Πόρισμα.

Ἐκτύτυ δῆλον, ὅτι εἴγε ὁ ἀριθμητὴς ϗ ὁ παρωνυμῶν τῦ δοθέντος κλάσματος ἐλάχισοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, ὐκ ἂν ἀχθείη τὸ κλάσμα εἰς ἐλαχίςυς ὅρυς. τίνες δὲ οἱ τοιῦτοι, συνάγεται ἐκ τῆς λε΄ τῦ ἑβδόμυ, ϗ ἁπλῶς εἰπεῖν πάντες οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλυς ἀριθμοὶ, ϗ ἐλάχισοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· κατὰ τὴν εἰκοςὴν τρίτην τῦ αὐτῦ.

Ἄλλως.

Δοθήτω αὖθις τὸ εη, κλάσμα, ὅπερ, ἵνα εἰς ἐλαχίσους ὅρυς ἀχθῇ, εὑρεθήτω τὸ μέγισον κοινὸν μέτρον τῶν εη. εὑρίσκεται δὲ, ἐὰν διελόντες τὸν μείζονα, οἷος ἐπὶ τῦ παρόντος κεῖται ὁ η, ἐπὶ τὸν ἐλάττονα ε, ϗ μηδένα λόγον τῦ πηλίκυ ποιύμενοι, συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν ἄχρις ὗ μηδὲν ἐναπολειφθῇ. κατὰ τὴν γ΄. τῦ ζ. τυτέςι τὸν μὲν διαιρέτην διαιρῦντες ἐπὶ τὸ ἐναπολειφθὲν διὰ τῆς α΄. διαιρέσεως, τῦτο δὲ ἐπὶ τὸ ἐναπολειφθὲν διὰ τῆς δευτέρας, καὶ τῦτο ἐπὶ τὸ ἐναπολειφθὲν διὰ τῆς τρίτης, ϗ ὕτως ἐφεξῆς· τὸ γὰρ ἐσχάτως ἐναπολειφθὲν τὸ κοινὸν ϗ μέγισον αὐτῶν ἔσαι μέτρον.

$\frac{1\,3\,0}{2\,8\,0}\,{}^{\varepsilon}_{\eta}$

${}^{\varepsilon}_{\eta}\,\frac{1\,3\,0}{2\,8\,0}$ ὁ μείζων

130 ὁ ἐλαττων

20 τὸ α΄. λειπόμενον.

10 τὸ β΄.

0 τὸ γ΄.

ὁ 10 ἄρα τὸ κοινὸν ϗ μέγισον μέτρον.

Δεῖξις. Ἐπείπερ τὸ ἐσχάτως ἐναπολειφθὲν ὁ 10, ὡς ἐπὶ τῆς ἡμετέρας καθορᾶται πράξεως, μετρεῖ τὸ διὰ τῆς πρώτης διαιρέσεως ἐναπολειφθὲν τὸν 20, ȣ̓͂τος δὲ, εἰ καὶ ȣ̓ μετρεῖ ὅλον τὸν ε, ἐπεὶ μετρεῖ τὸν διʼ ἀφαιρέσεως τȣ̃ 10, ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ ε, λειπόμενον ἤτοι τὸν 120. καὶ ὁ 10, ἄρα μετρήσει τὸν 120, μετρεῖ δὲ ϗ ἑαυτὸν ὁ 10, ἄρα μετρήσει καὶ ὅλον τὸν ἐκ τȣ̃ 120, καὶ 10, συγκείμενον λέγω τὸν ε. αὖθις ἐπεὶ ὁ 10, μετρεῖ τὸν ε, ὁ δὲ ε, μετρεῖ τὸν διʼ ἀφαιρέσεως τȣ̃ 20. ἀπὸ τȣ̃ η, μείζονος λειπόμενον, οἷος ἐνταῦθα ὁ 260, καὶ ὁ 10, ἄρα μετρήσει αὐτὸν, μετρεῖ δὲ ϗ τὸν 20, μετρήσει τοίνυν ϗ ὅλον τὸν η, τὸν συγκείμενον ἐκ τȣ̃ 260, ϗ 20. ταῦτ᾽ ἄρα ὁ 10 τὸ ἐσχάτως ἐναπολειφθὲν, κοινὸν ἔςαι μέτρον τῶν ε, η, δοθέντων ἀριθμῶν. λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιςον. εἰ γὰρ μὴ, ἔςω ἕτερός τις ἀριθμὸς μείζων τȣ̃ 10, δὸς εἰπεῖν ὁ 12, μέγιςον κοινὸν μέτρον τȣ́των τῶν ἀριθμῶν· καὶ ἐπεὶ ὁ 12, κοινὸν μέτρον ὑπετέθη τῶν ε, η, φανερὸν ἐκ τῶν εἰρημένων, ὅτι μετρῶν τȣ̀ς ε, η, ἀριθμȣ̀ς, μετρήσει ϗ τὰ λειπόμενα ἐπὶ τῆς διαιρέσεως ἑκατέρȣ τȣ́των. ταῦτα δὲ ὁ 20, εἰσὶ καὶ ὁ 10, ὁ 12, ἄρα μείζων μετρήσει τὸν ἐλάττονα 10, ὅπερ ἀδύνατον.

Τȣ̃ μεγίςȣ τοίνυν ϗ κοινȣ̃ μέτρȣ εὑρεθέντος, ȣ̓ χαλεπὸν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς ἐλαχίςȣς ὅρους ἀγαγεῖν. ἐπὶ τȣ̃ προεκτεθέντος γὰρ ὑποδείγματος διαιρȣμένȣ τȣ̃ τε ε, ϗ η, ἐπὶ τὸν 10, ϗ ἐκ τῶν παραγομένων πηλίκων τȣ̃ 13, καὶ 28, συνιςαμένȣ τȣ̃ $\frac{13}{28}$, κλάσματος, ἕξομεν τȣ̃το ἴσον τῷ ε/η, ἐν ἐλαχίστοις ὅροις· ὅτι γὰρ οἱ κλ, ἐλάχιστοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖ·, συναχθείη ἂν ἐκ τῆς λέ, τοῦ ἑβδόμου τοῦ στοιχ: ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐκ τῆς κζ΄, τοῦ αὐτοῦ· καὶ γὰρ ὁ 10, τὸν μὲν κ, πολλαπλασιάσας ποιήσει τὸν ε, τὸν δὲ λ, τὸν η. καὶ ἑπομένως τὰ κλ, εη, κλάσματα ἴσα ἔσονται, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντα.

Πρόβλημα δεύτερον.

Τὰ δοθέντα κλάσματα παρωνύμια ποιῆσαι.

Ἔστωσαν τὰ αβ, γδ. ἵνα γοῦν ταῦτα παρωνύμια ποιήσωμεν, πολλαπλασιαστέον τοὺς ὅρους ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρωνυμοῦντα τὸ ἕτερον ἐναλλάξ. καὶ τὰ γινόμενα κλάσματα παρωνύμια ἔσται, καὶ ἴσα τοῖς δοθεῖσι ἑκάτερον ἑκατέρῳ· τοῦ γὰρ α, καὶ β, ἐπὶ τὸν δ, πολλαπλασιαζομένων, ἀναφύονται οἱ εζ, ὁμοίως τῶν γδ, ἐπὶ τὸν β, πολλαπλασιαζομένων, γίνονται οἱ ηθ. καὶ εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αβ, τοῖς εζ, καὶ οἱ γδ τοῖς ηθ. κατὰ τὴν δεκάτην ἑβδόμην τοῦ ἑβδόμου τοῦ στοιχ: ἔσται ἄρα καὶ τὸ μὲν εζ, κλάσμα ἴσον τῷ αβ, τὸ δὲ ηθ, τῷ γδ. ὅτι δὲ καὶ παρωνύμια τὰ γενόμενα, φανερὸν, ὁ γὰρ ζ καὶ θ, ὁ αὐτὸς ἐστὶν ἀριθμὸς γενόμενος ὑπὸ τῶν βδ. ἀριθμῶν.

$$\tfrac{2}{3}\,\tfrac{\alpha}{\beta} \qquad \tfrac{4}{5}\,\tfrac{\gamma}{\delta}$$

$$\tfrac{10}{15}\,\tfrac{\varepsilon}{\zeta} \qquad \tfrac{12}{15}\,\tfrac{\eta}{\theta}$$

Τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ χρηστέον, κἂν ὦσι πλείω τῶν δύο. ἔστωσαν γὰρ τὰ αβ, γδ, εζ. γενέσθωσαν πρῶτον παρωνύμια τὰ αϐ. γδ, μεταποιούμενα εἰς τὰ ηθ, κλ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβ. πρὸς τὸ ηθ. τὸ γδ, πρὸς τὸ κλ, εἶτα γενέσθω τὸ εζ, παρωνύμιον ἑκατέρῳ τῶν ηθ, κλ, καὶ συστaθήσονται τὰ μν, οπ, στ. καὶ ἔσται τὸ

$\frac{3}{4}\,{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{4}{5}\,{}^{\gamma}_{\delta}$ $\frac{5}{7}\,{}^{\epsilon}_{\zeta}$

$\frac{1}{2}\,\frac{5}{0}\,{}^{\eta}_{\vartheta}$ $\frac{1}{2}\,\frac{6}{0}\,{}^{\kappa}_{\lambda}$

$\frac{1}{1}\,\frac{\frown}{4}\,\frac{5}{0}\,{}^{\mu}_{\nu}$ $\frac{1}{1}\,\frac{1}{4}\,\frac{\frown}{0}\,{}^{o}_{\pi}$ $\frac{1}{1}\,\frac{\frown}{4}\,\frac{8}{0}\,{}^{\sigma}_{\tau}$

εζ $=$ τῷ στ, τὸ πο $=$ κλ $=$ γδ. τὸ μν $=$ ηθ $=$ αβ. ὁμοίως ἐὰν ὦσι ὁσαδηποτοῦν κλάσματα, διὰ τὸ εὐχερέστερον πολλαπλασιαστέον τοὺς μὲν παρωνυμοῦντας ἁπάντων πρὸς ἀλλήλους καὶ τὸν ἐξ αὐτῶν γινόμενον κοινὸν παρωνυμοῦντα ληπτέον, τοὺς δὲ ἀριθμητὰς ἐπὶ τοὺς παρωνυμοῦντας, πλὴν τοῦ ἰδίου ἑκάστου κλάσματος, καὶ τοὺς γινομένους τακτέον ἀριθμητὰς ἕκαστον ἐν τῷ καταλλήλῳ τόπῳ. ὅπερ συνοπτικώτερον ἔσται, εἴπερ διὰ στοιχείων ἡ πρᾶξις γένηται. οἷον τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ $\frac{\gamma}{\delta}$ $\frac{\epsilon}{\zeta}$ $\frac{\eta}{\vartheta}$ $\frac{\kappa}{\lambda}$ κλάσματα μεταποιηθήσονται ἐπὶ κοινῷ παρωνυμοῦντι εἰς τὰ ἐφεξῆς.

$$\frac{\alpha\delta\zeta\vartheta\lambda,\ \gamma\beta\zeta\vartheta\lambda,\ \epsilon\beta\delta\vartheta\lambda,\ \eta\beta\delta\zeta\lambda,\ \kappa\beta\delta\zeta\vartheta.}{\beta\delta\zeta\vartheta\lambda.}$$

Πρόβλημα τρίτον.

Τὸ δοθὲν κλάσμα, εἰς ἕτερον κλάσμα ἶσον τῷ δοθέντι μεταποιῆσαι, ἔχον παρωνυμοῦντα τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔςω κλάσμα τὸ αβ, ὃ δεῖ μεταποιῆσαι εἰς ἕτερον κλάσμα ἐπὶ παρωνυμοῦντι τῷ γ. εὑρεθήτω διὰ τῆς δεκάτης ἐννάτης τοῦ ἑβδόμου τοῦ ςοιχειωτοῦ τέταρτος ἀνάλογος τῶν β, α, γ, καὶ ἔςω ὁ δ, συνιςῶν μετὰ τοῦ γ, τὸ δγ, κλάσμα, ὃ δὴ φημὶ ἴσον εἶναι τῷ αβ. ἐπεὶ γὰρ ἐςὶν ἐκ τῆς κατασκευῆς ὡς ὁ 3, πρὸς τὸν 2, ὁ 12, πρὸς τὸν 8 ἔςαι ϗ ἀνάπαλιν ὡς ὁ 8, πρὸς τὸν 12, ὁ 2, πρὸς τὸν 3, ϗ ἑπομένως ἴσα τὰ αβ, γδ, κλάσματα κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα.

$\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\beta}$ $\frac{16}{24}\frac{\delta}{\gamma}$

24

Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ τετάρτου ἀναλόγου ὁ πρῶτος τῶν ὅρων οὐ καταμετρεῖ τὸν ἐκ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτου γινόμενον. οἷος ἐνταῦθα ὁ 32, ὃν οὐ καταμετρεῖ ὁ 5, τὸ πηλίκον μετὰ τοῦ προσκειμένου αὐτῷ κλάσματος ὁ 6, δηλ: μετὰ τοῦ $\frac{2}{5}$, ληφθήτω ἀριθμητὴς ἐπὶ παρωνυμοῦντι τῷ 8, καὶ τὸ γδ + ζη, κλάσμα, ὅ ἐςὶν ἓξ ὄγδοα μετὰ δύω πέμπτων τοῦ ὀγδόου, ἴσον ἔςαι τῷ αβ. τὸ γὰρ ζη, κλάσμα ὑπάρχει κλάσματος, περὶ ὧν κατωτέρω ῥηθήσεται.

$\frac{4}{5}\frac{\alpha}{\beta}$ $\frac{6}{8}\frac{\delta}{\gamma} + \frac{2}{5}\frac{\zeta}{\eta}$

32.

Χρῆσις ϗ λυσιτέλεια τοῦ προβλήματος.

Χρώμεθα δὲ τῷ προβλήματι τούτῳ εἰς εὕρεσιν τῶν μερῶν ὅλου τινὸς, κατὰ τὴν καθ' ἡμᾶς τούτου διαίρεσιν, ὅπερ ἄλλως παρ' ἄλλοις διῄρηται· οἷον ἡ αὐτὴ ῥάβδος διαιρείσθω μὲν καθ' ἡμᾶς εἰς μέρη 20, κατ᾽ ἄλλους δὲ εἰς 8, ϗ δεδόσθωσαν ἐκ τȣ́των ἑπτὰ διὰ τȣ̃ αϛ, κλάσματος, ϗ ζητείσθω πόσοις εἰκοσοῖς τοῖς καθ᾽ ἡμᾶς ταῦτα ἰσοδυναμεῖ. ἀχθήτω κατὰ τὸ προεκτεθὲν πρόβλημα τὸ αβ, εἰς τὸ γδ + εζ, δι᾽ οὗ γινώσκομεν εἶναι τὰ ἑπτὰ ὄγδοα ἴσα εἰκοσοῖς δέκα ϗ ἑπτὰ μετὰ ἡμίσεως.

$\frac{7\,\alpha}{8\,\beta}$

$\frac{17\,\gamma}{20\,\delta} + \frac{1\,\varepsilon}{2\,\zeta}$

Πρόβλημα τέταρτον.

Τὸ δοθὲν ὅλον, ἢ ὅλα εἰς κλάσμα μεταποιῆσαι ἐπὶ τῇ δοθείσῃ παρωνυμίᾳ.

Ἔϛω ὅλον ὁ α, ἀριθμὸς, ὁ δὲ παρωνυμῶν ὁ β, πολλαπλασιασθήτω ὁ α ἐπὶ τὸν β, ὁ δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν γινόμενος γ, κείσθω ἐπὶ παρωνυμȣ̃ντι τῷ δ ἴσῳ τῷ γ, ϗ τὸ γδ, κλάσμα ἴσον ἔϛαι τῷ α. ἐπεὶ κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ περὶ πολλαπλασιάσεως ἐϛὶν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν β, ὁ α, πρὸς τὴν μονάδα, ὡς δὲ ὁ γ πρὸς τὸν δ, ἤτȣν τὸν β, ἴσοι γὰρ, τὸ γδ, κλάσμα πρὸς τὴν μονάδα, ἔχουσιν ἄρα ὅ,τε α, ϗ τὸ γδ, κλάσμα τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὴν μονάδα, ϗ ἑπομένως ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν ἑβδόμην τȣ̃ πέμπτȣ. ἐὰν δὲ τῷ ὅλῳ ὑποτεθῇ μονὰς, μεταποιηθήσεται εἰς τὸ καταχρηϛικῶς λεγόμενον κλάσμα.

$$\begin{array}{r} 10\,\alpha \\ 15\,\beta \\ \hline 150\,\gamma \\ \hline 15\,\delta \end{array}$$

Λυσιτελεῖ δὲ τὸ πρόβλημα εἰς ἀνάλυσιν τῶν μειζόνων μέτρων καὶ νομισμάτων εἰς τὰ ἐλάττω, Φέρε εἰπεῖν τῶν ὀκτωσαδίων εἰς βήματα καὶ πόδας, τῶν ἡμερῶν εἰς ὥρας, τῶν μοιρῶν εἰς ἑξηκοςὰ πρῶτα, καὶ τούτων εἰς δεύτερα, καὶ τῶν δευτέρων εἰς τρίτα, τῶν χρυσίνων εἰς δραχμὰς, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως.

Πρόβλημα πέμπτον.

Τῶν καταχρησικώτερον λεγομένων κλασμάτων τὸ δοθὲν εἰς ὅλον ἢ ὅλα ἀγαγεῖν.

Ἔςω τοιοῦτον τὸ αϐ. διαιρεθήτω ὁ α, ἐπὶ τὸν ϐ, καὶ τὸ πηλίκον ὁ δ. ἔςαι = τῷ αβ. τὸ αβ κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ ὅλον, ἢ τὴν μονάδα, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ τὸ πρῶτον πόρισμα, ἀλλὰ καὶ τὸ πηλίκον ὁ δ, ἔχει πρὸς τὴν μονάδα ὡς ὁ διαιρούμενος α, πρὸς τὸν διαιρέτην β, ἄρα τὸ αβ, κλάσμα, καὶ τὸ πηλίκον ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν θ'. τοῦ ε'. ἡνίκα δὲ γενομένης τῆς διαιρέσεως τὸ πηλίκον παράγοιτο ὅλον μετὰ κλάσματος ὡς ἐπὶ τοῦ γδ, δῆλον ὡς οὐκ ἂν μεταποιηθείη εἰς ὅλον μόνον, ἀλλ' εἰς ὅλον μετὰ κλάσματος οἷον ἐνταῦθα ὁ ε, μετὰ τοῦ ζη.

$^{1}_{4}{}^{2}\varepsilon^{\alpha}\ \delta 3.$

$^{1}_{4}{}^{4}\delta^{\gamma}$

$\varepsilon 3 + {}^{3}_{4}\eta^{\zeta}$

Ὥςπερ διὰ τȢ̃ ἀνωτέρω προβλ. τὰ μείζω εἰς ἐλάττω ἀναλύειν ἔχομεν, ὅτω διὰ τȣ́τȣ τὰ ἐλάττω ἐπὶ τὰ μείζω ἀνάγειν ἔξομεν οἷον τὰ ἑξήκ. εἰς ὥρας, ϗ ταύτας εἰς ἡμέρας. τοὺς πόδας εἰς βήματα, ϗ ταῦτα εἰς ὀκτωςάδια· τὰς δραχμὰς εἰς χρυσίνȣς.

Περὶ συνάψεως κλασμάτων.

Τὰ δοθέντα κλάσματα συνάψαι.

Εἰ μὲν ὦσι παρωνύμια, οἷα τὰ αβ, γδ, συναφθήτωσαν οἱ τȣ́των ἀριθμηταὶ καὶ τῷ ἐξ αὐτῶν, ἤτοι τῷ 5 ὑποκείσθω ὁ ταῦτα παρωνυμῶν 6, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν συνιςάμενον κλάσμα ἔςαι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, γδ, συμποσούμενον.

$\frac{2}{6}{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{3}{6}{}^{\gamma}_{\delta}$

$\frac{5}{6}{}^{\varepsilon}_{\zeta}$

Εἰδὲ μὴ εἴη τοιαῦτα, ὡς τὰ ηθ, κλ, γενέσθωσαν πρῶτον παρωνύμια, εἶτα συναφθήτωσαν τὰ ἐκ τῆς μεταποιήσεως παραχθέντα· ὡς ἀνωτέρω.

$\frac{2}{3}{}^{\eta}_{\theta}$ $\frac{3}{4}{}^{\kappa}_{\lambda}$

$\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$

$\frac{17}{12}$

Δεῖξις. Ἐπεὶ τὸ αβ, κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ ὅλον, ἢ τὴν μονάδα, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔχει δὲ πρὸς αὐτὴν ϗ τὸ γδ κλάσμα, ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, τὰ αβ, γδ, κλάσματα ἕξȣσι πρὸς τὴν μονάδα ὡς ὁ α, καὶ γ ὁμȢ̃ ἤτοι ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ αὐτὸς γὰρ ἐςὶ = τῷ β,

$\frac{8}{1}{}^{\delta}_{\varepsilon}$ $\frac{2}{5}{}^{\beta}_{\gamma}$

ἢ δ. ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ἔχει καὶ τὸ εζ, κλάσμα πρὸς τὴν μονάδα, ἄρα τὸ εζ, κλάσμα ἴσον ἐςὶ τοῖς αβ, γδ, κλάσμασι, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον τούτοις πρὸς τὴν μονάδα.

Τὸν αὐτὸν τρόπον, ἢ πλείω τῶν δύο συναφθήσονται, γενόμενα παρωνύμια, εἴγε μὴ τοιαῦτα τύχῃ ὄντα.

Ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ κλάσμα συνάψαι.

Δοθέντος δὲ ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλάσματος, οἷον τοῦ δ, ἢ βγ, ταχθήτω ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν μονὰς, ἢ τῶν δε, βγ, κλασμάτων παρωνυμιῶν γενομένων, συναπτέον ὡς πρότερον τὰ ἐξ αὐτῶν παρωνύμια.

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

Τὸ δοθὲν κλάσμα ἀπὸ κλάσματος μείζονος ἀφελεῖν.

Κἀνταῦθα πρόχειρος ἡ ἀφαίρεσις, εἴγε ὦσι παρωνύμια τὰ κλάσματα. ἀφαιρετέον γὰρ ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μείζονος τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἐλάττονος. τῷ δὲ λειπομένῳ ὑποτακτέον τὸν αὐτὸν παρωνυμοῦντα, ἢ τὸ συςαθὲν κλάσμα ἔςαι ἡ τούτων διαφορά. Εἰδὲ μὴ, ἀνακτέον πρῶτον εἰς τὰ παρωνύμια, εἶτα ἀφαιρετέον. οἷον ἔςω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβ, μείζονος τὸ ηθ, ἔλαττον· ἀναχθήτωσαν πρῶτον εἰς παρωνύμια τὰ γδ, εδ, ἀφαιρουμένου δὲ τοῦ ε, ἀπὸ τοῦ γ, συναθήτω ὑπὸ τοῦ λειπομένου ζ,

$\frac{\varepsilon}{3}\frac{\alpha}{\beta}\qquad \frac{3}{4}\frac{\eta}{\theta}$

$$\frac{20\gamma \qquad 18\varepsilon}{24\delta}\ \frac{2}{3}\frac{\zeta}{\eta}$$

τὸ ζη, κλάσμα ἐπὶ παρωνυμοῦντι τῷ η, λέγω τὸ ζδ, κλάσμα εἶναι τὴν ζητουμένην διαφοράν. ταὐτὸ δ' ἐστὶν εἰπεῖν τὰ εδ, ζη, ἴσα εἶναι τῷ γδ.

Δεῖξις. Ἐπεὶ τὸ εδ, κλάσμα ἔχει πρὸς τὴν μονάδα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν δ, ἤτοι πρὸς τὸν η, ὁ αὐτὸς γὰρ τῷ δ, ἔχει δὲ. καὶ τὸ ζη, κλάσμα πρὸς τὴν μονάδα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν η, ἕξουσιν ἄρα καὶ τὰ εδ, ζη, κλάσματα ὁμοῦ πρὸς τὴν μονάδα ὡς οἱ ε, ζ, ὁμοῦ πρὸς τὸν η, ἢ τὸν ἴσον αὐτῷ τὸν δ. ἀλλ' ὡς οἱ ε, ζ, πρὸς τὸν η, οὕτω ὁ γ, ὁ ἴσος αὐτοῖς πρὸς τὸν δ, καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, τὸ γδ κλάσμα πρὸς τὴν μονάδα, ἄρα τό, τε γδ, καὶ τὰ εδ, ζη, τὸν αὐτὸν ἕξουσι πρὸς τὴν μονάδα, καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν ζ'. τοῦ ε', τοῦ στοιχειωτοῦ ἴσον ἔσται τὸ γδ τοῖς εδ, ζη, κλάσμασι.

Κἂν ὦσι πλείω τὰ ἀφαιρεθησόμενα κλάσματα, συναπτέον πρῶτον ταῦτα, εἶτα ἀφαιρετέον τὸ ἐξ αὐτῶν συμποσούμενον, εἰ ἔλαττον ᾖ, ἀπὸ τοῦ μείζονος.

Κειμένου δὲ ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ἀφ' οὗ πρόκειται ἡμῖν κλάσμα ἀφελεῖν μονάδος ἔλαττον, οἷον ἀπὸ τοῦ η, τὸ αβ, κλάσμα, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τȣ͂ αὐτȣ͂ ἀριθμȣ͂ μονὰς. ϗ συςαθήτω κλάσμα τὸ γδ, παρωνύμιον τῷ αβ. ὁμοίως ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τȣ͂ γδ. τὸ δοθὲν, ϗ ὁ λ, ἀριθμὸς μετὰ τȣ͂ λοιπομένȣ εζ, κλάσματος ἔςαι ἡ ζητȣμένη διαφορά.

η 12, $\frac{4}{5}\overset{\alpha}{\beta}$
λ 11 $\frac{4}{5}\overset{\gamma}{\delta}$
λ 11 $\frac{4}{5}\overset{\epsilon}{\zeta}$.

Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα ᾖ μεῖζον μονάδος ὡς τὸ κλ, ἀναλυθήτω ὁ ἀριθμὸς εἰς κλάσμα ὡς ὁ η, εἰς τὸ μν, ἀφ' ȣ͂ ἀφαιρεθήσεται τὸ κλ, κλάσμα κατὰ τὰ προσεχῶς εἰρημένα, καὶ ἔςαι τὸ στ, ἡ τȣ́των διαφορά.

η 12 $\frac{13}{4}\overset{\kappa}{\lambda}$
$\frac{48}{4}\overset{\mu}{\nu}$ $\frac{10}{4}\overset{\sigma}{\tau}$

Περὶ Πολλαπλασιάσεως.

Κλάσμα ἐπὶ Κλάσμα Πολλαπλασιάσαι.

Ἔςωσαν κλάσματα τὰ αϐ, γδ, ἃ δεῖ πολλαπλασιάσαι πρὸς ἄλληλα. Πολλαπλασιασθήτωσαν πρὸς ἀλλήλους οἵ,τε ἀριθμηταὶ, καὶ οἱ παρωνυμȣ͂ντες αὐτά. ϗ τȣ͂ μὲν ἐκ τῶν ἀριθμητῶν κειμένȣ ἀριθμητȣ͂, τȣ͂ δὲ ἐκ τῶν παρωνυμȣ́ντων χώραν λαχόντος παρωνυμȣ͂ντος, συνεςάθω τὸ εζ, κλάσμα. λέγω τοῦτο εἶναι τὸ ὑπ' αὐτῶν Γινόμενον. πολλαπλασιασάτω ὁ γ, τὸν β. καὶ ποιείτω τὸν η.

$\frac{2}{8}\overset{\alpha}{\beta}$ $\frac{4}{5}\overset{\gamma}{\delta}$ $\frac{8}{40}\overset{\epsilon}{\zeta}$

Δεῖξις. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὅλον εἴτουν ἡ μονὰς πρὸς τὸ αβ, κλάσμα ὁ ϐ, πρὸς τὸν α, ὁ δὲ γ, πολλαπλασιάσας τοὺς βα, $\frac{2}{3}{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{4}{5}{}^{\gamma}_{\delta}$ $\frac{8}{15}{}^{\epsilon}_{\zeta}$ $\frac{12}{15}{}^{\eta}_{\zeta}$ πεποίηκε τοὺς ηε, ἔχει ὁ η, πρὸς τὸν ε. ὡς ὁ β, πρὸς τὸν α, καὶ ἑπομένως ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸ αβ. συσταθήτω δὴ ἀπὸ τοῦ η, καὶ ζ, τὸ ηζ, κλάσμα, ὅπερ ἴσον ἔσαι τῷ γδ, ὁ γὰρ ϐ, τοὺς γδ, πολλαπλασιάσας πεποίηκε τοὺς ηζ, ταῦτ᾽ ἄρα εἴη ἂν, ὡς τὸ ηζ, πρὸς τὸ εζ, οὕτω καὶ τὸ γδ, πρὸς τὸ αὐτὸ εζ, ἀλλὰ τὸ ηζ, πρὸς τὸ εζ, ἔχει ὡς ὁ η, πρὸς τὸν ε, ὡς κατωτέρω ῥηθήσεται, ἄρα τὸ γδ, πρὸς τὸ εζ, ἔχει ὡς ὁ η, πρὸς τὸν ε, δέδεικται δὲ ἔχειν τὸν η, πρὸς τὸν ε, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν αβ, ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸ αβ, τὸ γδ, πρὸς τὸ εζ. ἢ γοῦν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸ πολλαπλασιάσαν, τὸ πολλαπλασιασθὲν πρὸς τὸ γενόμενον· ὅτι δὲ τὸ ηζ, πρὸς τὸ εζ, ἔχει ὡς ὁ η, πρὸς τὸν ε, ῥάδιον συναγαγεῖν. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ εζ, πρὸς τὴν μονάδα, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ἡ μονὰς πρὸς τὸ ηζ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η, καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ζη, πρὸς τὸ εζ, ὁ η, πρὸς τὸν ε.

Ἀκέραιον Ἀριθμὸν ἐπὶ Κλάσμα πολλαπλασιάσαι.

Μεταποιηθήτω ὁ ἀριθμὸς, οἷον εἰπεῖν ὁ α, εἰς κλάσμα ὑποτιθεμένης $\frac{4}{1}{}^{\alpha}$ $\frac{3}{5}{}^{\gamma}_{\delta}$ $\frac{12}{5}{}^{\epsilon}_{\zeta}$ αὐτῷ μονάδος, ὅπερ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ δοθὲν κλάσμα, φέρ᾽ εἰπεῖν τὸ γδ, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν ἔσαι τὸ εζ.

Ἐὰν δὲ τῷ ἀριθμῷ ᾖ κλάσμα προσκείμενον ἢ οἷον τῷ αὐτῷ α, τὸ γδ, ἵνα ὁ ἀριθμὸς σὺν τῷ κλάσματι, ἐφ' ἕτερον κλάσμα πολλαπλασιασθῇ, μεταποιηθέντος ὡς ἀνωτέρω τοῦ ἀριθμοῦ εἰς κλάσμα, διχῶς ἐνδέχεται γενέσθαι τὴν πολλαπλασίασιν. ἢ γὰρ συναπτέον τὰ αβ, γδ, κλάσματα εἰς τὸ κλ, ὅπερ πολλαπλασιαστέον ἐπὶ ηθ, καὶ γενήσεται τὸ μν.

Ἢ πολλαπλασιαστέον τὰ αβ γδ, χωρὶς ἐπὶ τὸ ηθ, τὰ δὲ γινόμενα εἰς παρωνύμια μεταποιηθέντα συναπτέον, καὶ γενήσεται κλάσμα ὅπερ εἰς ἐλαχίστους ἀγόμενον ὅρους, ἴσον ἔσται τῷ μν.

Περὶ Διαιρέσεως.

Κλάσμα κλάσματι Διελεῖν,

Ἔστω κλάσμα τὸ αβ, διαιρεθησόμενον τῷ γδ, κλάσματι· πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ τούτων ἀριθμηταὶ ἐναλλὰξ ἐπὶ τοὺς παρωνυμοῦντας, τουτέστι ὁ α, ἐπὶ τὸν δ, καὶ γενέσθω ὁ ε, ὁμοίως ὁ β, ἐπὶ τὸν γ, καὶ ποιείτω τὸν ζ, ἐξ ὧν συσταθήτω τὸ εζ, κλάσμα, ὅ λέγω πηλίκον εἶναι τοῦ αβ, διαιρεθέντος ἐπὶ τὸ γδ, ἔσται δὲ ἡμῖν τοῦτο γνώριμον, δειχθέντος ἔχειν τὸν διαιρούμενον ἤτοι τὸ αβ, κλασμα ἐπὶ τὸ πηλίκον εζ, ὡς τὸν διαιρέτην πρὸς τὴν μονάδα, κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ περὶ διαιρέσεσεως τῶν ἀριθμῶν.

Παλλαπλασιαθήτω γὰρ ἔτι ὁ α, ἐπὶ τὸν γ, καὶ ποιείτω τὸν η. Δεῖξις. ἐπεὶ ὁ γ, πολλαπλασιάσας τὺς αβ, τὺς ηζ, πεποίηκεν,
ἐςὶ τὸ αβ, κλάσμα $\frac{6}{20}\frac{\alpha}{\beta}$ $\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\delta}$ $\frac{18}{80}\frac{\eta}{\zeta}$ $\frac{24}{80}\frac{\varepsilon}{\zeta}$
ἴσον τῷ ηζ, ὥςε ἑκάτερον τύτων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ εζ, κλάσμα, κατὰ τὴν ἑβδόμην τῦ πέμπτυ τῦ ςοιχειωτῦ. ὡς δὲ ἔχει τὸ ηζ, πρὸς τὸ εζ, ἔχει καὶ ὁ η, πρὸς τὸν ε, κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα, ἄρα καὶ ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ εζ, ὁ η, πρὸς τὸν ε, ἀλλὰ ὁ α, πολλαπλασιάσας τὺς γδ, τὺς ηε, πεποίηκεν, ἔςιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ η, πρὸς τὸν ε, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, τὸ γδ κλάσμα, πρὸς τὴν μονάδα. ἄρα ὡς ὁ η, πρὸς τὸν ε, εἴτυν τὸ αβ κλάσμα, πρὸς τὸ εζ, τὸ γδ κλάσμα, πρὸς τὴν μονάδα, τῦτ᾽ ἐςιν ὡς ὁ διαιρέτης πρὸς τὴν μονάδα, ὁ διαιρύμενος πρὸς τὸ εζ, τὸ $\frac{3}{2}\frac{\delta}{\gamma}$ εζ, ἄρα ἐςὶ τὸ ζητύμενον πηλίκον.

Ἀκέραιον κλάσματι διελεῖν.

Ἔςω ἀκέραιος ἀριθμὸς ὁ α, διαιρεθησόμενος τῷ γδ, κλάσματι. $\frac{4}{1}\frac{\alpha}{\beta}$ $\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\delta}$ $\frac{12}{2}\frac{\varepsilon}{\zeta}$
μεταποιηθείτω ὁ α, εἰς τὸ αβ, κλάσμα, εἶτα διαιρεθήτω κατὰ τὰ εἰρημένα ὡς ὁρᾷς. ἔςαι πηλίκον τὸ εζ.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου ἔχομεν καὶ τὸν λόγον ἀποδοῦναι τοῖς ἐρωτῶσι, διατὶ οἱ πλεῖστοι τῶν ἀριθμητικῶν ἐπὶ τῆς τῶν κλασμάτων διαιρέσεως, ἀντιστρέφοντες τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου, καὶ πολλαπλασιάζοντες ἑκάτερον ἐφ᾽ ἑκάτερον τῶν τοῦ διαιρουμένου ἐπ᾽ εὐθείας, ἐγκρατεῖς γίνονται τοῦ πηλίκου; ἢ ὅτι ἐπεὶ ὁ ε, γέγονεν ὑπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸν δ, ὁ δὲ ζ, ὑπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸν γ, οἱ αὐτοὶ δ᾽ ἂν γένοιντο ἀριθμοὶ κἂν ἀντιστραφῶσιν οἱ ὅροι, καὶ τοὺς αβ, πολλαπλασιάσωσι, διάτοι τοῦτο ενθα τὸ γ, τιθέασι τὸ δ, ἔνθα δὲ τὸ δ, τὸ γ, εἶτα πολλαπλασιάσαντες τὰ αβ, κλάσματα παράγουσι τὸ εζ, πηλίκον.

$\frac{6}{1}{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{2}{3}{}^{\gamma}_{\delta}$ $\frac{3}{2}{}^{\delta}_{\gamma}$ $\frac{18}{2}{}^{\varepsilon}_{\zeta}$

Πόριςμα.

Ἔτι γινώσκομεν ἐκ τούτου πῶς ἄντις εὐχερέστερον διέλοι τὸν διαιρέτην γδ, ἐπὶ τὸν διαιρεθέντα αβ. ἀρκεῖ γὰρ ἀντιστρέψαι τοὺς ὅρους τοῦ εζ, καὶ ἕξει πηλίκον τὸ ζε, τὸ αὐτὸ γὰρ ἂν γένοιτο κἂν ἀντιστραφῶσιν οἱ ὅροι τοῦ αβ, κατὰ τὸ προεκτεθὲν πόρισμα καὶ πολλαπλασιαθῶσιν ἐπὶ τοὺς γδ.

$\frac{6}{20}{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{5}{4}{}^{\gamma}_{\delta}$ $\frac{4}{5}{}^{\delta}_{\gamma}$ $\frac{24}{80}{}^{\varepsilon}_{\zeta}$

$\frac{3}{4}{}^{\gamma}_{\delta}$ $\frac{20}{6}{}^{\beta}_{\alpha}$ $\frac{60}{24}{}^{\zeta}_{\varepsilon}$

Ὑποσημείωσις.

Ἐπιστάσεως δὲ ἄξιον, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πολλαπλασιάσεως τῶν κλασμάτων, εἴγε ἑκάτερον τῶν πολλαπλασιαζομένων ἔλαττον ᾖ τῆς μονάδος, τὸ ὑπ' αὐτῶν ἑκατέρου τούτων ἔλαττον ἐστιν. ἐπὶ δὲ τῆς διαιρέσεως τὸ πηλίκον μεῖζον τοῦ διαιρουμένου εὑρίσκεται, ὁσάκις ὁ διαιρέτης ἐλάττων ὑποτεθῇ τῆς μονάδος· ἐφ' οἷς δὴ καὶ ξενισθείη ἄν τις τῶν μὴ ἀκριβῶς ἐξησκημένων τὴν Ἀριθμητικὴν ἐπιστήμην, ἀφορῶν εἰς τοὺς Ἀκεραίους τῶν ἀριθμῶν· ἐφ' ὧν τό,τε ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραγόμενον μεῖζον ἑκατέρου τῶν πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἐστί. καὶ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως πηλίκον, ἀεὶ ἔλαττον τοῦ διαιρουμένου. τοὐναντίον μέντοι ἐπὶ τῶν κλασμάτων συμβαίνει, ὡς ἐκ τῶν ἑξῆς ὑποδειγμάτων τρανωθήσεται.

Ἔστω κλάσμα τὸ αβ, ὅπερ πολλαπλασιάσαν τὸ γδ, ποιείτω τὸ εζ, λέγω ὅτι, ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν αβ, γδ, ἔλαττόν ἐστι μονάδος, ἔσται τὸ εζ, ἔλαττον ἑκατέρου τούτων.

$\frac{2}{3}\ \frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{3}{4}\ \frac{\gamma}{\delta} \qquad \frac{6}{12}\ \frac{\varepsilon}{\zeta}$

Εἰ γὰρ ὡς ἔχει ἡ μονὰς πρὸς τὸ πολλαπλασιάζον, οὕτως ἔχει καὶ τὸ πολλαπλασιαζόμενον πρὸς τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸ αβ, τὸ γδ, πρὸς τὸ εζ, ἔλαττον δὲ ὑπόκειται τὸ αβ, τῆς μονάδος, ἔλαττον ἄρα ὑπάρχει καὶ τὸ εζ, τοῦ γδ. τὸ αὐτὸ δειχθήσεται κἂν τὸ γδ, ὑποθῶμεν πολλαπλασιάζον, τὸ δὲ αβ, πολλαπλασιαζόμενον· εἰ γὰρ τὸ γδ, ἐλαττον ἢ μονάδος καὶ τὸ εζ, ἔλαττον ἔσαι τοῦ αβ. ἐὰν δὲ τῶν πρὸς ἄλληλα πολλαπλασιαζομένων κλασμάτων τὸ μὲν ἢ μεῖζον τῆς μονάδος, τὸ δὲ ἔλαττον, τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον ἔσαι τοῦ μὲν μάζονος, ἔλαττον, τοῦ δὲ ἐλάττονος, μεῖζον.

Ἔσω ἔτι τὸ αζ, διαιρούμενον τῷ γδ, ἐλάττονι μονάδος· λέγω τὸ πηλίκον εζ, μεῖζον εἶναι τοῦ διαιρουμένου αβ, ἐπεὶ γὰρ κατὰ τα εἰρημένα ἐν τῷ περὶ διαιρέσεως ἀριθμητικῆς, κατὰ τὸ ἐναλλάξ, ὡς ἔχει ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην, οὕτω τὸ πηλίκον πρὸς τὸ, διαιρούμενον, μεῖζον δὲ ὑπετέθη ἡ μονὰς τοῦ διαιρέτου, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ πηλίκον τοῦ διαιρουμένου.

$\frac{1}{4}$ αβ $\frac{2}{3}$ γδ $\frac{5}{3}$ εζ

Περὶ κλασμάτων δευτέρων, τρίτων, καὶ τῶν ἐφεξῆς.

Κλάσμα δεύτερον, εἴτουν κλάσμα κλάσματος, ὡς ἄλλοι λέγουσιν, ἐστὶ μόριον, ἢ μόρια, μέρους, ἢ μερῶν τῆς μονάδος, ταὐτὸ δ' ἐστὶν εἰπεῖν ὅλου τινός· οἷον τοῦ αβ, τὸ γδ, καὶ τοῦ εζ, τὸ ηθ. τῆς γὰρ μονάδος δίχα διαιρεθείσης τὸ αβ, κλάσμα δύοσον ἐστὶ ταύτης, τούτου δὲ ὡς ὅλου ληφθέντος καὶ ὑποδιαιρεθέντος δίχα τὸ γδ, κλάσμα δύοσον ἐστὶ τοῦ πρώτου δύοσου. τέτραχα δὲ ταύτης διαιρεθείσης, τὸ μὲν εζ, κλάσμα

$\frac{1}{2}$ αβ $\frac{1}{2}$ γδ $\frac{3}{4}$ εζ $\frac{2}{3}$ ηθ τρία τέταρτα εἰσὶ τῆς μονάδος, τούτων δὲ ὡς ὅλου ληφθέντων, καὶ εἰς τρία ὑποδιαιρεθέντων, τὸ ηθ. κλάσμα μορίων ὑπάρχει παραστατικὸν τῶν μερῶν τῆς μονάδος, ἤτοι δύο τρίτων τῶν τριῶν τετάρτων· ὥσπερ γὰρ τὸ ὅλον διαιρούμενον ἀποτελεῖ τὸ ἁπλῶς λεγόμενον κλάσμα, οὕτω τὰ μέρη τοῦ ὅλου, εἴτουν τὸ ἁπλῶς κλάσμα διαιρεθὲν, τὸ δεύτερον παρέξει κλάσμα, καὶ τοῦτο τὸ τρίτον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀναλόγως. Εἰ τοίνυν ἅπαντα ἀναχθεῖεν ἂν εἰς τὰ ἁπλῶς κλάσματα, πρόδηλον ὅτι ὁμοίως τοῖς ἁπλοῖς πραγματευθήσονται, κατά τε σύναψιν καὶ ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασίν τε καὶ διαίρεσιν, διὸ οὐδὲ χρὴ περὶ τούτων μακρηγορεῖν· ῥητέον δὲ πῶς ἂν κλάσμα κλάσματος ἐπὶ τὸ ἁπλοῦν ἀναχθείη κλάσμα.

Κλάσμα δεύτερον, εἴτουν κλάσμα κλάσματος εἰς ἁπλῶς κλάσμα ἀναγαγεῖν.

Ἔστω κλάσμα τὸ ηθ. κλάσματος τοῦ εζ, εἰς τὸ ἁπλῶς κλάσμα ἀναχθησόμενον. τοῦτο δὲ οὐδὲν ἄλλο ἐστὶν, ἢ ζητεῖν πηλίκον μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου τὰ δύο τρίτα τῶν τριῶν τετάρτων τοῦ ὅλου. πολλαπλασιασθήτωσαν πρὸς ἀλλήλους οἵ, τε εη, ἀριθμηταὶ, καὶ ζθ, παρονομοῦντες, καὶ συσταθήτω τὸ κλ, κλάσμα, ὃ λέγω τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν μονάδα τῷ ηε. καὶ ἑπομένως τὰ ηε, κλ, κλάσματα ἴσα εἶναι.

$\frac{3}{4}\,\frac{\varepsilon}{\zeta} \qquad \frac{2}{3}\,\frac{\eta}{\theta}$

$\frac{6}{12}\,\frac{\kappa}{\lambda} \qquad \mu.$

Δεῖξις· Γενέσθω ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ θ, πρὸς τὸν μ. καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται τοῦ ηθ, ἤ καὶ τοῦ ηε, κλάσματος ὅλου τὸ εζ, ἐςὶ τὸ ηε, κλάσμα πρὸς το οἰκεῖον ὅλον εἴτȣν τὴν μονάδα τὸ εζ, ὡς ὁ η, ἀριθμητὴς πρὸς τὸν θ, παρωνυμȣ̃ντα· ἀλλὰ ϗ τὸ εζ, κλάσμα ἔχει πρὸς τὴν μονάδα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ἢ ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν μ, δίϊσȣ ἄρα ὡς τὸ ηε, πρὸς τὴν μονάδα ὁ η, πρὸς τὸν μ. αὖθις ἐπεὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ȣ̃τως ὁ θ, πρὸς τὸν μ, ἔςαι κατὰ τὴν δεκάτην ἐννάτην τȣ̃ ἑβδόμȣ τȣ̃ ςοιχειωτȣ̃. ὁ ὑπὸ τῶν εμ = τῷ ὑπὸ τῶν ζθ. ἀλλὰ ϗ ὁ ε, πολλαπλασιάσας τὸν η, πεποίηκε τὸν κ, τὸν δε μ, πεποίηκε τὸν λ, ἔςιν ἄρα κατὰ τὴν δεκάτην ἑβδόμην τȣ̃ ἑβδόμȣ τȣ̃ ςοιχ: ὡς ὁ η. πρὸς τὸν μ, ὁ κ, πρὸς τὸν λ. δέδεικται δὲ ὡς ὁ η, πρὸς τὸν μ, ἔχειν ϗ τὸ ηε κλάσμα, πρὸς τὴν μονάδα, ἄρα ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, τὸ ηε, πρὸς τὴν μονάδα· ὡς δὲ ὁ κ, πρὸς τὸν λ, τὸ κλ, πρὸς τὴν μονάδα· ἄρα τὰ ηε, κλ, κλάσματα, τὸν αὐτὸν ἔχȣσι λόγον πρὸς τὴν μονάδα, καὶ κατὰ τὴν θ. τȣ̃ ε. τȣ̃ ςοιχειωτȣ̃ εἰσὶν ἴσα.

Ἔςω τὸ εζ, τρίτον κλάσμα, εἴτȣν κλάσμα κλασμάτων· ἀναχθήτω τὸ γδ κλάσμα, εἰς τὸ ἁπλȣ̃ν κλάσμα ηθ, ϗ μενεῖ τὸ εζ κλάσμα, τȣ̃ ηθ κλάσματος, ὅπερ, ὡς ἀνωτέρω ελέγετο, ἀναχθείη ἂν εἰς τὸ ἁπλȣ̃ν κλάσμα κλ, καὶ συνελόντα φάναι, τῶν τοιȣ́των πολλαπλασιάζειν δεῖ τȣ́ς τε ἀριθμητὰς ϗ παρωνυμȣ̃ντας, ἵνα εἰς ἕτερον κλάσμα ἀνάγοιντο.

$\frac{5}{7}{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{4}{6}{}^{\gamma}_{\delta}$ $\frac{3}{5}{}^{\varepsilon}_{\zeta}$

$\frac{60}{210}{}^{\kappa}_{\lambda}$ $\frac{20}{42}{}^{\eta}_{\theta}$

Περὶ Κλασμάτων Δεκαδικῶν.

Δεκαδικὰ κλάσματα καλοῦσιν οἱ νεώτεροι τὰ ὑπὸ δεκαδικῶν ἀριθμῶν παρωνυμούμενα, οἷους φασὶ τὸν δέκα, τὸν ἑκατὸν, τὸν χίλια, καὶ τοὺς ἄλλους, ὅσοι κατὰ τὸν τοῦ δεκαπλασίου λόγον προΐασιν ἐν γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ· καὶ γὰρ ἐὰν ἡ μονὰς διαιρεθῇ εἰς δέκα μέρη, ἕκαστον δὲ τούτων ὑποδιαιρεθῇ εἰς δέκα, καὶ πάλιν τούτων ἕκαστον εἰς δέκα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τῶν μὲν κατὰ τὴν πρώτην τομὴν ἕκαστον δέκατον μέρος ἐστὶ τῆς μονάδος, τῶν δὲ κατὰ τὴν δευτέραν, ἑκατοστὸν, τῶν δὲ κατὰ τὴν τρίτην, χιλιοστὸν οἷον $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, ταῦτα τοίνυν καὶ τὰ τοιαῦτα, οὐ μόνον Δεκαδικὰ λέγεται κλάσματα κοινῷ ὀνόματι, ἀλλὰ καὶ ἰδίας τετύχηκε προσηγορίας· τὰ μὲν δέκατα πρῶτα λεγόμενα, τὰ δὲ ἑκατοστὰ, δεύτερα, καὶ τὰ χιλιοστὰ, τρίτα, τὰ δὲ λοιπὰ κατὰ τὴν ἀνάλογον αὐτοῖς προσηγορίαν καλούμενα.

Περὶ Ἀναλύσεως τούτων.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς κλάσματα δεκαδικὰ ἀναλῦσαι.

Πολλαπλασιασθήτω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ὑφ᾽ οὗ παρωνυμεῖται τὸ κλάσμα εἰς ὃ ἡ ἀνάλυσις μέλλει ἔσεσθαι, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν ἔσται κλάσμα δεκαδικόν.

οἷον ὁ 5. ἀναλυόμενος.
Εἰς α΄. ἐστὶν $= 5 \cdot \frac{10}{10}$,
εἰς β΄. $= 5 \cdot \frac{100}{100}$,
εἰς γ΄. $= 5 \cdot \frac{1000}{1000}$,

Τὶ τὸ κινῆσαν.

Τὸ δὲ κινῆσαν τοὺς νεωτέρους ἐπινοῆσαι ταῦτα ἐστὶν, ἡ περὶ τὰς πράξεις τῶν κλασμάτων δυσχέρεια, καὶ ἡ περὶ αὐτὰς ἐπίπονος πραγματεία, αἵπερ μόνοις τοῖς πεπειραμένοις τούτων γνωσταί· ἵνα γὰρ ταύτας ἐκκλίνωσι, καὶ τὰ κλάσματα κατὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἔχωσι λογίζεσθαι, ἔδοξε τοῖς ταῦτα πρώτως ἐπινενοηκόσιν, εἴτε Μυλλέρος ὁ Ῥεγγιομοντάνος ἐστὶ περὶ τὸ ‚αυξδʹ, ἔτος ἀπὸ τῆς τοῦ Θείου Λόγου Σαρκώσεως, εἴτε Σίμων ὁ Στευΐνιος περὶ τὸ ‚αχπεʹ, ἀμφότερα γὰρ λέγεται, μὴ πραγματεύεσθαι ταῦτα κατὰ τὰ κοινὰ κλάσματα· ἀλλ' ἐὰν τὸν παρωνυμοῦντα, καὶ δι' ἑνὸς καὶ μόνου ἀριθμοῦ, λέγω τοῦ ἀριθμητοῦ τὸ κλάσμα παριστᾶν τάττοντος τούτῳ γραμμὰς ἰσαρίθμους τοῖς ἐν τῷ παρωνυμοῦντι ζήροις· κἀντεῦθεν τὸ τ̊σ, ὃ ἐστὶ τρία δέκατα οὑτωσὶ γράφεται 3′, τὸ τ̊ο̊σ, οὑτωσὶ 4″, οὔσης δὲ μονάδος προσ: ὁλοκλήρου, ἢ ἀριθμοῦ, ζῆρος ὑπεράνω τούτων τίθεται οἷον 4°, μονάδες τέσσαρες· 4′, πρῶτα τέσσαρα, 4″, δεύτερα, 4‴, τρίτα, 4⁗, τέταρτα, 4′′′′′, πέμπτα, 4′′′′′′, ἕκτα. τούτων κειμένων ῥᾳδία ἔσται ἡ περὶ αὐτὰ ἀνάλυσις· κείσθω γὰρ ὁ $3^{\circ}+5'+7''$ εἰς δεύτερα ἀναλυθησόμενος, γραφήτωσαν ἐφεξῆς αἱ συνιστῶσαι αὐτὸν κύφραι, προσκειμένων καὶ τῶν τῆς ἐσχάτης γραμμῶν· καὶ ἔσται ὁ $357'' =$ τῷ $3^{\circ}+5'+7''$, αἱ γὰρ 3, μονάδες $= 300''$, τὰ 5′, πρῶτα $= 50''$, ἅτινα συναπτόμενα τοῖς 7″, ποιοῦσι τὸν 357″· ὥστε ἵνα γένηται ἀνάλυσις τῶν μονάδων εἰς πρῶτα, χρὴ προσάπταν τῇ κύφρα ζῆρον ἕνα, καὶ γραμμήν. εἰς δεύτερα δὲ, δύο, εἰς τρίτα, τρεῖς, εἰς τέταρτα, τέσσαρας.

οἷον εἰς α. $3^{\circ} = 30'$,
β'. $3^{\circ} = 300''$,
γ'. $3^{\circ} = 3000'''$,
δ'. $3^{\circ} = 30000''''$,

Ὡσαύτως καὶ κλασμάτων εἰς ἄλλα ἀναλυομένων, ἐν μὲν τοῖς ἐφεξῆς κειμένοις τιθέναι ζῆρον, καὶ τὰς εἰς ὃ ἡ ἀνάλυσις προσηκέσας γραμμάς· ἐν δὲ τοῖς ἓν διαλείπεσι, 2, ζήρες, ἐν τοῖς δύο, τρεῖς, σὺν ταῖς ἀναλογέσαις γραμμαῖς.

α'. εἰς β'. $5' = 50''$,
β'. εἰς γ'. $5'' = 50'''$,
$4'' = 40'''$.

Σύναψις τέτων κατὰ τὲς νεωτέρες.

Δοθήτωσαν τὰς $3^{\circ}\,4'\,2''$, ἀναλυθήτωσαν καὶ $4^{\circ}\,2'$, πρῶτον εἰς τὰ ἐσχάτως κείμενα δεκαδικὰ κλάσματα· εἶτα συναφθήτωσαν κατὰ τὲς ἀκεραίες ἀριθμές.

Ὑπόδ. α'.

$342 \wedge 5^{\circ}\ 7'\ 4'''$.
ἀναλυθέντα $420 \wedge 6\ 7\ 4''$.
$762''$

Ὑπόδ. β'.

5704.
6740.
$12444'''$.