Κανὼν πρῶτος· περὶ τῶν ἐχόντων συζύγες.

Παλλαπλασιαςέον τὺς συζύγυς πρὸς ἀλλήλυς, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον προθετέον ἐπ' εὐθείας ἀριστερόθεν τῷ ἐκ τῆς συμπλοκῆς τῶν ςοιχείων γενομένῳ· οἷον εἰ πρόκειται ἡμῖν πολλαπλασιάσαι τὸ 2αβ, ἐπὶ τὸ 4γδ, τὸ ἐξ αὐτῶν ἔςαι τὸ 8αβγδ.

Κανὼν δεύτερος· περὶ τῶν ἐχόντων σύμβολα.

Ταυτοσυμβόλων μὲν ὄντων τῶν ςοιχείων τὸ +, ἑτεροσυμβόλων δὲ, τὸ —, προσκείσεται τῷ ἐξ αὐτῶν γινομένῳ, ἔκτεγὰρ τῦ + αβ, ἐπὶ τὸ + γδ, καὶ ἐκ τῦ —αβ, ἐπὶ τὸ —γδ. τὸ + αβγδ, γίνεται. ἐὰν δὲ τῷ μὲν αβ, τὸ + ᾖ προσκείμενον, τῷ δὲ γδ, τὸ —, ἢ τὔμπαλιν, τὸ — αβγδ, ἐξ αὐτῶν γενήσεται.

Τῦ δὲ χάριν ὑτωσὶ τὰ σύμβολα τίθεται; ἐπὶ μὲν τῶν ἐχόντων τὸ +, δῆλον τὸ αἴτιον· ἐπεὶ γὰρ τῦτο ὑπάρξεως ὂν σύμβολον, προσθήκην δηλοῖ, τὸ δὲ προσόν τινὶ ὁσάκις ἂν προσληφθῇ, ὃ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως ἀποτελεῖται, τοσάκις ἐκείνῳ ὑπάρχειν προσήκει· διά τοι τῦτο τῷ γινομένῳ τὸ τῆς ὑπάρξεως σύμβολον προσκεῖσθαι χρεών.

Ἐπὶ δὲ τῶν ἐχόντων τὸ —, οὐχ οὕτω τὸ αἴτιον προφανὲς, γενήσεται δὲ γνώριμον σκεψαμένοις, ὅτι οὐδὲν ἄλλο ποιοῦμεν πολλαπλασιάζοντες πρὸς ἄλληλα τὰ τῆς λείψεως ἔχοντα σύμβολον, ἢ τὴν λεῖψιν τοσάκις ἢ τοσάκις λαμβάνομεν ἐλλειπτικῶς· ἡ δὲ τῆς λείψεως ἔλλειψις πάντως γε προσθήκην ἀποτελεῖ, καθὰ δὴ καὶ ἡ τῆς ἀποφάσεως ἀπόφασις κατάφασιν ἀπεργάζεται· διὸ τοῦ — α, ἐπὶ τὸ — β, πολλαπλασιαζομένου, τὸ + αβ, ἀναφύεται.

Ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν ἑτεροσυμβόλων ἡ τοῦ Κανόνος ἀξίωσις ἔσται καταφανής. κείσθω γὰρ τὸ + α, πολλαπλασιασθῆναι ἐπὶ τὸ — β, ἢ καὶ ἀνάπαλιν· κἀνταῦθα τοίνυν ὁπότερον δῶμεν, τουτέστι ἢ τὴν προσθήκην λαμβάνεσθαι ἐλλειπτικῶς, ἢ τὴν λεῖψιν προσθετικῶς, λεῖψις ἀναφύεται· ὅθεν καὶ τῷ ἐξ αὐτῶν αβ, τὸ — προσοικειοῦμεν γράφοντες οὑτωσὶ — αβ.

Τοῦτο τινὲς πειρῶνται δεικνύναι καὶ διὰ τοιοῦδε ὑποδείγματος· ὀφειλέτω τις ὀβολοὺς δύο· οὗτος πάντως γε ὑπάρχει ἐν λείψει δύω ὀβολῶν· πολλαπλασιάσας δὲ ὁ αὐτὸς τὴν λεῖψιν τρὶς, ὅ ταυτόν ἐστι πολλαπλασιάσαι τὸν — 2, ἐπὶ τὸν + 3, οὐχὶ προσθήσει ἑαυτῷ τὴν ὀφειλὴν καὶ λεῖψιν, καὶ ἔσται ὀφείλων 6; ὅ ἐστι — 6; παντί που δῆλον.

Ὁ αὐτὸς δὲ, ἢ ἕτερος ἐὰν ἐν λείψει γένηται τριῶν ὀβολῶν δὶς, ὅ ἐστι πολλαπλασιάσαι τὸν + 3, ἐπὶ τὸν — 2, οὐκ ἔσται ἐν λείψει ἓξ ὀβολῶν, ταυτὸν δ' εἰπεῖν ἐν τῷ — 6; ὐδεὶς οἶμαι ἀντερεῖ· πρὸς δὲ τὸ εὐμνημόνευτα εἶναι τὰ προειρημένα, συμβάλλεται τουτὶ τὸ Δίστιχον.

„Ὕπαρξιν οἴσει συμβόλυ ἡ ταυτότης,
„Λεῖψιν δὲ, τύτων, αὖθις, ἡ ἑτερότης.

Κανὼν τρίτος· περὶ τῶν ἐχόντων βαθμοδείκτην.

Ἐὰν τὸ αὐτὸ στοιχεῖον ἔντε τῷ πολλαπλασιάζοντι, κἂν τῷ πολλαπλασιαζομένῳ ᾖ, ἔχῃ δὲ καὶ βαθμοδείκτην τινὰ ἐπικείμενον αὐτῷ, μὴ τιθέσθω δὶς ἐν τῷ γινομένῳ, ἀλλ' ἅπαξ μόνον, τῶν δὲ βαθμοδείκτων συναπτομένων, τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ὡς βαθμοδείκτης ἐπικείσθω τύτῳ· οἷον ἔσω τὸ $\alpha^2\beta$, πολλαπλασιασθησόμενον ἐπὶ τὸ $\alpha\gamma$, τὸ ἐξ αὐτῶν ἔσαι τὸ $\alpha^3\beta\gamma$; ἐν ᾧ ἅπαξ μὲν κεῖται τὸ α, ἐπίκειται δὲ αὐτῷ ὁ 3, ὁ συγκείμενος ἔκτε τῦ 2, ὃς ἦν βαθμοδείκτης τῦ α, ἐνεργείᾳ αὐτῷ ἐπικείμενος, καὶ τῆς μονάδος δυνάμει ἐν τῷ $\alpha\gamma$, προσκειμένης. ἥτις καὶ βαθμοδείκτης τῦ, ἐν τῷ $\alpha\gamma$, α. τὸν αὐτὸν τρόπον ἔσαι $\alpha^2 \times \alpha^3 =$ τῷ α^5, καὶ $\alpha\beta^2 \times \alpha\beta =$ τῷ $\alpha^2\beta^3$, καὶ $\alpha^\mu\beta \times \alpha\beta =$ τῷ $\alpha^{\mu+1}\beta^2$. καὶ ταῦτα μὲν ἡνίκα τὰ διδόμενα ὦσι μονομερῆ, τὰ γὰρ πολυμερῆ ἄλλως πολλαπλασιασθήσεται.

Κανὼν τέταρτος. περὶ τῶν Πολυμερῶν.

Πρῶτον. Ταχθήτω τὸ πολλαπλασιάζον ὑπὸ τὸ πολλαπλασθησόμενον· δεύτερον· πολλαπλασιαστέον ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαζομένου χωρὶς ἐφ᾽ ἕκαστον τοῦ πολλαπλασιάζοντος, στηροῦντας τὰ ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐκτεθέντα κανόσι, κατά τε τὰ σύμβολα, καὶ τοὺς συζύγους, καὶ τοὺς βαθμοδείκτας· καὶ τελευταῖον συναπτέον τὰ γενόμενα ἐξ αὐτῶν· ἐκκείσθωσαν δὲ τὰ ἐφεξῆς ὑποδείγματα εἰς ῥᾳοτέραν τῶν εἰρημένων κατάληψιν.

Ὑπόδειγμα Α'.

$$\begin{array}{llll}
\alpha + 2\beta - \gamma. & & & \text{τὸ πολλαπλασιαζόμενον.} \\
\alpha - 2\beta & & & \text{τὸ πολλαπλασιάζον.} \\
\hline
\alpha^2 + 2\alpha\beta - \alpha\gamma & & & \\
\quad - 2\alpha\beta - 4\beta^2 + 2\beta\gamma & & & \\
\hline
\alpha^2 - \alpha\gamma - 4\beta^2 + 2\beta\gamma & & &
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{τὰ γενόμενα.}$$

$\alpha^2 - \alpha\gamma - 4\beta^2 + 2\beta\gamma$ τὸ συμποσούμενον ἐξ αὐτῶν.

Τὸ γὰρ $\alpha \times \alpha$ κατὰ τὸν τρίτον κανόνα $=$ τῷ α^2, ὃ δὴ καὶ τέτακται ὑπὸ τὴν γραμμήν· τὸ δὲ $+\alpha \times +2\beta$, κατὰ τὸν δεύτερον $=$ τῷ $+2\alpha\beta$. ὡσαύτως καὶ τὸ $+\alpha \times -\gamma$, $=$ τῷ $-\alpha\gamma$, ἃ καὶ ἐφεξῆς γραφόμενα τὸ πρῶτον ἀναπληροῦσι μέρος, τὸ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πολλαπλασιάζοντος ἐγένετο·

αὖθις, πολλαπλασιασθέντος τῦ αὐτῦ ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τῦ πολλαπλασιάζοντος, ἤτοι τὸν -2β, τὸ ἕτερον μέρος παρῆκται· καὶ γὰρ $\alpha \times -2\beta = -2\alpha\beta$, τὰ δὲ $+2\beta \times -2\beta =$ τῷ $-4\beta^2$, τελευταῖον τὰ $-2\beta \times -\gamma =$ τῷ $+2\beta\gamma$. ἅτινα στιχηδὸν τεθέντα, καὶ συναφθέντα, τὸ ἀνωτέρω συμπτώμενον πεποίηκασι.

Ὑπόδειγμα. Β′.

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \\ \hline \alpha^2 + \alpha\beta \\ \quad - \alpha\beta - \beta^2. \\ \hline \alpha^2 - \beta^2 \end{array}$$

Ὑπόδειγμα. Γ′.

$$\begin{array}{l} \alpha^\mu + \beta\gamma^\nu \\ \alpha - \beta^2 \\ \hline \alpha^{\mu+1} + \alpha\beta\gamma^\nu - \alpha^\mu\beta^2 - \beta^3\gamma^\nu \end{array}$$

Ὑπόδειγμα Δ′.

$$\begin{array}{l} 2\alpha + 3\beta - \gamma. \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma. \\ \hline 6\alpha^2 + 13\alpha\beta - \alpha\gamma + 6\beta^2 + \beta\gamma - \gamma^2. \end{array}$$

Ὑποσημείωσις.

Ὅταν δὲ δύω πολυμερῶν τὸν πολλαπλασιασμὸν οὐ πρόκειται ἡμῖν ἐνεργείᾳ ποιῆσαι, δεῖξαι δὲ μόνον βουλόμεθα πολλαπλασιάσεως ταῦτα δεῖσθαι, γραμμαῖς ἀπ' ἀλλήλου χωρίζοντες μεταξὺ αὐτῶν τὸ τῆς πολλαπλασιάσεως σημεῖον τίθεμεν, ἢ στιγμήν, ἢ οὐδέτερον τούτων, ὡς ἔνιοι· τὸ αὐτὸ γὰρ δύναται τὸ $(\alpha + \beta) \times (\gamma - \delta)$, τῷ $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma - \delta)$ καὶ τῷ $(\alpha + \beta)\ (\gamma - \delta)$.

Ὡσαύτως καὶ τὸ $(\mathrm{M}+\Pi)\mathrm{T}$, σημαίνει πολλαπλασιάσεως δεῖσθαι τὸ διμερὲς ἐπὶ τὸ Τ, μονομερές.

Περὶ Διαιρέσεως.

Περὶ Ἁπλῶν, ἢ Μονομερῶν.

Κανὼν πρῶτος.

Περὶ τῶν κοινωνούντων κατὰ τὰ στοιχεῖα.

Μονομερῶν ὄντων τῶν διδομένων, καὶ κοινωνούντων κατά τι, ἢ κατά τινα τῶν στοιχείων, ἐκκόπτειν, ἢ ἀπαλείφειν δέον τὰ κοινὰ στοιχεῖα· τὸ δὲ ἐναπολειπόμενον, Πηλίκον ἔσται ἐπὶ ταύτης τῆς Διαιρέσεως.

Ἔστω γὰρ διελεῖν τὸ αβ, ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐπεὶ ἐν ἑκατέρῳ εὑρίσκεται τὸ α, ἐκκοπτομένων τῶν κοινῶν στοιχείων, Πηλίκον ἔσται τὸ β· ὁ λόγος σαφής· τὸ γὰρ αβ, γίνεται ὑπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ β, πολλαπλασιαζομένου, ὥστε κατὰ τοὺς τῆς πολλαπλασιάσεως ὅρους, εἴγε διαιρεθῇ τὸ αβ, ἐπὶ τὸ α, παρέξει πηλίκον τὸ β. εἰδὲ ἐπὶ τὸ β τὸ α. τό,τε γὰρ α, μετρεῖ τὸ αβ, κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. καὶ τὸ β, ὡσαύτως κατὰ τὰς ἐν τῷ α. διελόντες δὲ τὸ αβγ, ἐπὶ τὸ α, ἕξομεν πηλίκον τὸ βγ. δυνατὸν γὰρ τὸ βγ, λαβεῖν ἀνθ' ἑνὸς ὅρου, εἰ καὶ δυσὶ συνίσταται στοιχείοις, καὶ γενέσθαι ὑπ' αὐτοῦ καὶ τοῦ α, τὸ αβγ.

Κανὼν δεύτερος.

Περὶ τῶν ἐχόντων Συζύγους.

Προσκειμένων δὲ Συζύγων τοῖς ὅροις, διαιρετέον τὸν Σύζυγον τοῦ διαιρουμένου ἐπὶ τὸν τοῦ διαιροῦντος, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν πηλίκον προσαπτέον τῷ ἐκ τῶν στοιχείων πηλίκῳ· οἷον διαιρουμένου τοῦ 8αβ, ἐπὶ τὸ 4α, πηλίκον ἔσται 2β. καὶ γὰρ τοῦ 4α, ἐπὶ τὸν 2β, πολλαπλασιαζομένου, παράγεται ὁ 8αβ ἐὰν δὲ μείζων τύχῃ ὁ Σύζυγος τοῦ διαιροῦντος τοῦ Συζύγου τοῦ διαιρουμένου οὐ δυνατὸν γενέσθαι ὁμοίως τὴν διαίρεσιν, σημαίνεσθαι δὲ μόνον ταύτην, γραφομένου τούτου ὑπὸ τὸν Σύζυγον τοῦ διαιρουμένου, παρεμπιπτούσης Γραμμῆς πλησίον τῷ πηλίκῳ· οἷον διαιρουμένου τοῦ 2αβ, ἐπὶ τὸν 3α, ἐπεὶ οὐκ ἔστι διελεῖν τὸν 2, ἐπὶ τὸν 3, γράφονται οἱ Σύζυγοι σὺν τῷ πηλίκῳ οὑτωσὶ $\frac{2}{3}$β. τοῦτ' αὐτὸ γενήσεται, κἂν οἱ διδόμενοι ὅροι ἐξ ἑτεροειδῶν σύγκεινται στοιχείων. ἔστω διαιρούμενον τὸ αβ. διαιροῦν τὸ γδ, ἡ διαίρεσις σημανθήσεται οὕτω, $\frac{αβ}{γδ}$ Ἐὰν δὲ οὐ πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ διαιροῦντος πᾶσι τοῖς στοιχείοις τοῦ διαιρουμένου ὑπάρχει ἑτεροειδῆ, ἀλλ᾽ ἔνια, ὡς ἐπὶ τοῦ αβ, καὶ βγ, σημαιοῦμεν τὴν τούτων διαίρεσιν, γράφοντες $\frac{αβ}{βδ}$ ἢ ὡς εἴθισται κοινότερον $\frac{α}{γ}$, τῶν β δηλονότι ἐκκοπτομένων.

Κανὼν τρίτος.

Περὶ τῶν ἐχόντων Βαθμοδείκτας.

Ἐχόντων δὲ τῶν ὅρων καὶ Βαθμοδείκτας, ἀφαιρετέον τὸν ἐλάττω ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸν δὲ λειπόμενον τακτέον ὑπεράνω τοῦ πηλίκου· οἷον ἔστω διελεῖν τὸ $α^3β$, ἐπὶ τὸ $α^2$, λέγω πηλίκον εἶναι τὸ αβ· καὶ γὰρ τὸ μὲν $α^3β =$ τῷ αααβ, τὸ δὲ $α^2 =$ τῷ αα, ὥστε ἐκκοπτομένων τῶν ὁμοειδῶν, λείπεται πηλίκον τὸ αβ, ἔχον ὑπεράνω τοῦ α, βαθμοδείκτην δυνάμει τὴν μονάδα, ἥτις ἐναπολείπεται, ἀφαιρουμένου τοῦ 2, ἀπὸ τοῦ 3. Τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ $\overset{μ-}{α}\overset{2}{β}$, πηλίκον ἐστὶ τοῦ $α^μβ$, διαιρουμένου ἐπὶ τὸ $α^2$. κἀντεῦθεν δῆλον. ὅτι ὁπηνίκα τό,τε διαιροῦν, καὶ τὸ διαιρούμενον τοὺς αὐτοὺς ἔχωσι Βαθμοδείκτας, προσήκει ὑπεράνω τοῦ πηλίκου τίθεσθαι 0. οὐδὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἐναπολείπεται. ἀλλ᾽ ἐπεὶ παντὶ ᾧτινι ἂν προσῇ ὡς βαθμοδείκτης, ἡ τοῦ ζήρου σημαντικὴ ζίφρα ἴσον ἐστὶ μονάδι, διά τοι τῦτο ἵνα μὴ μονὰς τὸ πηλίκον νομισθῇ τῇ ἐπιθέσει τῦ ο, δεῖ τάττειν ὑπεράνω αὐτῦ τὴν μονάδα· τῦτο δὲ διχῶς ἂν γένοιτο, ἢ διὰ ςοιχείυ ἐπικείμενον ἔχοντος ζῆρον, κ̀ ἰσοδυναμῦντος ὡς εἴρηται τῇ μονάδι, ἢ διὰ ζίφρας σημαντικῆς τῆς μονάδος· οἷον διαιρυμένυ τῦ αβ, ἐπὶ τὸ α, πηλίκον ἔςαι ἤτοι τὸ $\alpha^{\beta^{o}}$ ἢ τὸ β^{1}. μέντοιγε συνεξακυομένης ἀεὶ τῆς μονάδος ἀνθ' ἑκατέρυ τύτων λαμβάνεται πηλίκον δίχα τύτων τὸ β, μόνον. ὁμοίως διαιρυμένυ τῦ $\alpha^{2}\beta$, ἐπὶ τὸ α· πηλίκον ἔςαι τὸ β· ἵνα δὲ κ̀ τὰ σύμβολα εὐφυῶς τοῖς ὅροις συντάττειν ἔχωμεν, σκεπτέον τὰ τύτοις προσκείμενα σύμβολα, κ̀ τὸν ἐφεξῆς τηρητέον κανόνα.

Κανὼν τέταρτος.

Περὶ τῶν ἐχόντων Σύμβολα.

Ταυτοσυμβόλων μὲν ὄντων τῶν διδομένων, τῷ πηλίκῳ θετέον τὸ +, ἑτεροσυμβόλων δὲ, συντακτέον τὸ —·

Οἷον διαιρυμένυ τῦ +αβ, ἐπὶ τὸ + β, ἢ τὸ — αβ, ἐπὶ τὸ — β, πηλίκον ἔςαι τὸ + α. διαιρυμένων δ' αὖθις τῦ +αβ, ἐπὶ τὸ — β, ἢ ἀνάπαλιν τῦ — αβ, ἐπι τὸ + β, πηλίκον ἔςαι τὸ — α. ἔχει δὲ ἡ πρᾶξις τὸ πιςὸν ἐκ τῶν εἰρημένων περὶ Πολλαπλασιάσεως, διὸ ἀναμνηςέον ἡμῖν τὸ ἐκεῖσε Δίςιχον· καὶ γὰρ εἴγε, τῦ τε + αβ, ἐπὶ τὸ + β, κ̀ τῦ — αβ, ἐπὶ τὸ — β, διαιρȣμένȣ μὴ εἴη, πηλίκον τὸ + α, ἔσω τὸ — α. τȣ́του δὲ δοθέντος, ἐπεὶ τῦ πηλίκȣ ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιαζομένȣ, ἀναφύεται ὁ διαιρȣ́μενος, ἀνάγκη πάντως προσκεῖσθαι τῷ μὲν + αβ, τὸ —, τῷ δὲ — αβ, τὸ +, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὑπετέθη γὰρ πᾶν τȣ̓ναντίον, ἔχειν τȣ̀ς διαιρȣμένȣς τȣ́τȣς κατὰ τὰ σύμβολα.

Τὸν αὐτὸν τρόπον, διαιρεθέντος τοῦ + αβ, ἐπὶ τὸ β, ἢ τȣ̓́μπαλιν τῦ — αβ, ἐπὶ τὸ + β, πηλίκον ἔςαι τὸ — α. εἰ γὰρ μὴ τȣ̃το, ἔσω τὸ + α, ϗ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον προσκείσεται τῷ μὲν + αβ, τὸ —, τῷ δὲ — αϐ, τὸ +, ὅπερ ὁμοίως ἄτοπον διὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑπόθεσιν, καθ' ἣν ἐναντίως πρόσκεινται τοῖς διαιρȣμένοις τȣ́τοις τὰ σύμβολα.

Περὶ Διαιρέσεως Πολυμερῶν.

Κανὼν πρῶτος.

Κείσθω πρῶτον· τὸ διαιρȣ̃ν, ἐπ' εὐθείας δὲ τȣ́τȣ ἐφεξῆς τὸ διαιρȣ́μενον, γραμμαῖς τισιν ἀπ' ἐκείνου διαςελλόμενον, δεύτερον· σκεπτέον ἐν τίνι τῶν ὅρων τῦ διαιρȣμένȣ εὑρίσκεται ὁ πρῶτος ὅρος τῦ διαιρȣ̃ντος, ὃς εἷς ἐξ ὧν συνέςηκεν ὁ τῦ διαιρȣμένȣ ὅρος. εἶτα διαιρετέον αὐτὸν κατὰ τὰ προσεχῶς εἰρημένα, τὸ δὲ πηλίκον σημειωτέον χωρὶς πρὸς τὰ δεξιά. τελευταῖον πολλαπλασιαζομένου ὁλοκλήρου τοῦ διαιροῦντος ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ τοῦ Γενομένου ἀπὸ τοῦ διαιρουμένου ἀφαιρουμένου, εἴγε μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν οὐδὲν ἐναπολειφθῇ, πέρας ὀρθὸν ἔχει τὰ τῆς διαιρέσεως.

Ὑ π ό δ ε ι γ μ α Α΄.

οἷον ἔστω

Διαιροῦν	Διαιρούμενον.	Πηλίκον
$A + H$	$\lvert AX + HX \rvert$	X

Ἐπεὶ γὰρ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιροῦντος εὑρίσκεται ἐν τῷ πρώτῳ τοῦ διαιρουμένου, συνιστῶν τοῦτον μετὰ τοῦ X, διαιρέσεως γενομένης, ἐξαχθήσεται πηλίκον τὸ X. τοῦ κοινοῦ γὰρ ἐκκοπτομένου στοιχείου, τὸ X ἐναπολείπεται. ἐπεὶ δὲ τοῦτο πολλαπλασιάζον τὸ διαιροῦν ποιεῖ τὸ AX + HX, ὅπερ ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ διαιρουμένου οὐδὲν ἐναπολείπει, ἐφησυχάζειν καὶ ἡμᾶς δέον. τὸ γὰρ ζητούμενον πηλίκον ἐστὶ τὸ X. εἰδὲ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἐναπολειφθῶσι τινὲς τῶν ὅρων ἐν τῷ διαιρουμένῳ, τὰ αὐτὰ γινέσθω καὶ ἐπὶ τούτων, ἄχρις οὗ οὐδὲν ἐναπολειφθῇ· ἔστω γὰρ καὶ ἕτερον Ὑπόδειγμα εἰς τρανωτέραν τῶν λεγομένων κατάληψιν.

Ὑ π ό δ ε ι γ μ α Β΄.

Διαιροῦν.	Διαιρούμενον.	Πηλίκον.
$\alpha^2 - \gamma^2$	$(\alpha^4 + \gamma^2\kappa^2 - \alpha^2\gamma^2 - \alpha^2\kappa^2)$	$\alpha^2 - \kappa^2$.

Ἐν τούτοις τοίνυν ἐπεὶ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιροῦντος εὑρίσκεται ἐν τῷ πρώτῳ ὅρῳ τοῦ διαιρουμένου γενομένης τῆς διαιρέσεως ὡς συνισαμένῳ ἐξ ἐκείνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου —.

Κατὰ τοὺς προεκτεθέντας κανόνας εὕρηται πηλίκον τὸ α^2, διὸ καὶ γέγραπται ἐφεξῆς. ἐπεὶ δὲ πολλαπλασιαθέντος ἐπ' αὐτὸ τοῦ διαιροῦντος, καὶ τοῦ Γενομένου $\alpha^4 - \alpha^2\gamma^2$, ἀπὸ τοῦ διαιρουμένου ἀφαιρεθέντος, ἐναπελείφθη τὸ $+ \gamma^2\kappa^2 - \alpha^2\kappa^2$, χρὴ καὶ τοῦτο διελεῖν ἐπὶ τὸ $\alpha^2 - \gamma^2$. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος αὖθις τοῦ διαιροῦντος ὅρος κοινωνεῖ τῷ $\alpha^2\kappa^2$, ὡς εἷς ἐξ ὧν αὐτὸ συνέστηκε. γενομένης διαιρέσεως πηλίκον παρήχθη τὸ $-\kappa^2$. ἐπὶ τοῦτο πολλαπλασιαθέντος τοῦ διαιροῦντος καὶ τοῦ Γενομένου $-\alpha^2\kappa^2 + \gamma^2\kappa^2$, ἀπὸ τοῦ ἤδη ἐναπολειφθέντος ἀφαιρεθέντος, ἐπεὶ οὐδὲν ἐναπελείφθη, εἴληφε πέρας ἡ διαίρεσις, καὶ τὸ ὅλον πηλίκον εὕρηται τὸ $\alpha^2\kappa^2$.

Ὑ π ό δ ε ι γ μ α Γ'.

$$\alpha - \beta \mid \alpha^2 - \beta^2 \mid \alpha + \beta.$$

Ὑ π ό δ ε ι γ μ α Δ'.

$2\alpha + \beta^2$, Διαιρέτης

$2\alpha^{\mu+1} + \alpha^\mu\beta^2 + 8\alpha\beta\gamma^2 + 4\beta^3\gamma^2$

$\alpha^\mu + 4\beta\gamma^2$. Πηλίκον.

Ὑ π ο δ ε ι γ μ α Ε΄.

$$2\alpha - \beta + \gamma \quad \text{Διαιρέτης}$$
$$2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \alpha\gamma - 2\beta^2 + 3\beta\gamma - \gamma^2$$
$$\alpha + 2\beta - \gamma. \quad \text{πηλίκον.}$$

Βάσανος Πολλαπλασιάσεως καὶ Διαιρέσεως.

Ἡ μεν Πολλαπλασίασις βασανίζεται διὰ Διαιρέσεως, ἡ δὲ Διαίρεσις διὰ Πολλαπλασιάσεως· ϗ γὰρ ἐὰν ἐπὶ μὲν τῆς Πολλαπλασιάσεως, ὁ Γενόμενος ὑπὸ τῶν δοθέντων ὅρων ἀλλήλοις πολλαπλασιαθέντων διαιρεθεὶς ἐπὶ θάτερον, δῷ τὸν ἕτερον, ἐπὶ δὲ τῆς Διαιρέσεως, πολλαπλασιαθὲν τὸ Διαιρῦν ἐπὶ τὸ Πηλίκον, παράσχῃ τὸ διαιρύμενον, μηδεμίαν ἀπάτην συμβῆναι ἐφ᾽ ἑκατέραν τῶν Πράξεων παρίςησι.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

Περὶ Κλασμάτων.

Κλάσμα ἐςὶ μέρος, ἢ μέρη Μονάδος διαιρετοῦντι ὅλον παρισώσης· ὃ εἰς κατάληψιν ληπτέον, ὡς εἰ ϗ καθ᾽ ἑαυτὴν ἀμερὴς ἐςὶν ἡ Μονὰς ὑπάρχȣσα ἀρχὴ πάντων τῶν ἀριθμῶν, ἢ μέντοι τοῖς αἰσθητοῖς ἐφαρμόττεται, καθ᾽ ἣν ἕκασον τῶν ὄντων ἕντι λέγεται, καὶ ὅλον, ἐφ᾽ ὅσον μετέχει ποσότητος, ϗ διαιρετὸν διὰ τȣ̃το ἐςὶ εἰς ἀεὶ διαιρετά· διαιρεῖσθαι κατὰ τοῦτο ϗ τὴν Μονάδα φαμέν· οὕτωσὶ γὰρ λαμβανομένη οὐδὲν ἄλλο σημαίνει ἡ Μονὰς, ἢ τὸ ἓν ϗ τὸ ὅλον. ὅπερ διαιρεῖσθαι πέφυκεν· ἀλλὰ πάντα, εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ διαιρετὸν, Μέρη κοινότερον κατονομάζεται· ἰδιοτρόπως μέντοι τὰ μέρη τῶν μονάδων ἐξ ὧν οἱ ἀριθμοὶ Λεπτὰ, ϗ Κλάσματα λέγονται. ὡς εἴτις τὸ α. δὸς εἰπεῖν νόμισμα πενταπλοῦν τυχὸν ὑπάρχον τοῦ β. νομίσματος εἰς τὰ ἴσα τῷ β, διέλῃ. ἢ παρὰ τοῖς Γεωμετρικοῖς τὴν δεκάποδα εἰς δέκα πόδας. ϗ παρ' ἄλλοις τὴν ἡμέραν εἰς ὥρας. ϗ τὰς ὥρας εἰς ἑξηκοστὰ τὰ ἴσα τῷ ϛ, ϗ οἱ πόδες τῆς δεκάποδος, ϗ αἱ ὧραι τῆς ἡμέρας, ϗ ταύτης τὰ ἑξηκοστὰ, Μέρη ὑπάρχουσιν ἕκαστα ἑκάστων, Κλάσματα μέντοι ἰδίως ἐπὶ τούτων ϗ τῶν ὁμοίων κοινῷ ὀνόματι προσαγορεύεται· ϗ ὡς οὔτε Μονάδας, οἷα εἰσὶ τὰ ὅλα αὐτῶν, οὔτε Ἀκεραίους, ἀλλὰ Κεκλασμένους παριστῶντα Ἀριθμοὺς, οὐ διὰ ἁπλῶν εἴτουν μοναδικῶν κυφρῶν, ἀλλὰ διὰ δύο ἕκαστον παρεμπιπτούσης Γραμμῆς μεταξὺ τούτων παρίσταται· οἷον τὸ $\frac{2}{5}$ Κλάσμα διὰ τοῦ 2. ϗ 5, ἐξ ὧν ὁ μὲν 5. ὁ ὑπὸ τὴν Γραμμὴν κείμενος ἀριθμὸς Παρωνυμῶν λέγεται, ϗ τοῦ ὅλου α, εἰς πέντε διῃρημένου ἐστὶ σημαντικός· ὁ δὲ 2, ὁ ὑπεράνω τῆς Γραμμῆς, ὁ ὑπ' αὐτοῦ Παρωνυμούμενος, ϗ δύο πέμπτα, ἢ δύο τῶν πέντε λεγόμενος Ἀριθμητὴς ἤκουσε. ϗ γὰρ παρίστησι τὸν ἀριθμὸν τῶν ληφθέντων μερῶν τοῦ α. ἐκ τῶν πέντε, εἰς ἃ ϗ διῄρηται, τουτέστι δύο πέμπτα.

Ἀλλ' ἐπεὶ ἐνδέχεται καὶ ἐλάττω τοῦ α, μερῶν λαβεῖν, καὶ ἰσάριθμα τούτοις, καὶ πλείω αὐτῶν ὡς ἐπὶ τῶν βα, γδ, εζ, καθορᾶται κλασμάτων, τρεῖς διαφοραὶ τῶν κλασμάτων ἀναφαίνονται, τὰ μὲν γὰρ ἐλάττω τοῦ ὅλου, ὅτε δὴ καὶ ὁ ἀριθμητὴς ἐλάττων τοῦ παρωνυμοῦντος, ὡς ἐπὶ τοῦ αβ, τὰ δὲ ἴσα τῷ ὅλῳ, καὶ ὁ ἀριθμητης τῷ παρωνυμοῦντι, οἷον τὸ γδ, τὰ δὲ μείζω τοῦ ὅλου, καὶ ὁ ἀριθμητὴς μείζων τοῦ παρωνυμοῦντος οἷον τὸ ε ζ. ἀνθ' ὅτου καὶ ἀριθμὸς πολλάκις, ὑπ' αὐτὸν κειμένης μονάδος ὅλου τινὸς σημαντικῆς, Κλάσμα λογίζεται, ὡς τὸ η ϑ, οὑτωσὶ γραφόμενον. μόνα ἔμπης γε τὰ ἔχοντα τὸν παρωνυμοῦντα μείζονα τοῦ ἀριθμητοῦ κυρίως εἰσί τε, καὶ λέγονται κλάσματα, τὰ δὲ παρὰ ταῦτα καταχρηστικώτερον ἂν ῥηθεῖεν κλάσματα, μείζω τῶν οἰκείων ὅλων ὑπάρχοντα.

$\frac{2\ \beta.}{5\ \alpha.} < 1$

$\frac{5\ \gamma}{5\ \delta.} = 1$

$\frac{10\ \varepsilon.}{5\ \zeta.} > 1$

$\frac{\eta}{\vartheta}$

Πόρισμα.

Ὅπως ποτὲ μέντοι γε ἔχει ταῦτα, πρόδηλον γίνεται ἐκ τῶν εἰρημένων τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ κλάσμα πρὸς τὸ οἰκεῖον ὅλον, ὃν καὶ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ πρὸς τὸν παρωνυμοῦντα. ἐπεὶ γὰρ ὁ μὲν παρωνυμῶν παρίστησι τὸ ὅλον, ὁ δὲ ἀριθμητὴς τὸ κλάσμα, ἔσται δήπουθεν, ὡς τὸ κλάσμα πρὸς τὸ ὅλον, ὁ ἀριθμητὴς πρὸς τὸν παρωνυμοῦντα.

Περὶ Διαιρέσεως Κλασμάτων.

Διαιρεῖται τὰ κλάσματα εἰς ὁμοειδῆ, καὶ εἰς ἑτεροειδῆ. ἐπιδιαιρεῖται δὲ τὰ αὐτὰ εἰς τὰ παρωνύμια, καὶ μὴ τοιαῦτα· εἰσὶ δὴ παρωνύμια, ὅσα τῆς αὐτῆς τυγχάνει παρωνυμίας, ἅτε δὴ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ παρωνυμούμενα ἀριθμοῦ, οἷα τὰ βα, γδ. ὥσπερ καὶ ἑτέρας, τὰ ἐφ' ἑτέρου, καὶ ἑτέρου παρωνυμούμενα οἷα τὰ κλ, μν. ἐνταῦθα ὁ λόγος περὶ τῶν ὁμοειδῶν. ἀεὶ γὰρ παραβάλλεται τὰ ὁμοειδῆ, ἅπερ εἰσὶν, ἢ τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ὅλου, ἢ τῶν ὁμοειδῶν ὅλων μέρη.

$\frac{3}{8}{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{5}{8}{}^{\gamma}_{\delta}$

$\frac{3}{8}{}^{\kappa}_{\lambda}$ $\frac{5}{7}{}^{\mu}_{\nu}$

Θεώρημα πρῶτον.

Τὰ κλάσματα, ὧν οἱ ἀριθμηταὶ τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τοὺς παρωνυμοῦντας, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. οὗ δὲ ὁ ἀριθμητὴς πρὸς τὸν παρωνυμοῦντα μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζον ἐστὶ, οὗ δὲ ἐλάττονα, ἔλαττον.

Ἔστωσαν ὁμοειδῆ κλάσματα τὰ αβ, γδ, καὶ ἐχέτω ὡς ὁ 2, πρὸς τὸν 4, ὁ 3, πρὸς τὸν 6. καὶ ἐπεὶ ὡς ὁ 2,

$\frac{2}{4}{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{3}{6}{}^{\gamma}_{\delta}$

ἀριθμητὴς πρὸς τὸν 4, παρωνυμοῦντα, οὕτω τὸ αβ, κλάσμα πρὸς τὸ ὅλον ἔσται, καὶ ὡς τὸ αβ. κλάσμα πρὸς τὸ ὅλον, οὕτω καὶ ὁ 3, πρὸς τὸν 6. ὡς δὲ ὁ 3, πρὸς τὸν 6, τὸ γδ, κλάσμα πρὸς τὸ ὅλον. ἄρα ὡς τὸ αβ, κλάσμα πρὸς τὸ ὅλον, ὕτως κ̓ τὸ γδ, κλάσμα πρὸς τὸ αὐτὸ ὅλον, κ̓ ἑπομένως ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ τὰ αβ, γδ, κατὰ τὴν ζ΄. τῦ ε΄. τῦ ςοιχειωτῦ.

Ἐχέτω δὲ ὁ 8. ἀριθμητὴς τῦ εη, κλάσματος, πρὸς τὸν 16, παρωνυμῦντα μείζονα λόγον, ἢ ὁ 2, ἀριθμητὴς τῦ γδ, κλάσματος πρὸς τὸν 6, τὸν παρωνυμῦντα αὐτό· λέγω τὸ εη μεῖζον εἶναι τῦ γδ. ἐπεὶ γάρ ἐςὶν ὡς 8, πρὸς τὸν 16, τὸ εη κλάσμα πρὸς τὸ ὅλον κατὰ τὸ προεκτεθὲν πόρισμα, ἕξει πάντως γε τὸ εη, πρὸς τὸ ὅλον μείζονα λόγον, ἢ ὁ 2, πρὸς τὸν 6. ὡς δὲ ὁ 2, πρὸς τὸν 6, τὸ γδ, κλάσμα πρὸς τὸ ὅλον. ἄρα τὸ εη, πρὸς τὸ ὅλον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ γδ, πρὸς τὸ αὐτὸ ὅλον, κ̓ ἑπομένως μεῖζον ἐςὶ, κατὰ τὴν ὀγδόην τῦ πέμπτυ τῦ ςοιχειωτῦ. ἐξ ὧν συνάγεται κ̓ τὰ λοιπά. εἰ γὰρ τὸ γδ, μὴ εἴη ἔλαττον τῦ εη, ἢ ἴσον ἔςαι, ἢ μεῖζον αὐτῦ. εἰ μὲν μεῖζον, κ̓ ὁ 2, πρὸς τὸν 6, μείζονα λόγον ἕξει, ἢ ὁ 8, πρὸς τὸν 16. εἰ δὲ ἴσον, τὸν αὐτόν· ἑκάτερον δὲ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἔχειν ἐλάττονα· ἄρα τὸ γδ, ἔλαττον τῦ εη. ὅ, ἔ, δ.

Θεώρημα δεύτερον.

Τὰ κλάσματα ἅπερ ὑπὸ τῦ αὐτῦ παρωνυμεῖται ἀριθμῦ, ἔχυσι λόγον, ὃν οἱ ἀριθμηταὶ τῶν αὐτῶν.

Ἔστωσαν κλάσματα τὰ ζκ, ηλ, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ ῥηθὲν πόρισμα ἐστὶν, ὡς τὸ ζκ πρὸς τὸ ὅλον, ὁ 7 πρὸς τὸν 8, ἔστι δ' ἔτι καὶ τὸ ὅλον πρὸς τὸ ηλ, κλάσμα, ὡς ὁ 8, πρὸς τὸν 5. εἰσὶν ἄρα τρία μεγέθη, τὸ ζκ, κλάσμα, τὸ ὅλον, τὸ ηλ, κλάσμα, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τῷ πλήθει, οἱ 7, 8, 5, σὺν δύο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἄρα καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. κατὰ τὴν κβ'. τοῦ ε'. τοῦ στοιχ. καὶ ἑπομένως ὡς ὁ 7, ἀριθμητὴς πρὸς τὸν 5, τὸ ζκ, πρὸς τὸ ηλ. ὅ, ἔ, δ. —

$\frac{7}{8}{}^{\zeta}_{\varkappa}$ $\frac{5}{8}{}^{\eta}_{\lambda}$

Πρόβλημα πρῶτον.

Τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς ἐλαχίστους ὅρους ἀγαγεῖν.

Δοθήτω τὸ αβ, κλάσμα, ὃ δεῖ εἰς ἐλαχίστους ὅρους ἀγαγεῖν, εἴτουν ἕτερον κλάσμα εὑρεῖν ἴσον τῷ δοθέντι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· εὑρεθήτωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς αβ, κατὰ τὴν λ'. τοῦ ἑβδόμου τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ ἔστωσαν οἱ γδ, ἐξ ὧν συσταθήτω τὸ γδ κλάσμα· λέγω ἴσον εἶναι τοῦτο τῷ αβ, ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς· ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὴν κατασκευὴν ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὁ α, πρὸς τὸν β, τὸ γδ, κλάσμα ἴσον ὑπάρχει τῷ αβ, κλάσματι, κατὰ τὸ πρῶτον Θεώρημα, ἔστι δὲ καὶ ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς τοῖς γδ, εἴγε τοιοῦτοι εὑρηνται, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν πρότασιν, ἄρα γέγονε τὸ ἐπιταχθέν.

$\frac{2}{3}\,\frac{7}{8}\,{}^{\alpha}_{\beta}$ $\frac{3}{4}\,{}^{\gamma}_{\delta}$