Ἀφαίρεσις.

Δοθήτωσαν τὸ 6789''' καὶ τὸ 49''. ἀναλυθήτω πρῶτον ὁ 49, εἰς τὰ ὅμοια, εἶτα ὡς ἐλάττων ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ μείζονος κατὰ τὴν κοινὴν ἀφαίρεσιν ὡς ὁρᾶς.

Ὑπόδ: α΄.

$$\begin{array}{r} 6789''' \\ \underline{490'''} \\ 6299''' \end{array}$$

Ὑπόδ: β΄.

$$\begin{array}{rl} 6^{\circ}.\ 3'.\ 4'''. & \Lambda\ 6304''' \\ 3'.\ 2''. & \Lambda\ \underline{320'''} \\ & 5984''' \end{array}$$

Πολλαπλασίασις.

Ἔςωσαν $\frac{3}{10}$, καὶ $\frac{2}{100}$, πολλαπλασιασθησόμενα, ἔτι δὲ $\frac{4}{100}$, καὶ $\frac{6}{1000}$, πρόδηλον ἐςὶν, ὡς ἐάντις πολλαπλασιάσῃ ταῦτα κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον τῆς τῶν κλασμάτων πολλαπλασιάσεως, ἕξει τὸ $\frac{6}{1000}$, καὶ τὸ $\frac{24}{100000}$, ἐξ οὗ συνάγεται ἐξαρκεῖν τοὺς ἀριθμητὰς μόνον ἐπὶ τῶν τοιούτων πολλαπλασιάζειν, καὶ τῷ ἐξ αὐτῶν ὑποτάττειν παρωνυμοῦντα, τὸν ἐκ μονάδος καὶ τῶν ζήρων τῶν προσκειμένων τοῖς παρωνυμοῦσι τὰ κλάσματα συγκείμενον· ὃ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν μὴ ἐχόντων ζήρους, ἀλλ᾽ ἀντὶ τούτων γραμμὰς, γενήσεται κἀν τούτοις συναπτομένων τῶν Γραμμῶν. οἷον 4'''. 4'', 16''''' (6'. 3'' 18''' (24'. 3'' 72'''.

Διαίρεσις.

Διαιρεθήτω ἕκαστος χαρακτὴρ τῶν δεδομένων κλασμάτων ἐφ' ἕκαστον, καὶ τὰ ἐκ τῆς διαιρέσεως παραγόμενα, ἔσται πηλίκα, ἀφαιρουμένων μέντοι γε καὶ τῶν γραμμῶν τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τῶν τοῦ διαιρουμένου, καὶ τῶν λειπομένων ἐπιτιθεμένων αὐτοῖς, ὡς ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ὑποδείγματος.

$8'''': 2'\ 4'''$ $(16''''': 4'''$ $(34'': 2^{\circ}\ 17''$.
ἡ πρᾶξις τοῦ 8: 2, κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον.

Διαιρούμενον   Διαιροῦν
τσσ̊σσ,   τ̊σ: $\frac{\tau}{2}$°. τσσ̊σ̊σ = τσσ̊σ, εἰς ἐλαχίστους ὅρους ἀχθέν.

Ὑποσημείωσις πρώτη.

Καὶ ταῦτα μὲν οἱ πατέρες τούτων, καὶ οἱ παρηκολουθηκότες αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐκείνων μεταγενέστεροι, καὶ τὴν ἐκ τῶν γραμμῶν δυσχέρειαν καὶ σύγχυσιν ἀποποιούμενοι, τοὺς ζήρους ἀντεισήγαγον, ἐάσαντες τὸ χαρακτηρίζειν τὰ τοιαῦτα κλάσματα διὰ τῶν γραμμῶν· καὶ τοὺς μὲν ἀκεραίους τῶν ἀριθμῶν, εἰ τύχωσι προσκείμενοι τοῖς κλάσμασι, ὑποδιαστολῇ διαστέλλουσι. τὰ δὲ κλάσματα, ἀπ' ἀλλήλων τῇ προσθήκῃ τῶν ζήρων, οὓς τῶν χαρακτήρων προτάττουσι. καὶ γὰρ τὰ πρῶτα, ἔτι δὲ καὶ τὰ δεύτερα, οὐ πάντα, ἀλλὰ τὰ ἐκ δύο κυφρῶν συνιστάμενα γράφοντες, τοῖς τρίτοις, καὶ τοῖς ἐφεξῆς τούτοις τοὺς ἀνήκοντας στήρους ἑκάστοις προσγράφουσι. βούλονται γὰρ οὗτοι σημαίνειν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων διὰ τῶν ἐν αὐτοῖς κυφρῶν ἐκ πόσων στήρων πρὸς τῇ μονάδι συνίστανται οἱ παρωνυμοῦντες τὰ κλάσματα, ὃ δὴ κατὰ τοὺς ἀρχαιοτέρους ἐσήμαινον αἱ γραμμαί· οἷον κειμένων τοῦ 3, ἀριθμοῦ, καὶ 6', πρώτων, οὑτωσὶ ταῦτα γράφουσι. 3, 6. ὁ γὰρ 6, δεκάτων ὢν σημαντικὸς, καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο τὸν 10, ἔχων παρωνυμοῦντα, ἔχοντα στῆρον ἕνα πρὸς τῇ μονάδι· δύναται διὰ μιᾶς κύφρας ἐξ ἧς καὶ σημαίνεται, τοῦτον παριστᾷν· εἰ δὲ ἦν μόνον ὁ 6', δεκάτων σημαντικὸς, ἔδει πρὸ τούτου γραφῆναι στῆρον μετὰ ὑποδιαστολῆς, ἐφεξῆς δὲ τὸν 6, ἄνευ στήρου, ἵνα ᾖ τὸ ὅλον 0, 6· οὕτω ἐὰν ὦσι ὁ 3, ἀριθμὸς καὶ 12. ἑκατοστὰ, γράφοιντ' ἂν οὕτως 3, 12', ἢ ἀπόντος τοῦ 3, ὧδέ πως 0, 12, ἐκ δύο γὰρ κυφρῶν ὁ 12, συνιστάμενος δύναιντ' ἂν παριστᾷν τοὺς στήρους πρὸς τῇ μονάδι τοῦ παρωνυμοῦντος αὐτὸν, τουτέστι τοῦ 100, καὶ παρέχειν ἡμῖν εἰδέναι, ὅτι σημαίνει ἑκατοστὰ δώδεκα, ὃν τρόπον καὶ ὁ 6, πρότερον ἐσήμαινεν ἓξ δέκατα.

Ὄντων δὲ τοῦ 3 ἢ ἄλλου του, ὃν βούλει, τῶν ἀριθμῶν, καὶ 12 χιλιοστῶν, προσκείσθω στῆρος τῷ 12. κατὰ τὰ δεξιὰ, καὶ γραφήτω ὡδὶ 3, 012· ἀπόντος δὲ τοῦ 3, ὡδὶ 0, 012. οὕτω γὰρ διὰ τῶν ἐν αὐτῷ κυφρῶν τριῶν οὐσῶν παραστήσει ἂν τὸν παρωνυμοῦντα αὐτὸν 1000, τρεῖς στήρους ἔχοντα πρὸς τῇ μονάδι. Ὡσαύτως ὁ 6, καὶ 4'''', τέταρτα, εἴτουν μυριοστὰ τέσσαρα γραφήσονται 6, 0004.

Τοῦτον τὸν τρόπον εἰώθασιν οἱ μετ᾽ ἐκείνους ἐγχαράττειν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, ὑποδιαστέλλοντες τοὺς ἀκεραίους, καὶ τισὶ μὲν προτιθέντες ζήρους τοὺς ἀνήκοντας ἑκάστοις, τισὶ δὲ οὐδαμῶς.

Ὑποσημείωσις δευτέρα.

Ἐπιστάσεως δὲ ἄξιον πρῶτον, ὅτι ἐὰν τοῖς δεκαδικοῖς κλάσμασι ζῆροι ὁσοιδηποτοῦν ἐν τῷ τέλει προσεθῶσι, ἕτερα κλάσματα γενήσονται ἴσα τοῖς ἐξ ἀρχῆς. τῷ γὰρ 2, 12, δὸς εἰπεῖν προσιθιμένου ἑνὸς ζήρου γίνεται ὁ 2, 120, δύο δὲ, ὁ 2, 1200, ὧν ἑκάτερος τῷ 2, 12, ἰσοδυναμεῖ. ἐπεὶ γὰρ ἐν τοῖς τοιούτοις κλάσμασι προσήκει τὸν παρωνυμοῦντα ἔχειν πρὸς τῇ μονάδι ζήρους Ἰσαρίθμους ταῖς κύφραις τοῦ ἀριθμητοῦ, φανερὸν, ὅτι προσκειμένου τῷ 12, ζήρου ἑνὸς, καὶ τῷ παρωνυμοῦντι αὐτὸν, ἤτοι τῷ 100, εἷς ζῆρος, προσεπινοηθήσεται προσκείμενος καὶ ἀντὶ τοῦ 100, ἕξει παρωνυμοῦντα τὸν 1000. εἰδὲ δύο τῷ ἀριθμητῇ προσεθῶσι ζῆροι, καὶ τῷ παρωνυμοῦντι ὡσαύτως δύο, κἂν πλείους θατέρῳ, καὶ θατέρῳ πλείους προσκείσονται. ὅπερ ταυτὸν ἂν εἴη τῷ πολλαπλασιάζεσθαι ἀμφοτέρους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸν 10, δὸς εἰπεῖν, ἢ 100, ἢ ἕτερόν τινα τῶν δεκαδικῶν, καὶ γίνεσθαι ἕτερα κλάσματα ἴσα τοῖς ἐξ ἀρχῆς ὡς ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντα κατὰ τὴν ιζ. τοῦ ζ. τοῦ στοιχειωτοῦ.

Ὑποσημείωσις τρίτη.

Δεύτερον. Ἐν τοῖς δεκαδικοῖς κλάσμασιν, ἡ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν πρώτη κύφρα πρώτων εἴτουν δεκάτων δυνάμει ἐστὶ σημαντική, εἰ καὶ ἐνεργείᾳ ἅπασαι αἱ συνιστῶσαι αὐτὰ κύφραι, ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ δοκοῦσι βαθμοῦ· ἡ δευτέρα, ἑκατοστῶν, ἡ τρίτη, χιλιοστῶν, ἡ τετάρτη, μυριοστῶν, καὶ ἐφεξῆς ἀναλόγως. ὡς ἐπὶ τοῦ 0, 435, κλάσματος τὸ λεγόμενον γίνεται προφανές· ὅπερ ταὐτὸ ἐστὶ τῷ $\frac{435}{1000}$, τοῦτο δὲ ἴσον τῷ $\frac{400}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{5}{1000}$, τὸ γὰρ ἐξ αὐτῶν συμποσούμενον ἐκεῖνο εὑρίσκε(ι). εἴτις οὖν τὰ δύο ἐκ τούτων τῶν κλασμάτων εἰς ἐλαχίστους ἀγάγῃ ὅρους, ὄψεται τὸ μὲν πρῶτον ἀγόμενον εἰς τὸ $\frac{4}{10}$, τὸ δὲ δεύτερον εἰς τὸ $\frac{3}{100}$, καὶ ἑπομένως εἴσεται τὸν μὲν 4, σημαίνειν δέκατα, τέσσαρα, τὸν δὲ 3, ἑκατοστὰ τρία, ὁ δὲ 5, χιλιοστῶν ἐναπολειφθήσεται σημαντικός. τοῦτ' αὐτὸ καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ πρόχειρον ἐστὶν ἰδεῖν.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου δῆλον τῶν τοιούτων κλασμάτων τὰς κύφρας δεξιόθεν ἀρχομένας χωρεῖν ἐπὶ τὸ μεῖζον, ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, κατὰ τὸν τοῦ ὑποδεκαπλασίου λόγον, τοὺς δὲ ἕκαστον τούτων παρωνυμοῦντας, ἀντιστρόφως ἐκείναις ἀριστερόθεν προϊόντας προβαίνειν κατὰ τὸν αὐτὸν τοῦ ὑποδεκαπλασίου λόγον, ὡς ἐπὶ τῶν δε τῶν

$\frac{4}{10} \quad \frac{3}{100} \quad \frac{5}{1000}$

κλασμάτων, ἐν οἷς τὸ χιλιοςὸν, ὑποδεκαπλάσιον τοῦ ἑκατοςοῦ, τὸ δὲ ἑκατοςὸν τοῦ δεκάτου· ὁ δὲ 10, ὑποδεκαπλάσιος τοῦ 100, καὶ οὗτος τοῦ 1000.

Τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν μεταποιῆσαι ἴσον τῷ δοθέντι.

Δεδόσθω κλάσμα τὸ αβ, εἰς δεκαδικόν μεταποιηθησόμενον, προσκείσθω τῷ α, ἀριθμητῇ ζῆρος, καὶ ὁ γινόμενος 10, διαιρεθήτω ἐπὶ τὸν 8, παρωνυμοῦντα, καὶ τὸ πηλίκον 1, ἔςαι ἡ πρώτη κύφρα τοῦ ζητουμένου κλάσματος· τῷ δὲ ἐναπολειφθέντι 2, προσκείσθω ζῆρος, καὶ ὁ γινόμενος 20, διαιρεθήτω ἐπὶ τὸν 8, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν πηλίκον ὁ 2, δευτέρα κύφρα ἔςαι τοῦ κλάσματος· προσκειμένου δὲ ζήρου τῷ ἐναπολειφθέντι 4, καὶ συνιςαμένου τοῦ 40, διαιρεθήτω καὶ οὗτος ἐπὶ τὸν 8, καὶ ἐπεὶ παρῆκται πηλίκον ὁ 5, ἔςαι ἡ τρίτη κύφρα· τοῦτ' αὐτὸ γινέσθω ἄχρις οὗ ἐναπολείπεταί τι· εἰ δὲ μηδὲν ἐναπολειφθῇ, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος ἐπὶ τῆς διαιρέσεως τοῦ 40, ἐπὶ τὸν 8, αἱ εὑρεθεῖσαι κύφραι συςήσουσι τὸ κλάσμα, οἷον τὸ 125, καὶ τὸ 0, 125, κατὰ τὰ προειρημένα ὑποσ: πρώτη, ἴσον ἔςαι τῷ $\frac{1}{8}$. ἡ πρᾶξις αὐτόθεν ἔχει τὸ πιςόν. τὸ γὰρ 0, 125 = τῷ $\frac{125}{1000}$, αὐτὸ δὲ = τῷ $\frac{1}{8}$, ὅπερ πρόδηλον ἔςαι, εἰ γένωνται παρωνύμια.

$\frac{1}{8}\ \frac{\alpha}{\beta}$

$\frac{125}{1000}$ $\frac{1}{8}$

$\frac{1000}{8000}$ $\frac{1000}{8000}$ παρων = ἴσον
ἐκ = ἑκαςῳ.

Ἐὰν δὲ συνεχιζομένης τῆς διαιρέσεως ἀεὶ ἐναπολείπηταί τι, οὐδέποτ' ἂν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀχθείη. πλὴν ὅτι ὅσῳ συνεχίζοιτ' ἂν ἡ διαίρεσις, τοσούτῳ ἐγγύτερον ἂν εἴη τῷ δοθέντι τὸ εὑρισκόμενον δεκαδικὸν κλάσμα· οἷον δοθέντος τοῦ $\frac{2}{3}$, εὕρηται τὸ 0, 6666. συνεχιζομένης δὲ τῆς διαιρέσεως, ἕτερον εὑρεθήσεται μᾶλλον προσεγγίζον τῷ δοθέντι κλάσματι.

Ἄλλως. Σύναψις.

Ἐπείπερ αἱ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων κύφραι δεξιόθεν ἀρχόμεναι χωροῦσι πρὸς τὰ ἀριστερὰ, ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, συνάπτοιντο ἂν παραπλησίως ἐκείνοις, γραφομένων δηλονότι τῶν μὲν ἀκεραίων ὑπὸ τοὺς ἀκεραίους, τῶν δεκάτων ὑπὸ τὰ δέκατα, τῶν ἑκατοστῶν ὑπὸ τὰ ἑκατοστά. ἡνίκα δὲ τὸ ὑπὸ τῶν δεκάτων συμποσούμενον ὑπερέχει τοῦ 9, δυσὶ κύφραις συνιστάμενον, τὴν μὲν δευτέραν τούτων συναπτέον τοῖς δεκάτοις, τὴν δὲ λοιπὴν τηρητέον συναφθησομένην τοῖς ἀκεραίοις.

Ἀφαίρεσις.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἀφαιρεθεῖεν ἂν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα κατὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, γραφομένων τῶν κυφρῶν αὐτῶν καταλλήλως, ὡς ἐπὶ τῶν ὑπ' ὄψιν καθορᾶται ὑποδειγμάτων.

Ὑπόδειγμα συνάψεως.		Ἀφαιρέσεως.	
3,872,	τρίτα.	3,072	τρίτα.
0,4	πρῶτα.	1,58	δεύτερα
0,05	δεύτερα.		
4,322.		1,492.	

Πολλαπλασίασις.

Καὶ Πολλαπλασιασθεῖεν δ' ἂν, καὶ διαιρεθεῖεν τὰ αὐτὰ κατὰ τὰ αὐτά· πλὴν ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πολλαπλασιάσεως ἵνα τὸ παραγόμενον γνωσθῇ, δέον ἐκκόπτειν δεξιόθεν ἀπὸ τοῦ γενομένου ἰσαρίθμους κύφρας ταῖς κύφραις ἀμφοτέρων τῶν πολλαπλασιαζομένων κλασμάτων· ἐπὶ δὲ τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τοῦ πηλίκου κύφρας ἰσαρίθμους ταῖς, αἷς ὑπερέχει τὸν διαιρέτην ὁ διαιρούμενος, ἵνα γνῶμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον οἷον.

Ἔςω πολλαπλασιασθησόμενα τὰ 3, 42, ϗ 2, 31, δεκαδικὰ κλάσματα, ϗ ἐπεὶ γενομένης τῆς πράξεως κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον τῆς πολλαπλασιάσεως, παρῆκται ὁ α, 79002, ἀριθμὸς, ἵνα γνωσθῇ τὸ ὡς ἀληθῶς παραγόμενον, ἐκκοπήτωσαν ἀπ' αὐτοῦ κύφραι τέσσαρες, ὅσας ἔσχηκεν ἄμφω τὰ κλάσματα, ϗ τὸ 7,9002, ἔςαι τὸ ζητούμενον δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ τοῦ 7, καὶ 9002, κλάσματος. δεῖξις. Τῶν προεκτεθέντων κλασμάτων τὸ μὲν 2, 31, ἰσοδυναμεῖ τῷ 2 $\frac{31}{100}$, τὸ δὲ 3,42, τῷ 3, $\frac{42}{100}$· ἐὰν οὖν οἱ προσκείμενοι αὐτοῖς ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἰς τὰ ἴδια κλάσματα ἀχθῶσι, παρωνύμια γενήσεται. καὶ συναπτόμενα τοῖς ἐξ ἀρχῆς κλάσμασιν, ἀχθήσονται τὸ μὲν εἰς τόδε τὸ κλάσμα $\frac{235}{100}$, τὸ δὲ, εἰς τόδε $\frac{342}{100}$. ταῦτα ὡς τὰ ἁπλῶς κλάσματα πολλαπλασιασθέντα πρὸς ἄλληλα, παρέξουσι κλάσμα οὗ ἀριθμητὴς ἔσται ὁ ὑπὸ τῶν ἀριθμητῶν τῶν αὐτῶν κλασμάτων γινόμενος. παρωνυμῶν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν παρωνυμούντων· τὸ αὐτὸ δὲ γενήσεται κἂν τοὺς ἀριθμητὰς, καὶ τοὺς παρωνυμοῦντας ταῦτα κατὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν· διάτοι τοῦτο ἐν ἀρχῇ εἴρηται ὅτι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα πολλαπλασιασθεῖεν ἂν καθ᾽ ὃν τρόπον συνάπτονται καὶ ἀφαιροῦνται ἀπ᾽ ἀλλήλων· ἰσαρίθμους δὲ ζήρους κύφρας ταῖς κύφραις τῶν κλασμάτων δέον ἐκκόπτειν, ἐπεὶ ὁ παρωνυμοῦν τὸ ὑπὸ τῶν κλασμάτων γινόμενον, τοσούτους πρὸς τῇ μονάδι ἔχει ζήρους, ὅσους ἄμφω τὰ πολλαπλασιαζόμενα κλάσματα. ἵνα τοίνυν πρὸς τῷ 7, ἀριθμῷ καὶ τὸ προσκείμενον αὐτῷ κλάσμα γνωσθῇ, καὶ ἢ τὸ ὅλον 7,9002, ἐκκόπτειν καὶ τὰς κύφρας χρή· ἐπεὶ γὰρ ἅπαν δεκαδικὸν κλάσμα συνίσταται κύφραις ἰσαρίθμοις τοῖς ἐν τῷ παρωνυμοῦντι αὐτὸ ζήροις, ὁ δὲ παρωνυμῶν τοῖς τῶν κλασμάτων, ὑφ᾽ ὧν τὸ αὐτὸ κλάσμα παρῆκται, εἰκότως ἄρα, ἵνα τὸ ἐμφωλεῦον τῷ α, κλάσμα γνωσθῇ, ἐκκόπτονται ἀπ᾽ αὐτοῦ κύφραι ἰσάριθμοι ταῖς κύφραις τῶν κλασμάτων.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου δῆλον ὅτι κἂν ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ κλάσμα πρὸς ἄλληλα πολλαπλασιασθῶσι κατὰ τὸν κοινὸν τῆς πολλαπλασιάσεως τρόπον, ἐκκόπτεσθαι δεῖ ἐκ τοῦ γενομένου ὑπ' αὐτῶν κύφρας ἰσαρίθμους ταῖς τοῦ κλάσματος· οἷον τοῦ 2,01, καὶ τοῦ 12, πολλαπλασιασθέντων, παρῆκται ὁ 2412, ἐκκοπτέον οὖν δύο κύφρας, ἵνα ᾖ τὸ ζητούμενον 24, 12.

Διαίρεσις.

Ἔστω διαιρεθησόμενον τὸ 2,76, ἐπὶ τὸ 1,2. γενομένης τῆς διαιρέσεως ὡς εἴρηται, παρῆκται πηλίκον ὁ 23, καὶ ἐπεὶ ὁ διαιρέτης πλεονεκτεῖται ὑπὸ τοῦ διαιρουμένου μιᾷ κύφρᾳ, ἐκκοπήτω μία, ἵνα ᾖ τὸ ζητούμενον πηλίκον 2, 3. ὁ λόγος τῆς πράξεως τὸ πιστὸν ἔχει ἐκ τῆς πολλαπλασιάσεως. ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ πάσης ὑγιῶς ἐχούσης διαιρέσεως, τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιαζομένου, παράγεται ὁ διαιρούμενος, κἀνταῦθα τε τοῦ 2, 3, ἐπὶ τὸ 1, 2, πολλαπλασιαζομένου ὁ 2, 76, παράγεται, πρόδηλον ὅτι ὁ 2, 3, τὸ πηλίκον ἐστίν.

Ὑπόδειγμα Β'.

Ἰσαρίθμων δὲ οὐσῶν τῶν κυφρῶν τοῦ διαιρέτου ταῖς τοῦ διαιρουμένου, οὐδεμιᾶς χρεία ἐκκοπῆς·

οἷον διαιρουμένου τοῦ 11, 20, ἐπὶ τὸν 032, πηλίκον ἔσται ὁ 35. ὃς ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιαζόμενος ἀποδώσει σοι τὸν διαιρούμενον.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Πλειόνων δὲ οὐσῶν ἐν τῷ διαιρέτῃ κυφρῶν σημαντικῶν δεκαδικῶν, ἢ ἐν τῷ διαιρεθησομένῳ, προσκείσθωσαν τούτῳ ἐν τοῖς δεξιοῖς ζῆρος, ἢ ζῆροι, ἄχρις οὗ τὸ πλῆθος τῶν κυφρῶν τοῦ διαιρεθησομένου ὑπερβῇ τοῦ πλήθους τῶν τοῦ διαιρέτου, ἢ ἰσάριθμον γένηται, εἶτα γινέσθω ὡς καὶ ἀνωτέρω ἡ διαίρεσις· τοῦ γὰρ 11, 2, διαιρεθησομένου ἐπὶ τὸν 0, 32, προσκείσθω τῷ 2, ζῆρος, ἵνα γένηται τὸ 11, 20, εἶτα διαιρεθήτω, καὶ παρέξει πηλίκον τὸν 35. ὃν καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ὑποδείγματος· ἡ δὲ τοιαύτη προσθήκη οὐδόλως λυμαίνεται τὴν ἰσότητα τοῦ κλάσματος, κατὰ τὴν δευτέραν ὑποσημείωσιν.

Ἐὰν δὲ μετὰ τὴν διαίρεσιν ἐναπολειφθῇ τι, προσκείσθω τούτῳ ζῆρος, καὶ συνεχῶς ἐκτελείσθω διαίρεσις κἂν τούτοις· οἷον διαιρεθέντος τοῦ 1, 17. ἐπὶ τὸν 05, παρήχθη πηλίκον ὁ 23, ἐναπελείφθη δὲ ὁ 2, ᾧ προσκειμένου ζήρου ἀνεφύη ὁ 20, τούτου διαιρεθέντος ἐπὶ τὸν 5, ἐπεὶ οὐδὲν ἐναπελείφθη, προσετέθη τὸ πηλίκον ὁ 4, τῷ 23, καὶ ἐγένετο τὸ ὅλον πηλίκον 234· ὁ προσκείμενος μέντοι ζῆρος τῷ πηλίκῳ συνενοείσθω καὶ τῷ διαιρουμένῳ προσκείμενος, ἵνα ᾖ τῷ ὄντι διαιρούμενος ὁ 1, 170, ἐπὶ τὸν 0,5, κἀντεῦθεν ὁ διαιρούμενος οὐ μιᾷ ἀλλὰ δυσὶ δεκαδικαῖς κύφραις ὑπερέξει τῦ διαιρέτυ, ϗ ἑπομένως ἐκκόπτειν ἀπὸ τῦ πηλίκυ προσήκει, ἵνα γένηται 2, 34, κἂν ϗ μετὰ τὴν δευτέραν διαίρεσιν ἐναπολειφθῇ τι, προσκείσθω ϗ τύτῳ ζῆρος, ϗ διαιρεθήτω τὸ γινόμενον. ἀλλὰ πάντες οἱ προσκείμενοι ζῆροι συνεννοείσθωσαν, ὡσανεὶ εἶεν προσκείμενοι τῷ διαιρυμένῳ, οἷον διαιρεθέντος τῦ 3, 2, ἐπὶ τὸν 0, 25, παρῆκται πρῶτον πηλίκον, 1, ἐναπελείφθη δὲ ὁ 7, τύτυ προσλαβόντος ζῆρον ϗ διαιρεθέντος ἐπὶ τὸν 25, παρῆκται ὁ 2, δεύτερον πηλίκον. ἐναπολειφθέντος δὲ τῦ 20, ϗ ζῆρον προσλαβόντος, ϗ διαιρεθέντος ἐπὶ τὸν 25, εὕρηται τρίτον πηλίκον ὁ 8, ἐπεὶ δὲ ὐδὲν ἐναπελείφθη, ἔςαι τὸ ὅλον πηλίκον 128, ἀλλ' ἐπεὶ δύο ζῆροι συνενοῦνται τῷ διαιρυμένῳ προσκείμενοι, δυνάμει γὰρ ὁ 3, 200 διῄρηται ἐπὶ τὸν 0, 25, μιᾷ ὑπερέχων κύφρα τῦ διαιρέτυ, μία ϗ ἀπὸ τῦ πηλίκυ ἐκόπη κύφρα, καὶ ἐγένετο τὸ 12, 8, πηλίκον.

Πόρισμα.

Ἐπεὶ ἀπὸ τῦ πηλίκυ ὡς προείρηται, προσήκει ἐκκόπτειν κύφρας ἰσαρίθμυς τῇ ὑπεροχῇ, ᾗ ὑπερέχει ὁ διαιρύμενος τῦ διαιρέτυ, γινώσκομεν, ὅτι, ἐὰν κλάσμα δεκαδικὸν διαιρεθῇ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν, μηδὲν ἔχοντα δεκαδικὸν κλάσμα αὐτῷ προσκείμενον, ὀφείλομεν ἀπὸ τῦ πηλίκυ ἐκκόπτειν κύφρας ἰσαρίθμυς ταῖς τῦ διαιρυμένυ κλάσματος.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

Περὶ ἀλγγεβρικῆς Ἀναλύσεως.

Πολλαῖς μὲν ϗ ἄλλαις ἡ ἄλγγεβρα κέχρηται ταῖς μεθόδοις, εἰς ἐπίλυσιν τῶν ἐπ' αὐτῆς αἰνιγματωδῶς προβαλλομένων, ἀλλ' οὖνγε κυριωτέρα τῶν ἄλλων ϗ γενικωτέρα ἐστὶν ἡ ἀνάλυσις, μέθοδος οὖσα ἀκριβὴς καὶ ἐπιστημονικὴ τοῦ λύειν τὰ αἰνιγματώδη προβλήματα· διαιρεῖται δὲ ταῦτα κατὰ πρώτην τομὴν εἰς ἁπλᾶ καὶ σύνθετα, ἑτέρῳ δὲ λόγῳ ἐπιδιαιρεῖται εἰς ὡρισμένα ϗ ἀόριστα, περὶ ὧν ἐν μέρει ἐροῦμεν ἐν τοῖς ἑξῆς· τούτων δὲ ἕκαστον, ἤτοι λύσιμον ὑπάρχει, ἢ ἄλυτον, ἄλυτον μὲν οἷον εἴτις ζητήσειεν, ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἂν εἴη τρίτον μέρος τοῦ 6, ὁ αὐτὸς δὲ ϗ τέταρτον μέρος τοῦ 12, ὅπερ ἀδύνατον τῷ ϗ μικρὸν ἐπιστήσαντι· οὐδεὶς γὰρ ἂν εὑρεθείη τοιοῦτος ἀριθμὸς τρὶς μὲν τὸν 6, τετράκις δὲ τὸν 12, καταμετρῶν· τὸ ἀδύνατον μέντοι γε τοῦ προβλήματος, ἢ καθ' αὑτὸ ἐστὶ γνώριμον. ἢ διὰ τῆς πράξεως ἀνακαλύπτεται, συμβαίνει δὲ τοῦτο ὁπηνίκα εἰς προφανὲς ἄτοπον καταντήσωμεν, φερ' εἰπεῖν συνάγοντες τὸ ὅλον ἴσον εἶναι τῷ οἰκείῳ μέρει, ἢ τὸν $3 = $ τῷ $- 4$, ὅσα δ' αὖθις δεκτικὰ πέφυκε λύσεως, ἐν τούτοις διὰ τῆς πράξεως ἀνακύπτει ζητούμενον, ϗ τὸ λανθάνον πρότερον, ἀρίδηλον ἐσύστερον γίνεται· οἷον εἴτις ζητοίη ἀριθμὸν, ὃς προσλαβὼν ἑαυτοῦ ἔβδομα μέρη τρία, συμπληρώσει τὸν 60. εὑρεθήσεται ὁ 42, διὰ τῶν ἀναλυτικῶν πράξεων. δι ὧν λύονται καὶ τὰ λοιπὰ τῶν προβλημάτων ὅσα τυγχάνει λύσιμα.

Πρώτη Πρᾶξις ἀναλυτικὴ, ἧς ἔργον ἡ ἔρευνα καὶ γνῶσις τῶν τοῦ προβλήματος ὑποθέσεων.

Ἐπὶ παντὸς προβλήματος, ἐπεὶ τὰ μὲν εἰσὶ πρόδηλα καὶ σαφῆ, ὅσα δηλαδὴ ὑπὸ τοῦ προτείνοντος τὸ πρόβλημα δίδοται· τὰ δὲ ἄδηλα καὶ ἀσαφῆ, ἃ δὴ καὶ ζητεῖται· καὶ πρόκειται τῷ μέλλοντι τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐπαγαγεῖν, διὰ τῶν σαφῶν ἀνακαλύψαι τὰ λανθάνοντα καὶ ἄδηλα· τοῦτο δ᾽οὐκ ἂν γένοιτο, εἰμήτις σχέσις εἴη καὶ κοινωνία τούτων κἀκείνων πρὸς ἄλληλα, δέον πρὸ πάντων τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις σκοπεῖν· τούτων γὰρ ἐγνωσμένων, καὶ αἱ ἐμπεριεχόμεναι ταύταις ἰσώσεις γνωσθήσονται, ἀεὶ ταῖς σχέσεσιν οὖσαι ἰσάριθμοι· καὶ τὸ τυχὸν πρόβλημα εὐχερῶς λυθήσεται· ἀνάγκη μέντοι ὑπό τε τοῦ προτείνοντος, ὑπό τε τοῦ τὴν λύσιν ἐπάγοντος, τὰς σχέσεις προϋποτίθεσθαι· ἀνθ᾽ ὅτου καὶ ὑ π ο θ έ σ ε ι ς τοῦ προβλήματος ἤκουσαν· οἷον ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, δέδοται μὲν ὁ 60, ζητεῖται δὲ ἕτερος ἀριθμὸς, ὃς προσλαβὼν τρία ἑαυτοῦ μέρη ἕβδομα ἴσος γενήσεται τῷ 60, τοῦτο δὴ, τὸ προσλαβεῖν τὰ τοιάδε μέρη, καὶ ἐξισωθῆναι τῷ 60, ὑπόθεσις. ἐὰν δὲ δοθῇ ὅ,τε 10, καὶ ὁ δύο ἀριθμὸς, καὶ ζητηθῶσιν ἕτεροι δύο ἀριθμοὶ, ὧν τὸ μὲν ἐξ αὐτῶν συμποσȣμένον ἐςὶν ὁ 10, ἀριθμὸς, ἡ δὲ διαφορα τῶν αὐτῶν ὁ 2, δύο εἰσὶν ἐνταῦθα αἱ ὑποθέσεις, καθ' ἃς, ϗ τὰς Ἰσώσεις εὑρήσομεν.

Πρᾶξις δευτέρα, δι' ἧς κατὰ συνθήκην προσοικειȣ̃νται τὰ ςοιχεῖα, τοῖς κειμένοις ἐν τῷ προβλήματι προδήλοις τε, ϗ ἀδήλοις.

Τῇ ἐρεύνῃ τῶν ὑποθέσεων ἕπεται ἡ τῶν ςοιχείων προσοικείωσις τοῖς κειμένοις ἐπὶ τȣ̃ προβλήματος προδήλοις τε ϗ ἀδήλοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν προδήλοις προσοικειȣ̃ται τὰ ἀρκτικά, οἷον τὸ α, β, γ, τοῖς δὲ ἀδήλοις τὰ ἔχατα τῶν ςοχείων φ, χ, ψ. ὅτι εὐχερέςερον διὰ τῶν ςοιχείων, ἢ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων αἱ πράξεις περαίνονται· ϗ γράφειν δὲ προσήκει ταῦτα ἐν μέρει. ἵνα ὑπ' ὄψιν τε ᾖ, καὶ μὴ ῥαδίως διεκπίπτῃ τῆς μνήμης. ὡς ἐπὶ τȣ̃δε

15	=	α,
56	=	β.
ὁ εἷς τῶν ζητ.	=	χ.
ὁ ἕτερος.	=	φ.

τȣ̃ προβλήματος, εὑρεῖν δύο ἀριθμȣ̀ς, ὥςε τὸ μὲν ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴσον τῷ 15, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν = τῷ 56, προσωκείωται τῷ μὲν 15, τὸ α, τῷ δὲ 56, τὸ β, ὡς προδήλοις· τῷ ἑνὶ τῶν ἀδήλων ϗ ζητȣμένων ἀριθμῶν τὸ χ, τῷ ἑτέρῳ τὸ φ.

Ἔσθ' ὅτε μέν τοι ἐξ αὐτῶν τῶν τȣ͂ προβλήματος ὑποθέσεων καταμανθάνομεν, ὡς ϗ τοι διαφόρων ὄντων τῶν κειμένων ἐν τῷ προβλήματι, εἴτε τῶν προδήλων, εἴτε τῶν ἀδήλων, ȣ̓κ ἐπάναγκες διάφορα ϗ ςοιχεῖα τȣ́τοις προσοικειȣ͂ν. ἄλις γὰρ ἐχόντων ἐλαττόνων ςοιχείων εἰς ἔνδειξιν πλειόνων τῶν ἐν τῷ προβλήματι κειμένων, περιττὸν ἐςὶ διαφόροις χρῆσθαι ςοιχείοις, ἄλλως τε ϗ ῥᾳοτέραν χωρηγȣ́ντων ἡμῖν τὴν λύσιν τȣ͂ προβλήματος. συμβαίνει δὲ τȣ͂το τριχῶς· Πρῶτον. ἐὰν ὦσι ἔντινι τῶν προβλημάτων δύο τινὰ ἄδηλα, δοθῇ δὲ θάτερον θατέρȣ διπλάσιον, ϗ τῷ διπλασίῳ προσωκείωται τὸ χ, ȣ̓δὲ μία ἀνάγκη τῷ ὑποδιπλασίῳ προσοικειῶσαι τὸ φ. ἄλις γὰρ ἔχει εἰς ἔνδειξιν τȣ́τȣ τὸ $\frac{\chi}{2}$. εἰδὲ τὸ χ, προσωκείωται τῷ ὑποδιπλασίῳ, τὸ 2χ, ἐνδείξεται τὸ διπλάσιον. Δεύτερον, ἐγνωσμένης τῆς διαφορᾶς δύο ἀδήλων, τῷ δὲ μείζονι τȣ́τῳ προσωκείωται τὸ χ, ἔξεςι τῷ ἐλάττονι προσοικειῶσαι τὸ χ—δ, εἰδὲ τȣ̓μπαλιν τῷ ἐλάττονι, τὸ χ, τῷ μείζονι πάντως τὸ χ+δ, φανερὸν γὰρ ὅτι δύο ἐκκειμένων ἀνίσων, ϗ τῆς τȣ́των διαφορᾶς τὸ μὲν μεῖζον γίνεσθαι ἴσον τῷ ἐλάττονι, προσκειμένης τȣ́τῳ τῆς διαφορᾶς, τὸ δὲ ἔλαττον ἴσον τῷ μείζονι, ἀφαιρȣμένης ἀπὸ τȣ͂ μείζονος τῆς αὐτῆς διαφορᾶς. οἷον συμβαίνει ἐπὶ τȣ͂ 6, ϗ 4. ὧν ἡ διαφορὰ 2. ὁ 4=6—2, ὁ 6=4+2.

Τρίτον. Πρὸς τῇ διαφορᾷ δὲ γνωσθέντος καὶ τοῦ συμποσουμένου ἐκ δύο ἀνίσων, ᾧ προσοικειωτέον τὸ σ, κατὰ τὰ ἐν ἀρχῇ εἰρημένα, ἐπεὶ ὡς ἐν τοῖς εἰσέπειτα δειχθήσεται, τὸ μεῖζον τούτων εἶναι ἴσον τῷ ἡμίσει τοῦ συμποσουμένου προσκειμένης αὐτῷ τῆς ἡμιδιαφορᾶς $\frac{\sigma+\delta}{2}$, τὸ δὲ ἔλαττον τῷ αὐτῷ ἡμίσει ἀφαιρουμένης τῆς ἡμιδιαφορᾶς $= \frac{\sigma-\delta}{2}$, εἰσόμεθα ἐκ τούτου, ὅτι τῶν ἀνίσων τούτων, καὶ μόνου τοῦ συμποσουμένου γνωσθέντος, ἔξεστι τὴν ποικιλίαν τῶν στοιχείων διαδιδράσκουσιν, οὐ διάφορα στοιχεῖα τούτοις προσοικειῶσαι, ἀπόχρη γὰρ τῇ ἡμιδιαφορᾷ καίτοι ἀδήλῳ οὔσῃ. προσοικειοῦν φέρ' εἰπεῖν τὸ χ, καὶ τοῦ μὲν μείζονος ἐνδεικτικὸν ἔσται τὸ $\frac{\sigma+\chi}{2}$, τοῦ δ' αὖ ἐλάττονος τὸ $\frac{\sigma+\chi}{2}$ $\frac{\sigma-\chi}{2}$.

Ὑποδείγματα τῶν Προεκτεθεισῶν ἀναλυτικῶν Πράξεων.

Ὑπόδειγμα. Α΄.

Ἄνδρες τρεῖς ὀβολῶν ἑκατοντάδας ἔλαβον ὀκτώ·
οὐχὶ δ' ἴσαις ταύτας νείμαντο ἐνὶ σφίσι μοίραις
τοῦ πρώτου πλεῖον δύο πεντηκοντάδας ἔσχε
Δεύτερος. ὁ τρίτατος δ' ὅσα ἄμφω ἔλαβον οὗτοι,
εἰπὲ, ἕκαστος, τῶν ὀβολῶν, ὁπόσην λάχε μοῖραν.

Ἐν τούτῳ τῷ προβλήματι δύο εἰσὶ πρόδηλα, αἱ ὀκτὼ ἑκατοντάδες, καὶ αἱ δύο πεντηκοντάδες, ἴσον δ' εἰπεῖν ὁ 800, καὶ 100, τρία δὲ ἄδηλα, ἤτοι ἡ ἑκάστου μοῖρα τῶν τριῶν ἀνδρῶν· προσοικειωθήτω τοίνυν τὰ κατάλληλα στοιχεῖα τούτοις, ἀμέλειτοι $800 = \alpha$, $100 = \beta$. τῆς δὲ μοίρας τοῦ πρώτου ληφθήτω ἐμφαντικὸν τὸ χ, καὶ ἑπομένως ἔσαι τῆς μὲν τοῦ δευτέρου τὸ $\chi + \beta$, τοῦ δὲ τρίτου τὸ $\chi + \chi + \beta$, ἢ τὸ $2\chi + \beta$, συντομίας χάριν.

Ὑπόδειγμα Β'.

Εἰπὲ Πάτερ, σὺ πόσους, παῖς ἐνδὲ πόσους ἐνιαυτοὺς
ἔπλησεν βιοτῆς; τριάκοντα ἐγὼ πλέον ἔσχον
τοῦ μοῦ παιδός· ἀλλ' ἡμετέροις ἐτέεσσι
ἥμισυ τούτων προσθεὶς, τῶν κείνου δὲ τέταρτον,
ὀκτὼ εὑρήσεις δεκάδας πάντως ἐνιαυτῶν.

Ἐπὶ τοῦδε τοῦ προβλήματος προσοικειώσαντας τῷ 80, τὸ α, ἐπεὶ ὁ 30, διαφορὰ ἐςὶ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρὸς πρὸς τὴν τοῦ παιδὸς, προσῳκειωτέον κατὰ τὰ εἰρημένα οὐ τὸ β, ἀλλὰ τὸ δ τῇ δὲ ἡλικίᾳ τοῦ πατρὸς τὸ χ, οὗ τεθέντος ἔσαι ἀντὶ τῆς ἡλικίας τοῦ παιδὸς τὸ $\chi - \delta$. καὶ τούτου ἀντὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς πατρικῆς τὸ $\frac{\chi}{2}$, καὶ ἀντὶ τοῦ τετάρτου τῆς ἡλικίας τοῦ παιδὸς τὸ $\frac{\chi - \delta}{4}$.

Ὑπόδειγμα Γ'.

Ποιμένα τις προβάτων τῆς ποίμνης ἤρετο πληθὺν,
καὶ ὅς, δός μοι ἔφη προθύμως τόσα, ὅσσα κε βόσκω,

ἥμισυ δὲ πρόσθες τȣ́των τέταρτον δ' ἔτι ϗ ἕν.
ἤδ' ἔσομαι βόσκων ὄϊας τȣ̀ς πάντας ἑκατόν.

Κἀνταῦθα ληφθέντος τȣ̃ α, ἀντὶ τȣ̃ 100, τȣ̃ χ, ἀντὶ τῆς πληθύος τῶν προβάτων, ἔςαι ἀντὶ τȣ̃ ἡμίσεως ταύτης τὸ $\frac{x}{2}$, ἀντὶ δὲ τȣ̃ τετάρτȣ τὸ $\frac{x}{4}$.

Ἐπὶ τȣ́των τῶν τριῶν ὑποδειγμάτων γυμνάσομεν τὸν λόγον, ϗ κατὰ τὰς λοιπὰς πράξεις τῆς ἀναλύσεως.

Πρᾶξις Γ'. καθ' ἣν αἱ Ἰσώσεις εὑρίσκονται.

Ἐγνωσμένων τῶν τȣ̃ προβλήματος ὑποθέσεων, ϗ τοῖς ἐν αὐτῷ κειμένοις προσηρμοσμένων καταλλήλως τῶν ςοιχείων, θηρατέον ἐχομένως τὰς ἐμπεριεχομένας ταῖς ὑποθέσεσιν ἰσώσεις, ἵνα διὰ τῆς εὑρέσεως τȣ́των, τίνα τε τίσι ἴσα εἰσὶ διορίσαι γνῶμεν, ϗ τῇ παρενθήκῃ τȣ̃δε = τȣ̃ συμβόλȣ παραςήσωμεν.

Ἐπίπονος μέντοι ἐςὶ λίαν ἡ τῆς ἰσώσεως εὕρεσις καὶ ȣ̓ παντός· ἐν ταύτῃ γὰρ ὡς ἔντινι λυδίᾳ λίθῳ τὸ ὀξὺ τῆς διανοίας διαλάμπει τȣ̃ ἀναλύοντος· πρὸς δὲ ϗ πολλῆς δεῖται γυμνασίας ϗ ἐξασκήσεως. διὸ ἐπαναληπτέον τὰ προεκτεθέντα ὑποδείγματα εἰς εὕρεσιν τῶν ἐν αὐτοῖς ἰσώσεων.

Ἐπὶ τοῦ πρώτου τοίνυν ληφθέντος τοῦ χ, ἐμφαντικοῦ τῆς μοίρας τοῦ πρώτου, συνῆκται ἑπομένως τὸ $\chi+\beta$ εἶναι τῆς τοῦ δευτέρου, ϗ τὸ $2\chi+\beta$, τῆς τοῦ τρίτου· κατὰ δὲ τὴν ἐν τῷ προβλήματι ὑπόθεσιν αἱ τῶν τριῶν μοῖραι ὑπετέθησαν ἴσαι τοῖς 800, ὀβολοῖς ἤτουν τῷ α, τοιάδε τις ἄρα ἴσωσις ἐν τούτοις περιέχεται $\chi+\chi+\beta+2\chi+\beta=\alpha$, ἤτουν $4\chi+2\beta=\alpha$.

Ἐπὶ τοῦ δευτέρου, ἐπεὶ τὸ χ, εἴληπται ἀντὶ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρὸς, ϗ τὸ $\frac{\chi}{2}$, εἴληπται ἀντὶ τοῦ ἡμίσεως ταύτης· ἀντὶ δὲ τῆς τοῦ παιδὸς, τὸ $\chi-\delta$, ϗ ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{\chi-\delta}{4}$. ὑποτεθέντος δὲ ἐν αὐτῷ τὴν τοῦ πατρὸς ἡλικίαν προσλαβοῦσαν τὸ ἑαυτῆς ἥμισυ, ϗ τὸ τέταρτον τῆς τοῦ υἱοῦ, συμπληροῦν τὸν 80, ᾧ προσήρμοσαι τὸ α, τοιαύτη ἴσωσις συσταθήσεται· $\chi+\frac{\chi}{2}+\frac{\chi-\delta}{4}=\alpha$.

Τελευταῖον ἐπὶ τοῦ τρίτου ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι διπλασιασθεῖσα ἡ ποίμνη, προσλαβοῦσα δὲ τό,τε ἑαυτῆς ἥμισυ ϗ τὸ $\frac{1}{4}$, ϗ ἓν, συμπληρώσει τὸν 100, ἀντὶ τούτου δὲ κεῖται τὸ α, ἔσται $2\chi+\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{4}+1=\alpha$.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι ἑνὸς ὄντος τοῦ στοιχείου τοῦ προσαρμοττομένου τοῖς ἐν τῷ προβλήματι ἀδήλοις μία καὶ ἡ ἴσωσις εὑρεθήσεται ὡς ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω. ἐπεὶ τοῖς ἐν ἑκάστῳ τούτων ἀδήλοις προσήρμοσαι τὸ χ, μία ἴσωσις καθ' ἕκαστον εὕρηται· πληρέστερον δὲ τοῦτο γνωσθήσεται ἐν τοῖς ἑξῆς, ἔνθα πλειόνων ὄντων τῶν στοιχείων, καὶ διαφόρων, πλείους καὶ αἱ ἰσώσεις ἔσονται· ἀλλὰ πρὶν ἅψασθαι τῆς τετάρτης Πράξεως, προεκθετέα τὰ ἐφεξῆς ἀξιώματα, καί τινα λημμάτια εἰς ἐμπέδωσιν ταύτης συμβάλλοντα.

Ἀξίωμα.

Ἐὰν ἴσοις ἴσα, ἢ τὸ αὐτὸ προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. οἷον ἴσου ὄντος τοῦ $\alpha+\beta=\gamma+\varepsilon$, εἴτις ἑκατέρῳ τούτων προστεθείη τὸ η. ἔσται τὸ $\alpha+\beta+\eta=$ τῷ $\gamma+\varepsilon+\eta$.

Ἀξίωμα.

Ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων ἴσα, ἢ τὸ αὐτὸ ἀφαιρεθῇ, τὰ ἐγκαταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα· οἷον ἀπὸ τῶν $\alpha+\beta=\gamma\varepsilon$, τοῦ η ἀφαιρεθέντος, ἔσται τὸ $\alpha+\beta-\eta=$ τῷ $\gamma-\varepsilon-\eta$.

Λῆμμα πρῶτον.

Ἡ μετάθεσις τῶν ὅρων μετὰ τοῦ ἀντικειμένου συμβόλου ἀπὸ θατέρου τῶν μερῶν τῆς ἰσώσεως ἐπὶ θάτερον, οὐδόλως λυμαίνεται τὴν ἰσότητα. φέρ' εἰπεῖν ἐπὶ ταύτης τῆς ἰσώσεως $\alpha+\beta=\gamma-\varepsilon$. ἔξεσι μεταθεῖναι τὸ ε, μετὰ τοῦ $\alpha+\beta+\varepsilon=$ τῷ γ. ὁμοίως μεταθέσθαι τὸ β, καὶ τὸ $\alpha+\varepsilon$ εἶναι $=$ τῷ $\gamma+\beta$.

Δεῖξις. ὁ μετατιθέμενος ὅρος, ἢ τὸ τοῦ πλεονασμοῦ σύμβολον ἔχει αὐτῷ προσκείμενον, ἢ τὸ τῆς ἐλλείψεως· εἰ μὲν εἴη τὸ πρῶτον, οὐδὲν ἕτερον ποιεῖ ἡ τοιαύτη μετάθεσις, ἢ ἀφ᾽ ἑκατέρου τῶν μερῶν τῆς ἰσώσεως, τὴν τοῦ μεταθιμένου ὅρου ἀφαίρεσιν· ἐπὶ γὰρ τῆς ἰσώσεως ταύτης $\alpha+\beta=\gamma$, ἐὰν τὸ β, μετατεθῇ εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἰσώσεως μετὰ τοῦ $-$, ἔσαι ἀφαιρεθὲν ἑκατέρωθεν· καὶ ὅτι μὲν ἀπὸ τοῦ α, πρόδηλον, ὅτι δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ γ, φανερόν. τὸ γὰρ προσθεῖναι τὸ β, μετὰ τοῦ τῆς ἐλλείψεως συμβόλου τῷ γ, ἀφελεῖν ἐσὶν ἐκεῖνο ἀπὸ τούτου· ἀλλὰ τούτου γινομένου τὰ τῆς ἰσώσεως μέρη διαμένει ἴσα κατὰ τὸ ὕσερον ἀξίωμα. ἄρα ἡ μετάθεσις τῶν ὅρων καὶ τὰ ἑξῆς· σαφέσερον δὲ τοῦτο γενήσεται διὰ τῶν κυφρῶν· εἰ γὰρ ὁ $6+4=$ τῷ 10, καὶ ὁ $6=$ τῷ $10-4$. Εἰ δὲ τὸ δεύτερον, προσθήκην ἐφ᾽ ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τῆς ἰσώσεως ἀπεργάζεται ἡ τοῦ ὅρου μετάθεσις. ἔσω γὰρ αὕτη, $\alpha=\gamma-\beta$. ἐναλλατομένου τοίνυν τοῦ πρὸς τῷ β, συμβόλου καὶ τοῦ $+\beta$, εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἰσώσεως μεταθεμένου, προσθήκη τῷ τε α, καὶ τῷ γ, συμβήσεται, τῷ μὲν α, ἐνεργείᾳ, τῷ δὲ γ, δυνάμει, εἴγε ἡ τῆς ἐλλείψεως ἀφαίρεσις προσθήκην ἐργάζεται, καὶ κατὰ τὸ πρότερον ἀξίωμα ἴσα τὰ μέρη ἔσονται. εἰ δὲ τοῦτο, κἀνταῦθα ἡ μετάθεσις οὐλυμαίνεται τὴν ἰσότητα. εἰ γὰρ $6 = 10 - 4$, ἔσται καὶ $6 + 4 = 10$, ὅ, ἔ, δ: —

Πόρισμα πρῶτον.

Ἐκ τούτων δῆλον πρῶτον ὅτι ἅπασα ἴσωσις ἐξίτηλος γενήσεται, καὶ τὸ μηθὲν χωρήσει τῇ μεταποιήσει τῶν συμβόλων, καὶ τῇ μεταθέσει πάντων τῶν ὅρων τοῦ ἑνὸς μέρους τῆς ἰσώσεως. Εἰ γὰρ ἐστὶ $\alpha+\beta=\gamma-\varepsilon$, ἔσται $\alpha+\beta-\gamma+\varepsilon=0$. ἤτοι $10+3 = 16-3$, $10+3 - 16+3=0$. —

Πόρισμα δεύτερον.

Δεύτερον. Ἐὰν οἱ ὅροι κατὰ χώραν μένωσι ἀμφοτέρων τῶν μερῶν τῆς ἰσώσεως, μόνα δὲ τὰ σύμβολα ἐναλλαγῶσι μηδενὸς παρεωραμένου, ἡ ἴσωσις παρὰ τοῦτο οὐ λυμανεῖται, μάλιστα μᾶλλον δὲ ὁ τρόπος οὗτος εὐχέρειαν παρέχεται ἐν ταῖς πράξεσιν, ἄνευ τῆς συνεχοῦς μεταθέσεως τῶν ὅρων μεταβαίνων ἀπό τινος ἰσώσεως ἐφ' ἑτέραν ἴσωσιν· καὶ τὸ αὐτὸ παρέχων, ὅπερ καὶ ἡ ἀμοιβαία τῶν ὅρων μετάθεσις. πρῶτον. εἰ γὰρ τὸ $6+4 =$ τῷ $12-2$, καὶ τὸ $-6 -4 =$ ἔσται τῷ $- 12 + 2$, ὅπερ ἂν γένοιτο κἂν ἑκατέρου μέρους τῆς πρώτης ἰσώσεως οἵ,τε ὅροι ἀμοιβαδὸν ἀπὸ θατέρου μέρους εἰς θάτερον μετατεθῶσι, τά τε σύμβολα μετατεθῶσι μηδενὸς παρεωραμένου, ὡς διὰ τῆς πείρας τῷ βουλομένῳ γίνεται φανερόν· εἰδὲ ἡ τῶν ὅρων μετάθεσις οὐ λυμαίνεται τὴν ἰσότητα, οὐδὲ ὁ τρόπος οὗτος αὐτὴν λυμαίνεται, ἀπεργαζόμενος, ὅπερ καὶ ἡ μετάθεσις· ἐὰν δὲ παροφθῇ τι τῶν συμβόλων, καὶ μὴ γένηται κατὰ πάντα εἰς τοὐναντίον ἐναλλαγὴ, οὐ τηρηθήσεται πάντως ἡ ἰσότης· οὐ γὰρ εἴ τὸ $4-2=$ ἐστὶ τῷ $5-3$, ἔσται καὶ τὸ $4+2=$ τῷ $-5+3$, ἀλλὰ τὸ $-4+2$ $=$ τῷ $-5+3$· ὅθεν καὶ τριῶν τούτων ἰσώσεων ἡ πρώτη ἀναχθείη ἂν εἰς τὴν τρίτην τῇ μεταθέσει τῶν ὅρων, καὶ τῇ ἐναλλαγῇ τῶν συμβόλων· οὐκέτι δὲ καὶ εἰς τὴν δευτέραν ὡς δοκοῦσαν μὲν, ἐλεγχομένην δὲ διὰ τῆς πείρας, μὴ εἶναι ἀληθῆ.

Πόρισμα τρίτον.

Τρίτον. Ὁ ἐν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν, μετὰ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου κείμενος ὅρος, ἑκατέρωθεν ἀπαλειφόμενος οὐ παραβλάπτει τῶν μερῶν τὴν ἰσότητα· Εἰ γὰρ ἐστὶ τὸ $6+2+4=10+2$, ἀπαλειφομένου ἑκατέρωθεν τοῦ $+2$, ἔσται τὸ $6+4=10$. καὶ γὰρ οὗτος ὁ ὅρος ἢ τὸ τοῦ πλεονασμοῦ σύμβολον, ἢ τὸ τῆς ἐλλείψεως ἔχει προσκείμενον. εἰ μὲν τὸ πρῶτον, ἀπαλειφόμενος ἀφαιρεῖται ἑκατέρωθεν, εἰδὲ τὸ δεύτερον, προστίθεται ἑκατέρῳ τῶν μερῶν.

Ἀξίωμα.

Ἐὰν ἴσα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἢ ἐπὶ ἴσα πολλαπλασιασθῇ, ἡ διαιρεθῇ, τὰ ἐξ αὐτῶν γινόμενα, καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν παραγόμενα ἴσα ἔσαι· εἰ γὰρ ἐσὶ τὸ $\alpha =$ τῷ β. ἔσαι πάντως τό,τε $2\alpha =$ τῷ 2β, τό,τε $\frac{\alpha}{2} =$ τῷ $\frac{\beta}{2}$.

Λῆμμα δεύτερον.

Ε'ὰν εἷς, ἢ πλείες τῶν ὅρων ἐπὶ τινος ἰσώσεως τὸν αὐτὸν ἔχωσι διαιρέτην, εἴτε ἐν θατέρῳ, εἴτε ἐν ἑκατέρῳ μέρει κείμενοι, ἔξεσιν ἡμῖν διασώζειν τὴν ἰσότητα ἀπαλείφεσι μὲν τὸν διαιρέτην, πολλαπλασιάζεσι δὲ τὲς λοιπὲς ὅρες ἐπ᾽ αὐτόν. Εἰ γὰρ εἴη $\alpha + \frac{\beta}{2} = \gamma$ ἔσαι καὶ $2\alpha + \beta = 2\gamma$, καὶ αὖθις. εἴπερ εἴη $\frac{\alpha}{\gamma} + \beta = \vartheta - \frac{\eta}{\gamma}$ ἔσαι $\alpha + \beta\gamma$, $= \vartheta\gamma - \eta$.

Δεῖξις. Ε'πὶ παντὸς κλάσματος τῇ ἀπαλείψει τε παρωνκλάσματος ἀκεραιεται τὸ κλάσμα, ὅπερ ἂν γένοιτο, καὶ εἴγε τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸν παρωνυμεντα ἤτεν τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθῇ· οἷον τὸ $\frac{\alpha}{2}$, κλάσμα ἐπὶ τὸν 2, πολλαπλασιασθὲν δώσει τὸ $\frac{2\alpha}{2}$, ταὐτὸ δ᾽ ἐσὶν εἰπεῖν τὸ α. ὥσε ἐὰν καὶ οἱ λοιποὶ πάντες ὅροι ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν 2, πολλαπλασιασθῶσιν, ἔσαι πάντα ἐπὶ τὸ αὐτὸ πολλαπλασιασθέντα, καὶ ἑπομένως διασώζοντα τὴν ἰσότητα τα μέρη κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα.