ϛ'.

§. 103.

Ζητηθήτω ἡ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις τοῦ ἀπὸ τῆς Καθέτου Τετραγώνου ΝΜ².

ΛΥΣΙΣ.

Ἐκ τοῦ Η'. Προβλήματος (§. 78.) ἐπίδηλον ὅτι

$$ΝΜ^2 = ΠΜ^2 + ΠΝ^2 = \pm ββ \mp \frac{ββχχ}{αα} +$$

(§. 85. καὶ 97.) $+ \left(\frac{ββχ}{αα}\right)^2$. ἢ $ΝΜ^2 = ΠΜ^2 +$

$$ΠΜ^2 = \pm \tfrac{1}{2} απ \mp \frac{πχχ}{2α} + \left(\frac{πχ}{2α}\right)^2$$ οὐκοῦν $ΝΜ^2 =$

$$\frac{\pm α^4 ββ \mp α^2 β^2 χ^2 + β^4 χ^2}{α^4}, \text{ ἢ } = \pm$$

$$\frac{2α^3χ \mp 2απχχ + ππχχ}{4αα},$$ ἡ ζητουμένη Ἐξίσωσις διττακῶς ἀποδοθεῖσα, τῇ μὲν δηλονότι τὴν δευτέραν Διάμετρον περιέχουσα, τῇ δὲ, τὴν Παράμετρον.

Ζ'.

§. 104.

Ζητηθήτω ἡ τῆς ΣΝ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις.

Λ Υ' Σ Ι Σ.

Ἔϛι $\Sigma N = \Sigma \Pi + \Pi N = \pm \alpha \mp \chi + \frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$,

ἢ $\Sigma N = \Sigma \Pi + \Pi N = \pm \alpha \mp \chi + \frac{\pi\chi}{2\alpha}$. ἄρα $\Sigma N = \pm \frac{\alpha^3 \mp \alpha\alpha\chi - \beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$, ἢ $= \pm \frac{2\alpha\alpha \mp 2\alpha\chi + \pi\chi}{2\alpha}$.

Η'.

§. 105.

Ζητηθήτω ἡ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις τοῦ ἀπὸ τῆς Ἐφαπτομένης Τετραγώνου MT^2.

Λ Υ' Σ Ι Σ.

Ἔϛιν, ὡς κἀν τῷ Ι'. Προβλήματι (§. 83.) $\Pi M^2 + \Pi T^2 = TM^2 = \pm \beta\beta \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} \pm \left(\frac{\alpha\alpha \mp \chi\chi}{\chi}\right)^2 = \frac{\alpha^6 - 2\alpha^4\chi\chi + \alpha\alpha\chi^4 \pm \alpha^2\beta^2\chi^2 \mp \beta\beta\chi^4}{\alpha\alpha\chi\chi}$. ἢ $\Pi M^2 + \Pi T^2 = TM^2 = \pm \frac{1}{2}\alpha\pi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha} \pm \left(\frac{\alpha\alpha \mp \chi\chi}{\chi}\right)^2 = \pm \frac{\alpha\alpha\pi \mp \pi\chi\chi}{2\alpha} +$

$$\frac{\alpha^4 - 2\alpha\alpha\chi\chi + \chi^4}{\chi\chi} = \frac{2\alpha^5 - 4\alpha^3\chi\chi + 2\alpha\chi^4 \pm \alpha^2\pi\chi\chi \mp \pi\chi^4}{2\alpha\chi\chi}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄.

§. 106.

Ἐπειδὴ τὸ γ οὐδενὶ τύπῳ τῶν ἡγουμένων Προβλημάτων ἔνεστιν. Ἐκ τούτου ἄρα σαφὲς, ὡς οἱ αὐτοὶ τύποι ἐπίσης καὶ τῷ δευτέρῳ τῶν κατὰ τὴν Ἔλλειψιν καὶ Ὑπερβολὴν Ἀξόνων ἐπανήκουσι, καὶ τὰ προϊόντα τῶν ἰδιωμάτων αὐτῶν ἐκτιθέασι. Χρὴ μόνον τὰ στοιχεῖα προσφυῶς μεταλλάττειν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄.

§. 107.

