Ἄλλως περὶ τῶν αὐτῶν ὑποδειγμάτων τρίτου, καὶ τετάρτου.

Ἡνίκα δὲ ἀφαιρεθέντος τοῦ τετραγώνου τῆς πρώτης κύφρας τῆς ῥίζης οὐδὲν ἐναπολειφθῇ, ζητητέον ποσάκις τὸ διπλάσιον ταύτης μετρεῖ τὴν πρώτην κύφραν τοῦ ἑξῆς τμήματος, καὶ οὕτως εὑρεθήσεται ἡ δευτέρα τῆς ῥίζης κύφρα ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου ὑποδείγματος· εἰδὲ συμβῇ μὴ μετρεῖν καὶ ταύτην, κείσθω ἀντὶ δευτέρας κύφρας τῆς ῥίζης ζῆρος ὡς ἐπὶ τοῦ τετάρτου.

Ὑπόδειγμα γ'.		Ὑπόδειγμα δ'. ἄλλο.	
7,84	(29.	4,16,16	(204.
4	1.	4	
3,8,4	8.	0,1,6	
49,8		16,16	
441		404	
384		1616	
0		0	

Ἐὰν δὲ ὁ ἔκτινος διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τῶν κυφρῶν τῆς ῥίζης γινόμενος, οἷος ὡς ἐπὶ τοῦ πέμπτου ὑποδείγματος ἐστὶν ὁ 441, ὃς ἐγένετο ἀπὸ τοῦ 9, πολλαπλασιάσαντος ἑαυτὸν καὶ τὸν 4, μείζων εὑρεθῇ τοῦ οὗ δέον ἐστὶν ἀφαιρεθῆναι, ὡς ἐνταῦθα τοῦ 384, τότε ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ 9, μονάδα, ἵνα ἐναπολειφθῇ δευτέρα κύφρα τῆς ῥίζης ὁ 8, ὃς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς, καὶ ἐπὶ τὸν 4, παράγει τὸν 384, οὗ ἀφαιρουμένου οὐδὲν ἐγκαταλείπεται.

Περὶ ἐξαγωγῆς ῥίζης τετραγώνου ἐξ ἀριθμῶν κεκλασμένων ἀριθμητικῶς.

144	α.
4	β.
12	γ.
2	δ.

Δοθήτω τὸ αβ, κλάσμα οὗ τὴν ῥίζαν δέον εὑρεῖν. εὑρεθήτω κατὰ τὰ προεκτεθέντα τοῦ, τε ἀριθμητοῦ, καὶ τοῦ παρωνυμοῦντος· ἐξ ὧν καταλλήλως κειμένων συσταθήτω τὸ γδ, κλάσμα, καὶ αὐτὸ ἔσται ῥίζα τοῦ αβ, κλάσματος· κἂν μὲν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ὦσι τετράγωνοι, αἱ εὑρεθεῖσαι ῥίζαι αἱ ἀληθεῖς ὑπάρχουσι ῥίζαι τούτων· εἰ δὲ μὴ, τῶν προσεχεστέρων αὐτοῖς τετραγώνων, ὃ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων συμβαίνει ἀριθμῶν, ὅταν μὴ ὦσι τετράγωνοι· Δυνατὸν ἔμπης ἐπὶ παντὸς μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἄλλην, καὶ ἄλλην ἐπ' ἄπειρον προϊόντας εὑρίσκειν ῥίζαν προσεγγίζουσαν μᾶλλον, καὶ ἔτι μᾶλλον τῆς εὑρεθείσης τῇ ζητουμένῃ καὶ ἀληθεῖ, οὐδέποτε δὲ εὑρεθησομένῃ ἐν ἀριθμοῖς εἴτε ἀκεραίοις, εἴτε κεκλασμένοις, καίτοι γραμμικῶς παρισταμένοις ἡμῖν ἐν τοῖς σχήμασιν· αἴτιον δὲ ὅτι αἱ τοιαῦται ἄλογοι εἰσὶ, καὶ οὐ ῥηταί· μενοῦνγε ὡς εἴρηται εὑρεθείη ἂν ἐφ' ἑκάστης τούτων ἄλλη καὶ ἄλλη μᾶλλον ταύτῃ προσεγγίζουσα, καὶ διαφέρουσα αὐτῆς ἀεὶ διαφορᾷ ἐλάττονι τῆς δοθείσης· ὧν πολλαπλασιαζομένων ἐφ' ἑαυτὰς, γενήσονται τετράγωνοι διαφέροντες τοῦ δοθέντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἀεὶ διαφορᾷ ἐλάττονι τῆς δοθείσης.

Περὶ ἐξαγωγῆς ῥιζῶν ἀπὸ κλασμάτων δεκαδικῶν.

Ἀξίωμα ἢ Λημμάτιον.

Ἐάν τινι ἀριθμῷ ἀκεραίῳ εἴτε ἁπλῷ, εἴτε προσκείμενον αὐτῷ ἔχοντι κλάσμα δεκαδικὸν, ζῆροι ἐπικειμένας ἔχοντες γραμμὰς, ἐφεξῆς τεθῶσι, μεταπεσεῖται μὲν εἰς κλάσμα, οὗ παραστατικαὶ αἱ τοῦ ἐσχάτου ζήρου γραμμαὶ, τὴν σημασίαν μέντοι οὐκ ἀποβαλεῖ· οἷον ἐπὶ τοῦ α, καὶ β, ὁ γὰρ 23, ὑποκειμένης αὐτῷ μονάδος ἴσος ἐστὶ τῷ δ, κλάσματι, ὁμοίως καὶ ὁ α, ὑποκειμένης μονάδος εἰς χίλια διῃρημένης, ἴσος ἐστὶ τῷ ε· ταῦτα δὲ ἴσα, ἄρα ἡ αὐτὴ ποσότης ἔσται ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ προσκειμένων τε καὶ μὴ προσκειμένων τῶν ζήρων, καὶ ἑπομένως ἡ αὐτὴ σημασία.

α. $23,\ 0'\ 0''\ 0'''$.

β. $57',\ 0'\ 0''\ 0'''$.

$\frac{23}{1}$ δ.

$\frac{23000}{1000}$ ε.

Λημμάτιον.

Ἐὰν ἀπό τινος ἀριθμοῦ συνισαμένου ἐκ μονάδος ζήρων ἀρτίων τῷ πλήθει τὸ ἥμισυ τούτων ἀφαιρεθῇ, ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται τετράγωνος ῥίζα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· οἷον ἐπὶ τοῦ α 10000, ὁ β 100· κατὰ γὰρ τὰ εἰρημένα περὶ πολλαπλασιάσεως ἀριθμῶν, ἐπεὶ εἴτε ὁ β, ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, εἴτε τῷ αὐτῷ β, δύο ζῆροι προστεθῶσι, τὸ αὐτὸ γενήσεται, εὔδηλον, ὅτι ὁ α, ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ β, τετράγωνος, καὶ ἑπομένως ῥίζα αὐτοῦ ὁ β.

Τούτων οὕτω κειμένων ῥᾴδιον ἀπὸ παντὸς δεκαδικοῦ κλάσματος τὴν τετράγωνον ῥίζαν ἐξαγαγεῖν. Εἰ μὲν οὖν τὸ δοθὲν κλάσμα τὰς ἐπικειμένας γραμμὰς τῇ ἐσχάτῃ αὐτοῦ κύφρᾳ ἀρτίας ἔχει, οἷον ἐπὶ τὸ α, ἐξαχθήτω ἐκ τοῦ α, ὡσεὶ καὶ ἀκέραιος ἦν ἀριθμὸς ἡ αὐτοῦ ῥίζα ὁ β, καὶ τῇ ἐσχάτῃ αὐτοῦ κύφρᾳ ἐπικείσθω τὸ ἥμισυ τῶν γραμμῶν τῆς ἐσχάτης κύφρας τοῦ α, καὶ ὁ β, ἔσται ἡ ζητουμένη ῥίζα.

α. 240'1''. (49'β.

$\dfrac{2401\ \gamma.}{100\ \delta.}$ $\dfrac{49\ \varepsilon.}{10\ \zeta.}$

Εἰ δὲ ταύτας ἔχει περιττὰς οἷον τὸ η, προσκείσθω τούτῳ ζῆρος μετὰ τῶν ἀναλόγων γραμμῶν, ἵνα γένωνται ἄρτιαι, ὡς ἐπὶ τοῦ θ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς πρότερον καὶ ἔσται ῥίζα τοῦ θ, τὸ κ, κλάσμα· δείκνυται τὸ πρῶτον· τὸ γδ, κλάσμα οὗ ὁ μὲν ἀριθμη-

η. 20'2''5'''.

θ. 20'2''5'''0''''. κ(14'2''

τῆς σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν κυφρῶν ἐξ ὧν ϰ̀ ὁ α, ὁ δὲ παρωνυμῶν ἔχει ζήρυς ἰσαρίθμυς ταῖς ἐπικειμέναις γραμμαῖς τῇ ἐσχάτῃ κύφρᾳ τῦ α, ἴσον ἐςὶ τῷ αὐτῷ α, ἐὰν δὲ ζητηθῇ ἡ τετράγωνος ῥίζα τῦ γδ, κλάσματος, δοθήσεται τὸ εζ, κλάσμα ἐξαγομένης τῆς ῥίζης τῦτε γ, ϰαὶ δ, τῦ μὲν γ, ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῦ δὲ δ, κατὰ τὸ προεκτεθὲν λημμάτιον· ϰ̀ ἑπομένως ἔςαι τὸ αὐτὸ εζ, κλάσμα ῥίζα ϰ̀ τῦ α, τὸ δὲ εζ, ἴσον ἐςὶ τῷ β, ἔχει γὰρ ὁ β, τὰς αὐτὰς κύφρας τῷ εζ, τὰς ἐν τῷ ἀριθμητῇ, ϰαὶ γραμμὴν μίαν ἐπικειμένην, ὥςπερ ϰ̀ ὁ παρωνυμῶν τὸ εζ, ζῆρον ἕνα, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῶν γραμμῶν τῦ α, τῶν ἐπικειμένων τῇ ἐσχάτῃ αὐτῦ κύφρᾳ ὁ β· ἄρα ῥίζα ἐςὶ τῦ α.

Δείκνυται τὸ δεύτερον, ὁ θ, ἴσος ἐςὶ τῷ η, κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα, τῦ δὲ θ, ῥίζα ὁ κ, κατὰ τὰ προαποδεδειγμένα, ἄρα ὁ κ, ῥίζα τῦ η.

Περὶ εὑρέσεως τῆς προσεχεςέρας ῥίζης τῇ ἀληθεῖ ζητυμένῃ τετραγωνικῇ ῥίζῃ.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μετὰ τὴν ἐσχάτην ἀφαίρεσιν μηδὲν ἐναπολειφθῇ, ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα ἔςαι ἡ ζητυμένη ϰαὶ ἀληθής· εἰδὲ ἐναπολειφθῇ τι, ὐδέποτε εὑρεθήσεται ἡ τοιαύτη ῥίζα ὡς καὶ πρότερον εἴρηται· εὑρεθείη μέντοιγε ἡ προσεχεστέρα ταύτῃ τὸν τρόπον τοῦτον.

Δεδόσθω ἀ- α. 2507.
ριθμὸς ὁ α, καὶ β. 50', 0'' 6''' ε, μ 25' 0'0'.
ἐπεὶ τῆς ῥίζης δ. 2507, 0' 0'', 0''' 0''''.
αὐτοῦ β, ἐξαχ- β γ
θείσης ἐναπολέ- δ. 250'7'', 0'''0'''', 0'''''0''''''
λειπται ὁ γ, προ-
σκείσθωσαν τῷ α, τινὲς δυάδες ζήρων δεκαδικῶν αἱ β, καὶ γ, ἵνα γένηται ὁ δ, ὃς γενήσεται κἂν ὁ αὐτὸς α, ἐπὶ δύο δεκαδικοὺς τετραγώνους ἀριθμοὺς πολλαπλασιασθῇ οἷος ἐστὶν ὁ 100, καὶ ὁ 10000, καὶ ἀπὸ τοῦ δευτέρου δ, ἐξαχθήτω ἡ τετράγωνος αὐτοῦ ῥίζα συνεχιζομένης τῆς πράξεως, καὶ αἱ προσευρεθεῖσαι, κύφραι ε, προσκείσθωσαν ταῖς ἐξ ἀρχῆς β, καὶ τὸ ὅλον βε, ἔσται ἡ μᾶλλον προσεγγίζουσα ῥίζα τῇ ἀληθεῖ.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ γὰρ ὑποδείγματος τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ β, ἐστὶ τὸ μ, ὅπερ ἐλλείπει τοῦ η, τῷ θ,

α. 2 5 0 7, β. 5 0, μ. 2 5 0 0
0' 0'' 0''' 0'''' 0'6'' ε η. 2 5 0' 7''
δ. 250' 7'' 0''' 0'''' 0''''' 0'''''', β. 50', 0'' 6''' ε μ. 2 5 0' 0''
κ. 250' 6'' 0''' 0'''' 3''''' 6'''''', 0. 0. 0' 7'' θ
λ. · · · · 9''' 9'''' 6''''' 4''''''.

τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ βε, ἐστὶ τὸ κ, ἐλλεῖπον τοῦ δ, τῷ λ, ὅτι δὲ ὁ λ, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ θ, πρόδηλον· καὶ γὰρ αἱ κύφραι τοῦ κ, ταῖς, αἷς συστοιχοῦσι, τοῦ δ, εἰσὶν ὁμοειδεῖς· εἰδὲ βούλει καὶ ἄλλην ῥίζαν εὑρεῖν μᾶλλον τῆς βε, προσεγγίζουσαν τῇ ζητουμένῃ, πρόσθες τῷ α, πλείους δυάδας ζήρων, καὶ οὕτω προϊὼν ἐπ' ἄπειρον εὑρήσεις ἄλλην μᾶλλον τῆς προτέρας προσεγγίζουσαν, οὐδέποτε δὲ τὴν ζητουμένην.

Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀλγεβρικῶς.

Ὥσπερ ἐπὶ τῆς εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δέον ἦν εἰδέναι ἐκ πόσων, καὶ ὁποίων μερῶν συνέστηκε τὸ τῆς διμεροῦς ῥίζης τετράγωνον, τό,τε τῆς τριμεροῦς, καὶ ἁπλῶς εἰπεῖν πολυμεροῦς, οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς κυβικῆς ἐκ πόσων καὶ ὁποίων μερῶν συνίσταται ὁ τῆς διμεροῦς ῥίζης κύβος, ὁ τῆς τριμεροῦς, καὶ ἑνὶ λόγῳ ὁ τῆς πολυμεροῦς· ὁ μὲν οὖν τῆς διμεροῦς ῥίζης κύβος συνίσταται ἔκτε δύο κύβων τῶν γινομένων ἀπὸ τῶν τῆς ῥίζης τμημάτων, καὶ ἓξ παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ μὲν τρία βάσιν ἔχει καθέκαστον τὸ τοῦ πρώτου τμήματος τετράγωνον, καὶ ὕψος τὸ δεύτερον τμῆμα, τὰ δὲ λοιπὰ βάσιν τὸ τοῦ δευτέρου τμήματος τετράγωνον, καὶ ὕψος τὸ πρῶτον τμῆμα· ἅπερ ἀκριβῶς ἂν ὀφθείη ἀνισταμένου εἰς στερεὸν σχῆμα τοῦ ἀπὸ διμεροῦς ῥίζης κύβου· αὐτὰ δὲ ταῦτα κατάδηλα ἔσται καὶ διὰ τῶν στοιχείων· ἔστω γὰρ ῥίζα διμερὴς ἡ $\alpha + \beta$, καὶ γενέσθω ὁ ἐξ αὐτῆς κύβος $\alpha\alpha\alpha + 3\,\alpha\alpha\beta + 3\,\alpha\beta\beta + \beta\beta\beta$· ἰδοὺ δὴ κἀνταῦθα παρίστανται σαφῶς, οἵ,τε τῶν μερῶν κύβοι, καὶ ἓξ παραλληλεπίπεδα, καὶ τῶν μὲν τριῶν πρώτων ἕκαστον ἔσχηκε βάσιν μὲν τὸ τοῦ πρώτου τμήματος τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ δεύτερον, τῶν δὲ λοιπῶν τριῶν ἕκαστον βάσιν μὲν τὸ τοῦ δευτέρου τμήματος τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ πρῶτον, ἐξ ὧν ἤρτηται ἡ ἔφοδος τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης.

Δεδόσθω γὰρ κύβος ὁ $\chi\chi\chi + 3\chi\chi\gamma + 3\gamma\gamma\chi + \gamma\gamma\gamma$. καὶ ζητείσθω ἡ κυβικὴ τούτου ῥίζα· καὶ ἐπεὶ κατὰ τὰ εἰρημένα τὸ $\chi\chi\chi$. παρίστησι τὸν κύβον τοῦ πρώτου μέρους τῆς ζητουμένης ῥίζης, ῥίζα δὲ κυβικὴ αὐτοῦ ἐστὶν ὁ χ., ἄρα ὁ αὐτὸς χ., ἔσται καὶ πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης· ταῦτ᾽ ἄρα κείσθω ὁ χ., ὡς πρῶτον αὐτῆς μέρος· ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ ἐξ αὐτοῦ κύβου ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύβου, λείπεται τὸ $3\chi\chi\gamma + 3\gamma\gamma\chi + \gamma\gamma\gamma$, ἐν ᾧ περιέχεται τὰ τρία παραλληλεπίπεδα ὧν ἕκαστον βάσιν μὲν ἔχει τὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ δεύτερον· διαιρουμένων δὲ τούτων ἐπὶ τὸν $3\chi\chi$, ἐξαχθήσεται ὁ γ, δεύτερον μέρος ζητουμένης ῥίζης· οὗ προσκειμένου τῷ χ., συμπληροῦται ἡ ὅλη ῥίζα τοῦ δοθέντος κύβου ἡ $\chi + \gamma$· δεῖ δὲ προσεῖναι ἔτι τῷ δοθέντι κύβῳ τόν τε τοῦ δευτέρου μέρους κύβον καὶ τρία παραλληλεπίπεδα ὧν ἕκαστον βάσιν μὲν ἔχει τὸ τοῦ δευτέρου μέρους τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ πρῶτον· ἀλλὰ καὶ ταῦτα καθορᾶται ἐπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρεθέντων τῶν πρὸ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ὅλου· ἡ $\chi + \gamma$ ἄρα ἐστὶν ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ δοθέντος κύβου.

Τὸν αὐτὸν τρόπον δοθέντος κύβου, ὃς ἂν συσταίη ἐκ τριμεροῦς ῥίζης, ἢ τετραμεροῦς, καὶ ἁπλῶς εἰπεῖν πολυμεροῦς, εὑρεθήσεται ἡ ῥίζα ὁποίου ποτ᾽ ἂν εἴη εἴδους, ἐὰν ἐξετάσωμεν ἀκριβῶς τὰ μέρη ἐξ ὧν ὁ δοθεὶς συνέστηκε κύβος.

Περὶ ἐξαγωγῆς κυβικῆς ῥίζης Ἀριθμητικῶς.

Ἀλλ᾽ ἵνα καὶ ἀριθμητικῶς τὴν ῥίζαν τοῦ διδομένου κύβου εὑρίσκειν ἔχωμεν, πρὸ πάντων δέον σκοπεῖν, ἐκ πόσων ἂν συσταίη κυφρῶν ἡ ζητουμένη ῥίζα· τούτου δὲ τευξόμεθα εἰδότες μέχρι πόσων κυφρῶν ἀνήκουσιν ἑκάστη τῶν μεγίστων ῥιζῶν· ἡ μὲν οὖν μεγίστη τῶν μονομερῶν ἥτις ἐστὶν ὁ 9, ἀνήκουσιν ἄχρι τῶν τριῶν, ἡ δὲ μεγίστη τῶν διμερῶν ὁ 99, ἄχρι τῶν ἕξ, ἡ δὲ μεγίστη τῶν τριμερῶν ἄχρι τῶν ἐννέα, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀναλόγως· ἀεὶ γὰρ τὸ πλῆθος τῶν κυφρῶν τοῦ κύβου μέχρι τοῦ τριπλασίου χωρεῖ τῶν κυφρῶν τῆς ῥίζης, καὶ οὐδέποτε ὑπερεκπίπτει τούτου· ἐξ ὧν συνιδεῖν ἔξομεν, ὡς εἴγε ὁ δοθεὶς κύβος ἐκ πλειόνων ἢ τριῶν κυφρῶν συνίσταται, ἡ ῥίζα τούτου ἔσται μείζων, ἢ μονομερής· εἰδὲ ἐκ πλειόνων ἢ ἕξ, μείζων ἢ διμερὴς, εἰδὲ ἐκ πλειόνων ἢ ἐννέα, μείζων ἢ τριμερής.

Τῷ βουλομένῳ τοίνυν γνῶναι ποσαμερὴς ἂν εἴη ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ δοθέντος κύβου, διαιρετέον τὰς κύφρας τύτυ εἰς μέρη, ϗ δοτέον ἑκάςῳ μέρει ἀνὰ τρεῖς κύφρας ἀρχομένῳ δεξιόθεν· ὅσα γὰρ ἂν ὦσι τὰ μέρη, τοσαῦται ϗ αἱ κύφραι τῆς ῥίζης ἔσονται, πλὴν ὅτι ὐκ ἐπὶ πάντων τὰ μέρη πάντα ἐκ τριῶν συνίςαται κυφρῶν· ἐπ' ἐνίων γὰρ τὸ τελευταῖον ὁμοίως τοῖς πρὸ αὐτῦ ἐκ τριῶν σύγκειται, ἐπί τινων δὲ ἐκ δύο, ϗ ἐπ' ἄλλων ἐξ ἑνὸς μόνυ, ὡς ἐπὶ τῶν α, β, γ, ἐςὶν ἰδεῖν κύβων.

α. 357,911.   β. 32,768.

γ, 3, 456, 789, 100, 113, τῦ μὲν ὖν α, ϗ β, αἱ ῥίζαι εἰσὶ διμερεῖς, ὡς εἰς δύο μέρη διαιρυμένων τῶν συμπληρυσῶν αὐτὺς κυφρῶν, τῦ δὲ γ, πενταμερὴς εἰς πέντε διαιρυμένων.

Πρὸς τὸ γίνεσθαι δὲ κατάλληλον τὴν θέσιν τῶν τῦ κύβυ μερῶν, ἅπερ ὐχ ὑπάρχει ὥςπερ ἐπὶ τῶν ςοιχείων διακεκριμένα ϗ εὐκρινῆ, ἀλλὰ συμπεπλεγμένα ϗ σύμμικτα, ἐπιςῆσαι προσήκει, ὅτι ὁ ἀπὸ μονάδων κύβος μονάδων ἐςὶ παρακτικός.

Ὁ ἀπὸ δεκάδων,   χιλιάδων.
Ὁ ἀπὸ ἑκατοντάδων,   μιλλιονίων.
Τετράγωνον μονάδων ἐπὶ δεκάδας πολλαπλασισθὲν παρέξει δεκάδας·
δεκάδων ἐπὶ μονάδας, ἑκατοντάδας.
ἑκατοντάδος·   ἑκατοντάδα χιλιάδος.

Κείσθω τοίνυν ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν τοῦ δ, κύβου· διαιρεθήτωσαν αἱ κύφραι τούτου εἰς μέρη ὡς εἴρηται· καὶ ἐπεὶ δύο τὰ μέρη τῶν κυφρῶν εὑρίσκεται, ἔσται πάντως ἡ ζητουμένη ῥίζα διμερής· ἀλλ' ἵνα ἡ πρώτη αὐτῆς κύφρα εὑρεθῇ σκεπτέον εἰ τὸ τελευταῖον μέρος κύβος ἐστί· εἰ γὰρ τοῦτο, πρώτη τῆς ῥίζης κύφρα ἡ αὐτοῦ ἂν εἴη ῥίζα· εἰ δὲ οὐ κύβος ὡς ἐνταῦθα, ὁ γὰρ 12, οὐ κύβος, εὑρεθήτω ἐν τῷ κανονίῳ ὁ προσεχέστερος τῷ 12, κύβος ὃς ἐστιν ὁ 8, ῥίζα δὲ τούτου ὁ 2, τεθήτω πρῶτον ὁ μὲν 8, ὑπὸ τὸν 12, ὁ δὲ 2, ἔνθα τὸ ε, καὶ ἀφαιρεθήτω ὁ 8, ἀπὸ τοῦ 12, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἤτοι ὁ 4, γραφήτω ἔνθα τὸ η, ὑπὸ τὸν 8· δεύτερον προσεθήτω τῷ 4, τὸ δεύτερον μέρος ἤτοι ὁ 167, καὶ ἐπεὶ ἀφαιρεθέντος τοῦ 8, κύβου, κεῖται πρὸ τῶν ἄλλων τὸ τρὶς ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς πρώτης κύφρας τῆς ῥίζης, καὶ τῆς δευτέρας περιεχόμενον παραλληλεπίπεδον, εἰ καὶ μὴ διακριδὸν ὡς ἐπὶ τῶν στοιχείων, ἵνα εὑρεθῇ καὶ ἡ δευτέρα τῆς ῥίζης κύφρα, διαιρετέον τὸν 4, τὸ ἐναπολειφθὲν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 8. καὶ τὴν πρώτην κύφραν τοῦ προσκειμένου αὐτῷ τουτέστι τὸν 41, ἐπὶ τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ 2, ὅ ἐστιν ὁ 12, καὶ τὸ πηλίκον ὁ 3, ἡ δευτέρα ἐστὶ τῆς ῥίζης κύφρα· ἀλλ'

δ.	12,167	(23 ε.
ζ.	8	
η.	4,167	
θ.	12	
κ.	36	
λ.	54	
	27	
μ.	4167	
	0	

ἐπεὶ εἰσέτι ἐν τῷ αὐτῷ η, περιέχεται καὶ τὸ τρὶς ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς δευτέρας καὶ τῆς πρώτης περιεχόμενον παραλληλεπίπεδον, καὶ ὁ κύβος τῆς δευτέρας, ἐὰν ταῦτα συνάψαντες ἀφέλωμεν τὸν ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τοῦ η, καὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν οὐδὲν ἐναπολειφθῇ, εὔδηλον ὅτι ὁ δ, ἀριθμὸς κύβος ἐστὶ, καὶ ῥίζα αὐτοῦ ὁ ε· συναφθήτω δὴ ὁ 36, ὃς ἰσοδυναμεῖ τῷ 3600, ἤτοι τῷ τρὶς ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς πρώτης κύφρας τῆς ῥίζης, λέγω τοῦ 2, καὶ τοῦ 3, τῆς δευτέρας περιεχομένῳ παραλληλεπιπέδῳ τῷ τε 54, ἰσοδυναμοῦντι τῷ 240, ἤτοι τῷ τρὶς ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ 3, καὶ τοῦ 2, καὶ τῷ 27, τῷ τοῦ 3, κύβῳ, καὶ ἐξ αὐτῶν 4167, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ η, καὶ ἐπεὶ οὐδὲν ἐναπολέλειπται, κείσθω ζῆρος, δι' οὗ παρίσαται τὸν δ, εἶναι κύβον· ὡσαύτως κἂν πλείω ὦσι τὰ μέρη συνεχιζομένης τῆς πράξεως, ἡ ζητουμένη εὑρίσκεται ῥίζα· ἐὰν δὲ μετὰ τὴν ἐσχάτην ἀφαίρεσιν ἐναπολειφθῇ τι, ὁ δοθεὶς οὐκ ἂν εἴη κύβος. ἡ δὲ εὑρεθεῖσα ῥίζα τοῦ προσεχοῦς αὐτῷ κύβου ὑπάρχει ῥίζα· ἐκείνου δὲ οὐδέποτ' ἂν εὑρεθείη ἐν ἀριθμοῖς διὰ τὸ μὴ εἶναι ῥητήν· δυνατὸν μέντοι ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῶν μὴ τετραγώνων διὰ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων τὴν προσεχεστέραν ῥίζαν τῇ ζητουμένῃ εὑρίσκειν, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον, πλὴν ὅτι ἐπ' ἐκείνων δυάδας ἔδει προσκεῖσθαι ζήρων δεκαδικῶν, ἐπὶ τούτων δὲ τριάδας, ὃ ταυτὸν ἐστὶ τῷ πολλαπλασιάζειν τοὺς ἀμοιροῦντας ῥιζῶν κυβικῶν ἀριθμοὺς ἐπὶ δεκαδικοὺς κύβους.

Περὶ συνθέτων προβλημάτων.

Εἴρηται μὲν πρότερον ὅτι τῶν προβλημάτων τὰ μὲν εἰσὶν ἁπλᾶ, τὰ δὲ σύνθετα· ἀλλὰ τὰ εἴδη τῶν συνθέτων διάφορα ὑπάρχουσι· ἐφ' ὧν γὰρ τὸ ἀδήλου τινὸς σημαντικὸν στοιχεῖον τῆς κατ' αὐτὸ ἰσώσεως, ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν, εἴτουν τετράγωνον ἄνεισι, βαθμοδείκτην ἔχον τὸν 2, δευτέρου βαθμοῦ προσαγορεύονται τά τε τοιαῦτα προβλήματα, ϗ αἱ κατ' αὐτὰ ἰσώσεις· ἐφ' ὧν δὲ ἐπὶ τὴν τρίτην, εἴτουν κύβον βαθμοδείκτην ἔχον τὸν 3, τρίτου βαθμοῦ, ϗ τετάρτου, ϗ πέμπτου, ἢ ἄλλου τινὸς, εἴγε ἐπὶ τὴν τετάρτην καὶ πέμπτην, ἢ ἄλλην τινὰ δύναμιν τὸ στοιχεῖον ἀνέλθῃ· ἡμῖν μέντοι ἐπὶ τοῦ παρόντος πρόκειται περὶ τῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ διαλαβεῖν ὡρισμένων τε, ϗ ἀορίστων.

Περὶ ἀναλύσεως προβλημάτων ὡρισμένων βαθμοῦ δευτέρου.

Κἀπὶ τούτων ὥσπερ ϗ ἐπὶ τῶν ἁπλῶν χρησόμεθα τῇ πρώτῃ, καὶ δευτέρᾳ ϗ τρίτῃ πράξει τῆς ἀναλύσεως, τὰς ὑποθέσεις θηρώμενοι, ϗ τὰ στοιχεῖα προσοικειοῦντες, ϗ τὰς ἰσώσεις ἀνιχνεύοντες· τὴν δὲ τετάρτην πρᾶξιν περανοῦμεν διὰ τῶν ἑξῆς κανόνων.

Κανὼν πρῶτος.

Πρῶτον μεταποιηθείσης τῆς ἰσώσεως κατὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὥστε ἐν θατέρῳ μέρει ταύτης κεῖσθαι πρὸ πάντων τὸ ἔχον τὸν βαθμοδείκτην στοιχεῖον, ἀπολλαπλασίαστόν τε καὶ ἀδιαίρετον, ἐχομένως δὲ τὰ ἁπλᾶ, καὶ ὁμοειδῆ αὐτῷ στοιχεῖα, εἴγε τύχωσιν ὄντα, καθ' ἑαυτὰ ἢ μεθ' ἑτέρων, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ τὰ τῶν δήλων σημαντικά· καὶ ἀποβληθέντων κατὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ προβλήματι τῶν ἑτεροειδῶν ἐκείνῳ, ἀδήλων μέντοι σημαντικῶν, εἴγε εὑρεθῶσι, καὶ τοιαῦτα ἐπὶ τῆς ἰσώσεως, σκεπτέον ἐπιμελῶς προσκεῖσθαι ἀεὶ τῷ τὸν βαθμοδείκτην ἔχοντι στοιχείῳ τὸ τοῦ πλεονασμοῦ σύμβολον· ἀνεπίδεκτον γὰρ ἐστὶ πᾶν τετράγωνον συμβόλου λείψεως, καὶ τὸν πρῶτον αὐτῷ ἀποκληροῦσθαι τόπον, ἐν ᾧ μέρει ἀνήκει τῆς ἰσώσεως· οἷον ἐὰν διὰ τῆς τρίτης πράξεως τοιαύτη γένηται ἴσωσις $4\alpha\chi = 2\beta - 2\chi^2$ μεταποιηθήσεται ἔσχατον εἰς τήνδε $\chi^2 + 2\alpha\chi = \beta$.

Κανὼν δεύτερος.

Τούτων γενομένων, ἐὰν ἐν θατέρῳ μέρει τῆς ἰσώσεως εὑρεθῇ κείμενον τὸ ἀδήλου τινὸς παραστατικὸν στοιχεῖον καθ' ἑαυτὸ, ἔχον προσκείμενον αὐτῷ καὶ βαθμοδείκτην, ῥᾳδία ἔσται ἡ ἐπίλυσις· τῇ ἐξαγωγῇ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑκατέρωθεν· πλὴν ὅτι, ἐπὶ μὲν τοῦ ἔχοντος τὸν βαθμοδείκτην στοιχείου ἐνεργείᾳ ἀποτελεῖσθαι χρὴ, ἐπὶ δὲ τοῦ ἑτέρου, τέως μὴν παρίςασθαι διὰ τῆς προσθήκης τȣδὶ τȣ̃ συμβόλȣ $\sqrt{}$, ϗ οἱονεὶ δυνάμει τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης παρεμφαίνεσθαι· οἷον ἐπὶ τῆς δε τῆς ἰσώσεως $\chi^2 = \alpha - \beta$, εἰς τήνδε $\chi = \sqrt{(\alpha - \beta)}$.

Κανὼν τρίτος.

Ἐὰν δὲ ἀποτερματισθείσης κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα τῆς ἰσώσεως, ἔν τινι μέρει αὐτῆς εὑρεθῇ τὸ τοιȣ̃τον ςοιχεῖον, πρὸς τȣ́τῳ δὲ ϗ ἕτεροι ὅροι ἐν οἷς τὸ αὐτὸ ςοιχεῖον ἁπλȣ̃ν πρόσκειται, ὡς ἐςὶν ἰδεῖν ἐπὶ τȣ̃ ὑποδείγματος τȣ̃ πρώτȣ κανόνος, ȣ̓ χαλεπὸν ἐςὶ γνῶναι, ὅτι τὸ μὲν χ^2 ὑπάρχει τὸ πρῶτον μέρος, εἴτȣν τετράγωνον τȣ̃ ἐκ διμερȣ̃ς ῥίζης τετραγώνȣ, ὅπερ σημαίνεται ἐν τῇ διὰ ςοιχείων κατασκευῇ τȣ̃ τετραγώνȣ διὰ τȣ̃ α^2, οἱ δὲ προσκείμενοι αὐτῷ ὅροι, ἐν οἷς τὸ αὐτὸ ςοιχεῖον πρόσκειται ἁπλȣ̃ν, τὸ ἕτερον μέρος τȣ̃ τετραγώνȣ σημαινόμενον ἐν τῇ αὐτῇ κατασκευῇ, διὰ τȣ̃ $+ 2\alpha\beta$, ἢ $- 2\alpha\beta$, καὶ ἑπομένως, ὅτι τῷ αὐτῷ μέρει τῆς ἰσώσεως ἐνδεῖ τὸ δεύτερον τετράγωνον τῆς διμερȣ̃ς ῥίζης, τȣτέςι τὸ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ ςοιχείου ταύτης, καὶ τὸ μέρος ἐκεῖνο ὑπάρχειν τετράγωνον κολοβόν· οἷον ἐπὶ τῆς δε τῆς ἰσώσεως $\chi^2 - 4\alpha\chi = 2\beta - 4\alpha^2$, τὸ μὲν χ_2 λογισθήσεται πρῶτον μέρος τȣ̃ ἀπὸ ῥίζης διμερȣ̃ς τετραγώνȣ, τὸ δὲ $- 4\alpha\chi$, δεύτερον, ὅπερ σημαίνεται διὰ τȣ̃ $- 2\alpha\beta$, ἐν τῇ κατασκευῇ· ταῦτ᾽ ἄρα τὸ πρῶτον τῆς ἰσώσεως ταύτης μέρος τὸ $\chi^2 - 4\alpha\chi$, ἔςαι τετράγωνον κολοβὸν ῥίζης διμε-

ρȣ̃ς,

ρους, ἐνδέοντος μόνου τοῦ τετραγώνου, τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ῥίζης, ὃ σημαίνεται διὰ τοῦ β^2 εἰς συμπλήρωσιν τοῦ ὅλου τετραγώνου, ἣν γενέσθαι χρεὼν εἰς εὕρεσιν τῆς σημασίας τῶν ἐν τῇ Ἰσώσει ἀγνοουμένων· ἀλλὰ πρὸ τοῦ ἐγχειρῆσαι τῇ τοιαύτῃ συμπληρώσει περαινομένῃ διὰ τῶν ἑξῆς τετάρτου καὶ πέμπτου κανόνων, ἐξαχθήτω πρῶτον ἡ τετράγωνος ῥίζα τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ὅλου τετραγώνου τοῦ ἀπὸ διμεροῦς ῥίζης συνισαμένου, οἷον ἐνταῦθα παρίσαται τὸ χ^2, καὶ ἡ εὑρεθεῖσα ἔσαι πρῶτον μέρος τῆς διμεροῦς ῥίζης, ἀφ' ἧς συνίσαται τὸ ὅλον τετράγωνον· δεύτερον. διαιρεθήτω τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἀπὸ διμεροῦς ῥίζης τετραγώνου ἐπὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου μέρους τοῦ αὐτοῦ ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος τὸ $-4\alpha\chi$ ἐπὶ τὸ -2χ, καὶ τὸ πηλίκον 2α ἔσαι δεύτερον μέρος τῆς διμεροῦς ῥίζης· τελευταῖον σημειωθήτω ἥτε διμερὴς αὐτὴ ῥίζα, καὶ τὸ δεύτερον αὐτῆς μέρος τετραγωνισθὲν, οἷα εἰσὶν ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὑποδείγματος ἡ $\chi-2\alpha$ ῥίζα, καὶ τὸ $4\alpha^2$ τὸ δεύτερον αὐτῆς μέρος τετραγωνισθέν.

Κανὼν τέταρτος.

Πέρας τούτου λαβόντος σκεπτέον, εἴγε τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης κεῖται ἐν τῷ ἑτέρῳ μέρει τῆς Ἰσώσεως, ἐν ᾧ τὰ τῶν δήλων σημαντικὰ σοιχεῖα ὑπάρχει καθ' ἑαυτὰ, καὶ ὁποῖον σύμβολον πρόσκειται αὐτῷ· κἂν μὲν κεῖται ἔχον τὸ τῆς λείψεως σύμβολον, μετακομιαθήτω ἐναλλαττομένου καὶ τοῦ συμβόλου, ἐπὶ τὸ ἕτερον τῆς Ἰσώσεως μέρος, ἐν ᾧ εἰσὶ τὰ τῶν ἀδήλων σημαντικὰ στοιχεῖα· τούτου γὰρ γενομένου τὸ μέρος αὐτὸ ὁλόκληρον ἔσται τετράγωνον ἀπὸ ῥίζης διμεροῦς ἤδη ποριαθείσης διὰ τοῦ τρίτου κανόνος· καὶ γὰρ συνέστηκεν ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τοῦ πρώτου μέρους τῆς ῥίζης τετραγώνου, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸ δεύτερον, καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου, ὡς ἐν τῷ ἀρτίως προχειριαθέντι ὑποδείγματι, τουτέστι τῇ $\chi^2 - 4\alpha\chi = 2\beta - 4\alpha^2$ ἰσώσει. ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ῥίζης τετράγωνον ἤτοι τὸ $4\alpha^2$ εὑρίσκεται μετὰ τῶν σημαντικῶν στοιχείων τῶν ἀδήλων, ἔχει τε προσκείμενον τὸ τῆς λείψεως σύμβολον, μετατίθεται ἀπὸ θατέρου μέρους τῆς ἰσώσεως ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἀναφύεται ἡ τοιαύτη ἴσωσις $\chi^2 - 4\alpha\chi + 4\alpha^2 = 2\beta$, ἧς τὸ πρῶτον μέρος ὁλόκληρον παρίστησι τετράγωνον ῥίζης διμεροῦς· συνίσταται γὰρ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τοῦ πρώτου μέρους τῆς ῥίζης τετραγώνου, λέγω τοῦ χ^2, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ δεύτερον τοῦ $4\alpha\chi$, καὶ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἤτοι τοῦ $4\alpha^2$. Ἑπομένως τοίνυν ἐξαχθήτω ἑκατέρωθεν ἡ τετράγωνος ῥίζα· ἀλλὰ τοῦ μὲν πρώτου μέρους τῆς ἰσώσεως ταύτης ἡ ῥίζα δέδοται ἐν τῷ τρίτῳ κανόνι. τοῦ δὲ λοιποῦ προσημαινέτω τέως τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης τὸ τῆς ῥίζης σύμβολον αὐτῷ προσκείμενον· οὕτω γὰρ ἡ προεκτεθεῖσα ἴσωσις $\chi^2 - 4\alpha\chi + 4\alpha^2 = 2\beta$ εἰς ταύτην $\chi - 2\alpha = \sqrt{2\beta}$ μεταποιηθήσεται, καὶ αὐτὴ τῇ μεταθέσει τοῦ 2α, ἑαδίως εἰς τὴν $\chi = (\sqrt{2\beta}) + 2\alpha$, ἐν ᾗ τὸ τȣ͂ ἀδήλȣ ςοιχεῖον μεμόνωται.

Διώρισαι δὲ ἀνωτέρω, τηνικαῦτα μετατίθεσθαι τὸ ἀπὸ τȣ͂ δευτέρου μέρȣς τῆς ῥίζης τετράγωνον, ἡνίκα ἔχει τὸ τῆς λείψεως σύμβολον προσκείμενον, καὶ ἐναλλάττεσθαι τὸ σύμβολον· ὅτι, εἰ μὴ τȣ͂το προσῆ, ἀνοικείως ἔχει πρὸς ὁλοκλήρȣ τετραγώνȣ συμπλήρωσιν· ληφθήτω γὰρ ἡ τοιάδε Ἴσωσις $\chi^2 - 4\alpha\chi = 2\beta + 4\alpha^2$ ἐπὶ ταύτης γȣ͂ν, εἰ καὶ τὸ $+ 4\alpha^2$, ὑπάρχει τῷ ὄντι τετράγωνον τȣ͂ δευτέρȣ μέρȣς τῆς ῥίζης, μέντοιγε ἐναλλαττομένȣ τȣ͂ συμβόλȣ, καὶ μεταλιθεμένȣ εἰς τὸ ἕτερον μέρος ὥστε γενέσθαι ταύτην τὴν ἴσωσιν $\chi^2 - 4\alpha\chi - 4\alpha^2 = 2\beta$, ȣ̓ συμπληρȣ͂ται τὸ ὅλον τετράγωνον· ȣ̓ γὰρ ἂν εἴη τὸ $- 4\alpha^2$, τὸ ἀπὸ τȣ͂ δευτέρȣ μέρȣς τῆς ῥίζης τετράγωνον, τȣ͂το γὰρ τὸ μέρος ἢ τὸ τῆς ὑπάρξεως, ἢ τὸ τῆς λείψεως σύμβολον ἕξει προσκείμενον· ἀλλὰ κατ' ȣ̓δέτερον τρόπον γένοιτ' ἂν ἀπ' αὐτȣ͂ τὸ $- 4\alpha^2$, ὡς ὕπαρξιν ποιȣ́σης τῆς τῶν συμβόλων ταὐτότητος.

Κανὼν πέμπτος.

Καὶ ταῦτα μὲν ὁπηνίκα τὸ ἀπὸ τȣ͂ δευτέρου μέρους τῆς ῥίζης τετράγωνον κεῖται μετὰ τȣ͂ συμβόλȣ τῆς λείψεως ἐν τῷ μέρει τῆς ἰσώσεως, ἐν ᾧ καὶ τὰ τῶν δήλων σημαντικὰ ςοιχεῖα· ἐὰν δὲ γενομένης τῆς πράξεως κατὰ τὸν τρίτον κανόνα ȣ̓χ ȣ̔́τως εὑρίσκεται· προσκείσθω τὸ τοιοῦτον τετράγωνον ἑκατέρῳ μέρει τῆς Ἰσώσεως μετὰ συμβόλου τῆς ὑπάρξεως· τοῦτον γὰρ τὸν τρόπον τό,τε κολοβὸν τετράγωνον συμπληρωθήσεται, καὶ ἡ Ἰσότης τῶν τῆς Ἰσώσεως μερῶν ἀριδήλως σωθήσεται· ἔστω γὰρ ἴσωσις $\chi^2 + 2\alpha\chi = \beta$. ληφθήτω κατὰ τὸν τρίτον κανόνα τὸ χ^2 πρῶτον μέρος τοῦ ἀπὸ διμεροῦς ῥίζης τετραγώνου, καὶ τὸ $2\alpha\chi$ δεύτερον τοῦ αὐτοῦ· καὶ ἑπομένως ἔσται πρῶτον τῆς ῥίζης μέρος τὸ χ· ἐὰν δὲ ἐπὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ ἤτοι τὸ 2χ διαιρεθῇ, τὸ $+ 2\alpha\chi$ ἐξαχθήσεται τὸ δεύτερον μέρος τῆς ῥίζης τὸ $+ \alpha$, οὗ τετράγωνον τὸ α^2, καὶ ἡ ὅλη ῥίζα ἔσται $\chi + \alpha$· ἐπεὶ δὲ τὸ τετράγωνον α^2 οὐχ εὑρίσκεται ἐν τῇ ἀνωτέρω Ἰσώσει, προσετεθήτω ἑκατέρῳ μέρει τῆς αὐτῆς ἵνα γένηται αὕτη $\chi^2 + 2\alpha\chi + \alpha^2 = \beta + \alpha^2$· καὶ οὕτως ἔσται τὸ πρῶτον μέρος τῆς Ἰσώσεως τὸ ἀπὸ διμεροῦς ῥίζης τῆς $\chi + \alpha$ ὁλόκληρον τετράγωνον· ἐὰν δὲ ἐξαχθῇ ἡ τετράγωνος ῥίζα ἑκατέρωθεν, καὶ μετατεθῇ τὸ α, ἔσται $\chi + \alpha = \sqrt{(\beta + \alpha^2)}$, καὶ τελευταῖον $\chi = \sqrt{(\beta + \alpha^2)} - \alpha$.

Ἡ δὲ πέμπτη τῆς ἀναλύσεως πρᾶξις καὶ ἐπὶ τούτων παραπλησίως τοῖς ἀνωτέρω γίνεται κυφρῶν ἀντεισαγομένων ταῖς ἰσώσεσιν· οἷον ἐπὶ τῆς προκειμένης $\chi = \sqrt{(\beta + \alpha^2)} - \alpha$· κείσθω τὸ μὲν $\alpha = 5$, τὸ δὲ $\beta = 24$· ἔσται $\chi = \sqrt{(24 + 25)} - 5$, ἤτοι $= \sqrt{(49)} - 5$, ἤτοι $= 7 - 5$, ὅ ἐστι $= 2$.

Ὑποσημείωσις.

Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων γίνεται φανερὸν τί ποτ᾽ ἂν εἴη τετράγωνον κολοβὸν, καὶ πότε καὶ ὅπως ἂν συμπληρωθείη· ἀμέλει τοι ἡνίκα ἐπί τινος Ἰσώσεως δευτέρου βαθμοῦ, περὶ γὰρ τῶν ἄλλων οὐ τοῦ παρόντος σκοποῦ, κατὰ τὸν ἀνωτέρω πρῶτον κανόνα περανθείσης, θάτερον αὐτῆς μέρος τὸ περιεκτικὸν τῶν ἀδήλων ἑνὸς φημὶ, ἢ πλειόνων ἁπλῶν περιέχῃ προσέτι καὶ τετράγωνον τινὸς τούτων, τὸ μέρος ἐκεῖνο κολοβὸν ὑπάρχει τετράγωνον ῥίζης διμεροῦς· καὶ γὰρ ἐνυπάρχει αὐτῷ τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου μέρους τῆς ῥίζης τετράγωνον, καὶ τὸ διπλάσιον τούτου πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς αὐτῆς ἐνδέοντος τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου καθορᾶται κανόνος. Ἐπάναγκες τοίνυν ἐστὶ συμπληρωθῆναι τὸ τοιοῦτον τετράγωνον, ἵνα σωζομένης τῆς ἰσότητος ἥτε ῥίζα ἐξαχθῇ, καὶ δι᾽ αὐτῆς ἡ τοῦ ἀδήλου σημασία ἀνακαλυφθῇ, ἅπερ οὐκ ἂν συμβαίη μὴ συμπληρωθέντος τοῦ τετραγώνου· ταῦτ᾽ ἄρα εἰς τὴν τοῦ τετραγώνου συμπλήρωσιν εὑρίσκειν πρῶτον δέον κατὰ τὸν τρίτον κανόνα τὰ μέρη τῆς ῥίζης, καὶ τετραγωνίζειν ἐξ αὐτῶν τὸ δεύτερον, ἔπειτα σκοπεῖν ὁποῖον αὐτῷ σύμβολον πρόσκειται· ἐὰν γὰρ τὸ τῆς λείψεως εὑρεθῇ προσκείμενον, κατὰ τὸν τέταρτον συμπληρωθήσεται κανόνα, εἰδὲ τὸ τῆς ὑπάρξεως, κατὰ τὸν πέμπτον.