφρας, ἂν τεισαχθήτω ἐν τῇ ἄλλῃ ἰσώσει ἐν ᾗ τοῦτο κεῖται, τῇ παρισώσῃ τὴν σημασίαν ἄλλου τινὸς ἀδήλου· ἵνα καὶ ἡ τούτου σημασία κατάδηλος γένηται, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· ὡς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος ἡ σημασία τοῦ ψ, εἰς κύφρας ἀναλυθεῖσα παρέχει αὐτ' αὐτῆς 36, ἐὰν οὖν ἀπὸ τῆς $\phi = \beta - \psi$, τὸ ψ, ἀπωθῇ, καὶ ἀντ' αὐτοῦ ἀντεισαχθῇ τὸ 36, ἔσαι $\phi = \beta - 36$, ἤτοι $\phi = 60 - 36$, ἢ $\phi = 24$· αὖθις ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἰσώσεως $\chi = \alpha - \phi$, ἐὰν τὸ ϕ, ἀπωθήσαντες τὸ 24, ἀντεισαγάγωμεν τὴν ἀρτίως εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ σημασίαν, ἕξομεν $\chi = \alpha - 24$, ἤτοι $\chi = 25 - 24$, ἤτοι $= 1$, ἀνακαλύψαντες τὸν τρόπον τοῦτον τὰ ἐν τῷ προβλήματι ἄδηλα· καὶ ἔσαι $\chi = 1$, $\phi = 24$, $\psi = 36$.

Πρόβλημα.

Μισθωσάμενός τις Γηπόνον ἀπέσειλεν αὐτὸν εἰς τὸν οἰκεῖον ἀγρὸν ἐργάζεσθαι, ἐπαγγειλάμενος τροφὴν παρέχειν αὐτῷ ἑκάσης ἡμέρας, καὶ μισθὸν ἐν ταῖς ἐργασίμαις τῶν ἡμερῶν τρεῖς ὀβολοὺς· ἐν δὲ ταῖς ἀργαῖς, μὴ μόνον μὴ παρέχειν αὐτῷ μισθόν· ἀλλὰ καὶ λαμβάνειν παρὰ τοῦ Γηπόνου ἑπτὰ ὀβολοὺς ἕνεκα τῆς τροφῆς· παρῆλθον μετὰ τὴν συμφωνίαν αὐτῶν ἡμέραι πεντήκοντα, καὶ λογισάμενοι πρὸς ἀλλήλους εὗρον ὅτι ȣ̓δέτερος αὐτῶν ὀφείλει τι τῷ ἑτέρῳ· ϗ ἡ μὲν συνθήκη πρόδηλος, ἀγνοεῖται δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν τε ἐργασίμων, ϗ τῶν ἀργῶν ἡμερῶν.

Εἰς εὕρεσιν τοίνυν τȣ́των κείσθω ἀντὶ τȣ̃ 50, α, ἀντὶ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τῶν ἐργασίμων χ, ϗ ἀντὶ τȣ̃ τῶν ἀργῶν φ, ϗ ἐπεὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τȣ̃ προβλήματος ὁ 50, περιέχει πάσας τὰς ἡμέρας, ἔϛαι πρώτη ἴσωσις $\chi + \varphi = \alpha$· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ἐργασίμων πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 3, ϗ ὁ τῶν ἀργῶν ἐπὶ τὸν 7, παρέχȣσιν ἴσȣς ἀριθμȣ̀ς, ὑπόκειται γὰρ μηδέτερον τῷ ἑτέρῳ ὀφείλειν, ἔϛαι δευτέρα ἴσωσις $3\chi = 7\varphi$, κατὰ τὸν τρίτον τρόπον τῆς μεθόδου· κατὰ δὲ τὸν δεύτερον, ἕξομεν τὴν πρώτην ἴσωσιν μεταπεποιημένην εἰς τήνδε $\chi = \alpha - \varphi$, ϗ ἑπομένως σημασίαν τȣ̃ χ, τὴν $\alpha - \varphi$, ἥτις ἀντεισαχθεῖσα ἐπὶ τῆς δευτέρας ἰσώσεως ἀντὶ τȣ̃ χ, παρέξει σοι ἑτέραν τὴν $3\alpha - 3\varphi = 7\varphi$· δι' ἧς κατὰ τȣ̀ς ἀνωτέρω τρόπȣς εὑρεθήσεται ἡ σημασία τȣ̃ φ, ϗ ἔϛιν αὕτη $\varphi = \frac{3\alpha}{10}$, δι' αὐτῆς δὲ καὶ ἡ τȣ̃ χ· γενέσθω δὲ διὰ τὸ συντομώτερον ἡ πέμπτη πρᾶξις ἐν κύφραις.

Ἀντεισαγομένων κυφρῶν ἀντὶ τῶν ϛοιχείων, ἀναφύεται ἀντὶ τῆς ἐσχάτης ἰσώσεως ἡ $\varphi = \frac{3 \cdot 50}{10} = 15$, τȣ́τȣ ἐπὶ τῆς $\chi = \alpha - \varphi$, μετακομιζομένȣ ἀντὶ τȣ̃ φ· ἔϛαι $\chi = \alpha - 15$, ἤτοι $\chi = 50 - 15$, ὅ ἐϛὶ $= 35$, αἱ μὲν ȣ̃ν ἐργάσιμοι τῶν ἡμερῶν εἰσὶ 35, αἱ δὲ ἀργαὶ 15.