Σχ. 14. Ἐπειδήπερ τὸ μὲν τοῦ κατὰ τὰς ἀντικειμένας Ὑπερβολὰς ΜΣμ, Οσο, δευτέρου Ἄξονος Λλ μέγεθος τῇ ἐκ τοῦ σημείου Σ ἐπὶ τὰ Λ, λ μεταθέσει τῆς ΓΖ, ἢ Γζ, προσδιορίζεται. Τῶν δ' Ἀσυμπτώτων ἡ θέσις (§. 77.) ἐὰν αἱ ΣΒ, Σb ταῖς Γλ, ΓΛ ἴσαι γένωνται, ἐντεῦθεν ἄρα ληφθεισῶν τῶν ΓΦ, Γφ ἴσων ταῖς ΛΣ, λΣ, αἱ μὲν ἐπιζευγνύμεναι Bb, βB διὰ τῶν σημείων Λ, λ διελεύσονται, αἱ δὲ Λβ, Λb ταῖς ΓΣ, Γσ ἐξισωθήσονται, ὡσαύτως δὲ ϗ αἱ λβ, ΛΒ. Ἐὰν ἄρα ἀντὶ μὲν Ἐσιῶν τὰ σημεῖα Φ, φ ληφθῶσιν, ἀντὶ δὲ πρώτȣ Ἄξονος ἡ Λλ εὐθεῖα, καταγραφῆναι δύνανται δι' αὐτῶν αἱ ἀντικείμεναι Ὑπερβολαὶ δΛΔ, Νλν, ὧν Ἀξων μὲν δεύτερος ὁ Σσ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ αὐταὶ ἔσονται Ββ, βb. Αὗται δὴ αἱ δύω Ὑπερβολαὶ κατὰ ΣΥΖΥΓΙ'ΑΝ Α'ΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑΙ ταῖς ΜΣμ, Οσο, αἱ δ' αὖ ΜΣμ, Οσο, ὡσαύτως ταύταις κατὰ *Συζυγίαν Ἀντικείμεναι* ἀκούουσιν.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Θ'.

§. 108.

Ἐπίδηλον ἄρα πάσας τὰς Ἐξισώσεις, τȣ́ς τε δι' αὐτῶν τύπȣς, ϗ τὰ ἰδιώματα τῶν Ὑπερβολῶν ΜΣμ, Οσο ἐπανήκειν ἔτι ϗ ταῖς κατὰ Συζυγίαν αὐταῖς Ἀντικειμέναις. Ἀνάγκη μόνον κατὰ τὸ δέον τὰς παρονομασίας μεταλλάττειν, οἷον τὴν Λλ πρῶτον Ἄξονα καλεῖν, τὴν Σσ δεύτερον, κτλ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Ι'.

§. 109.

Ὡσαύτως δῆλον τȣ̀ς ὀκτὼ τῶν τεσσάρων συζυγῶν Ὑπερβολῶν κλῶνας ἐκεῖθι συνέρχεσθαι ἀλλήλοις ἀδιατμήτως ἀνὰ δύω, ἔνθ᾽ ἂν αἱ Ἀσύμπτωτοι αὐτῶν ἐπιψαύωσιν (ὅ ἐςιν ἐν διαςήματι ἀπείρῳ) καὶ ὅτως ἀπογεννᾶσθαι σχῆμα περατέμενον ἐπὶ τοῖς τέσσαρσι τῆς Συνδρομῆς σημείοις, τοῖς ἀπὸ τῦ Κέντρυ ἀπείρως διαςηκόσιν. Αὐτὸ δὴ τῦτο τὸ σχῆμα θεωρηθῆναι ἔχει ὡς Πολύγωνον κανονικὸν συγκροτύμενον ὑπὸ Γωνιῶν εἰσεχυσῶν μὲν, εἴτ᾽ ὖν κυρτῶν ἀπείρων, καὶ ἀπειράκις ἐλάχιςα ὑπερεχυσῶν (§. 135. Γεωμετρ.) Ὀρθῶν δυεῖν, ἐξεχυσῶν δὲ, ἀπειράκις Ὀξειῶν τεσσάρων. Ὥςε τὸ ὑπὸ τῶν τεσσάρων Ὑπερβολῶν περιεχόμενον χωρίον θεωρεῖσθαι δύναται, καθάπερ τὸ τῆς Ἐλλείψεως ἐμβαδόν. Οὐκῦν ἐν τοῖς ἐφεξῆς θεωρηθήσεται, ὡς εἴπερ ὑπὸ μιᾶς ἐπερατῦτο Καμπύλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Β'.

Περὶ τῶν κατὰ τὰς Κωνικὰς Τομὰς, ὅσα ἐκ τῶν κατ' αὐτὰς Διαμέτρων πηγάζει, Ἰδιωμάτων.

§. 110.

ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ τῆς Κωνικῆς Τομῆς καλεῖται Εὐθεῖα ἥτισοῦν διὰ τοῦ Κέντρου διήκουσα, καὶ πρὸς τῇ Καμπύλῃ περατουμένη (§. 20.)· οὗ εὐμαρῶς δείκνυται (§. 11, 37, 38, καὶ κατωτέρω §. 115.) ἁπάσης Διαμέτρου κοινὸν εἶναι τὸ διχοτομεῖν ἑκάστην ἑαυτῆς διπλῆν Τεταγμένην.

§. 111.

Τὸ τῆς Διαμέτρου μέγεθος περιορίζεται ὑπὸ Σχ.
σημείων δυοῖν, καθ' ἃ ἑκατέρωσε τῇ Τομῇ προσαν- 14.
τᾷ, ἅτινα ἈΡΧΑΙ καλοῦνται τῆς διαμέτρου. Οὕτως 16.
ΟΜ, ΝΔ Διάμετροί εἰσι δύω, περιοριζόμεναι ὑπὸ τῶν σημείων Ο, Μ, καὶ Ν, Δ, ἅπερ εἰσὶν αἱ αὐτῶν Ἀρχαί.

§. 112.

Ἐπεὶ δὲ τὸ τῆς Παραβολῆς Κέντρον ἀπείρως ἐπινοεῖται τῆς ἐν αὐτῇ Κορυφῆς ἀφεστηκὸς, ἐκ τούτου ἄρα ϗ ἡ ἐκεῖθεν ἔςγε τὴν Καμπύλην ἤκȣσα Εὐθεῖα παράλληλός ἐςι τῷ Α῎ξονι. Οὐκȣ̃ν ἡ τῆς Παραβολῆς Διάμετρος ἀπέραντός ἐςιν εὐθεῖα, ἀφ᾿ ὁτινοσȣ̃ν τῶν ἐπ᾿ αὐτῆς σημείων, ὃ ἂν ὡς Α᾿ρχὴ αὐτῆς ἐκλαμβάνοιτο, παραλλήλως ἀγομένη τῷ Α῎ξονι. Τοιάδε ἐςὶν ἡ Διάμετρος Μζ.

§. 113.

Σχ. 13. Διάμετρὸς ΣΥΖΥΓΗΣ ἑτέρᾳ Διαμέτρῳ καλεῖται ἡ παράλληλος ταῖς ἐπ᾿ αὐτῆς τῆς ἑτέρας Τεταγμέναις, ἢ τῇ Ε᾿φαπτομένῃ τῇ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς τῆς ἑτέρας ἀγομένῃ· οἷον ΝΔ Διάμετρός ἐςι
Σχ. 14. 16. Συζυγὴς τῇ Διαμέτρῳ ΜΟ, εἴγε ΝΔ παράλληλός ἐςι τῇ διὰ τȣ̃ Μ διϊȣ́σῃ Ε᾿φαπτομένῃ, ϗ τἀνάπαλιν, ἡ ΜΟ ἔςι Διάμετρος Συζυγὴς τῇ Διαμέτρῳ ΝΔ.

§. 114.

Ε᾿πεὶ δὲ κατὰ τὴν Παραβολὴν ȣ̓δεμία τις Εὐθεῖα πεπερασμένη ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἀχθῆναι δύναται, ἐκ τȣ́τȣ δὴ ἕπεται μὴ ἐνυπάρχειν αὐτῇ Συζυγεῖς Διαμέτρȣς.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Α΄.

§. 115.

Διάμετρος ἥτισοῦν ἡ ΝΔ ἐν τῷ Κέντρῳ Γ δίχα τέμνεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Ν ἐπὶ θατέρου Ἄξονος ἡ Τεταγμένη ΝΞ, καὶ γεγονέτω ΓΕ = ΓΞ, καὶ ἐστάθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Ἄξονος ἡ ΕΔ, ἥτις δὴ συμβαλεῖ τῇ Διαμέτρῳ ΝΔ κατὰ τὸ σημεῖον Δ, ὃ ἐστι κοινὸν καὶ πρὸς τὴν τομήν. Τὰ γάρ τοι τρίγωνα ΓΞΝ, ΓΕΔ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, ἐκ κατασκευῆς. Οὐκοῦν ΓΔ = ΓΝ, καὶ ΔΕ = ΝΞ. Ἀλλ' αἱ ἰσοδιεστῶσαι τοῦ κέντρου Τεταγμέναι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, (§. 31.) Ἐπεὶ ἄρα ΝΞ ἐστι Τεταγμένη, ἔσεται καὶ ἡ αὐτῇ ἴση ΔΕ Τεταγμένη· τὸ ἄρα Δ σημεῖον ἐστιν ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ δε ΝΔ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Γ. Σχ. 14. 16.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

§. 116.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων Ν, Μ δυεῖν συζυγῶν Διαμέτρων ἀχθῶσιν αἱ ΜΠ, ΝΞ τεταγμένως ἐπὶ τȣ̃ πρώτȣ Ἄξονος Σσ, ἔςαι τὸ τετράγωνον $(\Gamma\Xi)^2$ τὸ ἀπὸ τῆς Ἀποτετμημένης τῆς μεταξὺ τȣ̃ Κέντρȣ Γ, ϗ τῆς ἑτέρας Τεταγμένης, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν Ἀποτετμημένων τῆς ἑτέρας Τεταγμένης, εἴτ' ȣ̃ν $= \Sigma\Pi . \Sigma\sigma$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 16. *Τηρȣμένων τῶν αὐτῶν ὀνομάτων τοῖς ἐν τῷ* ΙΑ *προβλήματι, εἴτ' ȣ̃ν* $\Gamma\Pi = \chi$, ϗ $\Sigma\Pi = \alpha - \chi$, ϗ $\sigma\Pi = \alpha + \chi$, ϗ *ἔτι τῆς* ΓΞ *ῥηθείσης ἰδίῳ ὀνόματι* $= \kappa$, *ἐξ ȣ̃* ϗ $E\Xi = \alpha - \kappa$, ϗ $\sigma\Xi = \alpha + \kappa$, *ἔςαι ἐν τῇ ἐλλείψει* (§. 61.) $\sigma\Pi . \Pi\Sigma : \sigma\Xi . \Xi\Sigma :: \Pi M^2 : N\Xi^2$, ϗ *ἀναλυτικοῖς ὅροις*, $\alpha\alpha - \chi\chi : \alpha\alpha - \kappa\kappa :: \Pi M^2 : N\Xi^2$. Ἔςι *δὲ παρὰ ταῦτα (διὰ τὴν τῶν τριγώνων* ΤΠΜ, ΓΝΞ *ὁμοιότητα)* $T\Pi^2 : \Gamma\Xi^2 :: \Pi M^2$ $N\Xi^2$, *εἴτ' ȣ̃ν* (§. 98) $\left(\frac{\alpha\alpha - \chi\chi}{\chi}\right)^2 : \kappa\kappa :: \Pi M^2 :$

$N\Xi^2$ · ἄρα $\alpha\alpha - \chi\chi : \alpha\alpha - \kappa\kappa :: \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi\chi}:$ $\kappa\kappa$, ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις $\alpha\alpha\,\kappa\kappa - \kappa\kappa\,\chi\chi = \frac{(\alpha\alpha - \kappa\kappa).(\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4)}{\chi\chi}$, καὶ: $\alpha^2\kappa^2\chi^2 - \kappa^2\chi^4 = \alpha^6 - 2\alpha^4\chi^2 + \alpha^2\chi^4 + \kappa^2\chi^4 - 2\alpha^2\kappa^2\chi^2 + \kappa^2\chi^4 = \alpha^6 - 2\alpha^4\chi\chi + \alpha^2\chi^4$, ὅθεν (ἀναγωγῇ) $\alpha^4\kappa\kappa - \alpha^2\kappa^2\chi^2 = \alpha^6 - 2\alpha^4\chi\chi + \alpha^2\chi^4$, καὶ (διὰ $\alpha\alpha$ διαιρέσει) $\alpha\alpha\,\kappa\kappa - \kappa\kappa\,\chi\chi = \alpha^4 - 2\alpha\alpha\,\chi\chi + \chi^4$, ὅ ἐστιν $(\alpha\alpha - \chi\chi)\,\kappa\kappa = (\alpha\alpha - \chi\chi).(\alpha\alpha - \chi\chi)$. ἐκεῖν τέως: $\kappa\kappa = \alpha\alpha - \chi\chi$· σαφὲς ἄρα ὅτι $\Gamma\Xi^2 = \sigma\Pi\,.\,\Pi\Sigma$.

Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ἔσται $\sigma\Pi.\Pi\Sigma : \Gamma\Xi^2 + \Gamma\Sigma^2 :: \Pi M^2 : N\Xi^2$. Ἡ γάρτοι Ὑπερβολὴ Νλν (ὅ ἐστι τὸ τέταρτον τῆς τοῦ ὁλικοῦ σχήματος περιμέτρου. §. 109.) ἡ τῇ ΜΣμ Συνεζευγμένη, ᾗ ἐπανήκουσι πάντα τὰ κἀκείνῃ προσόντα ἰδιώματα (§. 108.) ἔχει μείζονα μὲν (πρῶτον) Ἄξονα τὴν Λλ; ἐλάσσω δὲ (δεύτερον) τὴν Σσ. Ταῦτ' ἄρα ἡ ἐν τῷ §. 94. ἔκφρασις τῆς ἀναλογίας ἐφαρμοσθεῖσα τῇ Νλν Ὑπερβολῇ γενήσεται οὕτω „Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ἐ„πὶ τοῦ δευτέρου Ἄξονος τετράγωνον ($N\Xi^2$) πρὸς τὸ „ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦτε ἀπὸ τῆς αὐτῇ „συστοιχούσης Ἀποτετμημένης ἀπὸ τοῦ κέντρου ($\Gamma\Xi^2 +$) Σχ. 14.

,,ϗ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ Ἡμιδευτέρȣ Ἄξονος ($\Gamma\Sigma^2$) λόγον ἔ-
,,χει, ὃν τὸ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ Ἡμιάξονος Τετράγωνον
,,($\Gamma\Lambda^2$) πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ̃ ἡμιδευτέρȣ ($\Gamma\Sigma^2$)" ὅ ἐϛι
$\Xi N^2 : \Gamma\Xi^2 + \Gamma\Sigma^2 :: \Gamma\Lambda^2 : \Gamma\Sigma^2$.

Ἀλλ' ἐν τῇ ΜΣμ Ὑπερβολῇ, ἧς πρῶτος μὲν Ἄξων ἡ Σσ, δεύτερος δὲ ἡ Λλ, ἔϛι (§. 61.) τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ἐπὶ τȣ̃ πρώτȣ Ἄξονος Τετράγωνον (ΠM^2) πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν συϛοιχȣσῶν Ἀποτετμημένων γινόμενον ($\sigma\Pi . \Pi\Sigma$) ὡς τὸ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ Ἡμιάξονος Τετράγωνον ($\Gamma\Lambda^2$) πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ Ἡμιάξονος ($\Gamma\Sigma^2$), εἶτ' ȣ̃ν $\Pi M^2 : \sigma\Pi . \Pi\Sigma :: \Gamma\Lambda^2 : \Gamma\Sigma^2$. ȣ̓κȣ̃ν $\Xi N^2 : \Gamma\Xi^2 + \Gamma\Sigma^2 :: \Pi M^2 : \sigma\Pi . \Pi\Sigma$. ἄρα ϗ $\sigma\Pi . \Pi\Sigma : \Gamma\Xi^2 + \Gamma\Sigma^2 :: \Pi M^2\ \Xi N^2$· ϗ ἐν ὅροις ἀναλυτικοῖς· $-\alpha\alpha + \chi\chi : \kappa\kappa + \alpha\alpha :: \Pi M^2 : \Xi N^2$. Εἰσὶ δὲ παρὰ ταῦτα τὰ τρίγωνα ΜΤΠ, ΞΓΝ ἀλλήλοις ὅμοια, εἴγε ȣ̓́σης (ἐξ ὑποθέσεως) τῆς ΜΘ παραλλήλȣ τῇ ΔΓΝ ἡ ἐντὸς ὑπὸ ΓΤΘ ἴσȣται τῇ ἐκτὸς ὑπὸ ΞΓΝ· ȣ̓κȣ̃ν ϗ ὑπὸ ΞΓΝ = ΠΤΜ. Διὰ ταῦτα τοίνυν ἔϛι $T\Pi : \Gamma\Xi :: \Pi M : N\Xi$, ϗ $T\Pi^2 : \Gamma\Xi^2 :: \Pi M^2 : N\Xi^2$; ϗ ἐν ἀναλυτικοῖς ὅροις (§. 98.)

$$\left(-\frac{\alpha\alpha+\chi\chi}{\chi}\right)^2 : \kappa\kappa :: \Pi M^2 : N\Xi^2$$

· ἄρα ϗ $-\alpha\alpha +$

$$\chi\chi : \kappa\kappa + \alpha\alpha :: \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi\chi} : \kappa\kappa,$$

ὅθεν ἡ Εξίσωσις $-\alpha^2\kappa^2+\kappa^2\chi^2=\frac{\alpha^6-2\alpha^4\chi^2+\alpha^2\chi^4}{}$ $+\frac{\alpha^4\kappa^2-2\alpha^2\kappa^2\chi^2+\kappa^2\chi^4}{\chi\chi}$, ϗ $-\alpha^2\kappa^2\chi^2+\kappa^2\chi^4=\alpha^6-2\alpha^4\chi^2+\alpha^2\chi^4+\alpha^4\kappa^2-2\alpha^2\kappa^2\chi^2+\kappa^2\chi^4$, καὶ $-\alpha^2\kappa^2\chi^2+\kappa^2\chi^4-\alpha^4\kappa^2+2\alpha^2\kappa^2\chi^2-\kappa^2\chi^4=\alpha^6-2\alpha^4\chi^2+\alpha^2\chi^4$, ϗ (ἀναγωγῇ) $\alpha^2\kappa^2\chi^2-\alpha^4\kappa^2=\alpha^6-2\alpha^4\chi^2+\alpha^2\chi^4$, ϗ (διαιρέσει διὰ αα) $\kappa\kappa\chi\chi-\alpha\alpha\kappa\kappa=\alpha^4-2\alpha\alpha\chi\chi+\chi^4$· οὐκοῦν $(-\alpha\alpha+\chi^2)\kappa^2=(-\alpha\alpha+\chi\chi)\cdot(-\alpha\alpha+\chi\chi)$, ϗ τέως $\kappa\kappa=-\alpha\alpha+\chi\chi$. (ἄρα (μεταθέσει) $\kappa\kappa+\alpha\alpha=\chi\chi=\Gamma\Pi^2$), εἴτ' οὖν $\Gamma\Xi^2=\sigma\Pi.\Pi\Sigma$. Τοῦτο δὴ τὸ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν, ϗ Ὑπερβολὴν ἰδίωμα ἐν ἑνὸς σχήματος τύπῳ γραφήσεται οὕτω· $\kappa\kappa=\pm\alpha\alpha\mp\chi\chi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 117.

Ἐπειδὴ ἐν τῇ Ἐλλείψει ἐστὶ $\kappa\kappa=\alpha\alpha-\chi\chi$, ἔσται ἀεὶ $\Gamma\Xi^2$ (ἢ ΓE^2) $=(\alpha+\chi).(\alpha-\chi)=\sigma\Pi.\Pi\Sigma$, ϗ $\Gamma\Pi^2=\chi\chi=\alpha\alpha-\kappa\kappa=(\alpha+\kappa).(\alpha-\kappa)=\sigma\Xi.\Xi\Sigma$. Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν, ἐπεὶ $\kappa\kappa=-\alpha\alpha+\chi\chi$, ἔσται $\Gamma\Xi^2=\kappa\kappa=(\alpha+\chi).(-\alpha+\chi)=\sigma\Pi.\Pi\Sigma$. ἀλλὰ δὴ $\Gamma\Pi^2=\alpha\alpha+\kappa\kappa=\Gamma\Sigma^2+$

$\Gamma\Xi^2$, ἀλλ' ὐκ $= \sigma\Xi.\Xi\Sigma$. Τὸ ἄρα θεώρημα (§. 116.) γενικὸν μέν ἐςιν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς ἐν μέρει, καὶ μόνον ἐπανῆκον τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΞ Ἀποτεμνομένης ὑπὸ τῆς Τεταγμένης ΝΞ τῆς μεταξὺ τῦ Κέντρυ Γ, καὶ τῆς ἑτέρας Κορυφῆς σ πιπτύσης, ἤ ἄλλως, μεταξὺ τῶν κορυφῶν σ, Σ, ὐ μὴν δὲ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΠ ἀποτεμνομένης ὑπὸ τῆς ΜΠ Τεταγμένης τῆς μεταξὺ τῆς Κορυφῆς Σ, καὶ τῆς Ἑςίας Ζ, ἢ, τῆς ἐκτὸς τῶν δύω κορυφῶν σ, Σ, κειμένης. Ἀλλὰ γὰρ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν πᾶσαι αἱ Τεταγμέναι μεταξὺ τῦ Κέντρυ καὶ τῆς ἑτέρας τῶν Κορυφῶν κεῖνται. Διὰ ταῦτ' ἄρα καὶ ἐν γένει τὸ θεώρημα ἐπ' αὐτῆς ἀληθές.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 118.

Ἔςιν ἐν τῇ Ἐλλείψει (§. 61.) $\alpha\alpha : \beta\beta :: \sigma\Xi.\Xi\Sigma : N\Xi^2$· ἀλλὰ $\sigma\Xi.\Xi\Sigma = \Gamma\Pi^2 = \chi\chi$ (ἐκ τῦ θεωρήματος,) ἄρα $\alpha\alpha : \beta\beta :: \chi\chi : N\Xi^2 = \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἔςι δὲ καὶ (§. 85.) $\gamma\gamma = \Pi M^2 = \beta\beta - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. Οὐκῦν ἐν τῷ ὀρθογονίῳ τριγώνῳ ΓΠΜ, ἔςαι

$\Gamma M^2 = \chi\chi + \beta\beta - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. ἐν δὲ τῷ ΓΞΝ, ἐςι $\Gamma N^2 = \alpha\alpha - \chi\chi\ (= \kappa\kappa) + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. Ἄρα $\Gamma M^2 + \Gamma N^2 = \chi\chi + \beta\beta - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} + \alpha\alpha - \chi\chi + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} = \beta\beta + \alpha\alpha$, ϗ, τετραπλασιαζομένων τῶν ὅρων, $4\Gamma M^2 + 4\Gamma N^2 = 4\beta\beta + 4\alpha\alpha = OM^2 + N\Delta^2 = \lambda\Lambda^2 + \sigma\Sigma^2$, ὅ ἐςι ,,Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ δυεῖν ,,ὡντινωνȣ̃ν Συζυγῶν Διαμέτρων τετραγώνων ἰσȣ̃ται ,,τῷ τῶν ἀφ' ἑκατέρȣ τῶν Ἀξόνων ἀθροίσματι, ϗ ,,ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ, τῷ τῶν ἀπὸ δυεῖν ἑτέρων ὡντινω-,,νȣ̃ν Συζυγῶν Διαμέτρων, εἴτ' ȣ̃ν ἐν τῇ Ἐλλείψει ,,τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ δυεῖν Συζυγῶν Διαμέτρων ,,τετραγώνων ποσὸν ἐςιν εὐςαθές."

ΠΌΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 119.

Ἐκ τȣ̃ αὐτȣ̃ §. 61. δῆλον, ὅτι κατὰ τὴν Ὑπερβολήν ἐςι $\Pi M^2 : \sigma\Pi \,.\, \Pi\Sigma :: \beta\beta : \alpha\alpha$, ϗ δὴ ϗ $\sigma\Pi \,.\, \Pi\Sigma : \Pi M^2 :: \alpha\alpha : \beta\beta$· ἀλλ' (ἐκ τῆς τȣ̃ θεωρήματος δείξεως) ἐςι $\sigma\Pi \,.\, \Pi\Sigma : \Pi M^2 :: \Gamma\Sigma^2 + \Gamma\Xi^2 : N\Xi^2$. Οὐκȣ̃ν $\alpha\alpha : \beta\beta :: \Gamma\Sigma^2 + \Gamma\Xi^2 : N\Xi^2$· ἀλλὰ (Πορίσμ. Α'.) $\Gamma\Sigma^2 + \Gamma\Xi^2 = \Gamma\Pi^2 = \chi\chi$· ȣ̓κȣ̃ν $\alpha\alpha$: