„νος Ἄξονος Παράμετρος πρὸς αὐτὸν τὸν ἐλάσσω
„Ἄξονα."

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 90.

Αἱ ταύτης τε καὶ τῆς ἐφεξῆς ἀναλογίας ἐκφράσεις καθομοιοῦνται ταῖν δυεῖν προτέραιν τοῦ §. 61.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 91.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἑτέρα Ἀποτετμημένη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐλάσσονος Ἄξονος, καὶ ῥηθῇ Χ, ἔσται $XX : \beta\beta - YY :: \lambda\ 2\beta$, ὅθεν (§. 89.) $\chi\chi : \beta\beta - yy :: X^2 : \beta^2 - Y^2$, εἴτ' οὖν „Τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τοῦ ἐλάσ-
„σονος Ἄξονος Τεταγμένων Τετράγωνά εἰσι πρὸς
„ἄλληλα, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ἐξ αὐτῶν Ἀποτετμημέ-
„νων Παραγόμενα."

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

§. 92.

Αἱ ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος τῆς Ἐλλείψεως Ἄξονος Τεταγμέναι ἔχουσι πάντως ἰδιώματα τὰ αὐτὰ τοῖς, ἅπερ ἔχουσιν αἱ ἐπὶ τοῦ μείζονος· Ἡ μὲν γὰρ Ἐξίσωσις

$yy = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, εἴτ' ἒν $yy = \frac{((2\alpha-\chi)\chi)\beta\beta}{\alpha\alpha}$

παρίςησιν ὅτιγε τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῦ πρώτυ Α'ξονος Τετράγωνα ἐξισῦται τῷ, διαιρέσει τῦ ὑπὸ τῶν ἰδίων Α'ποτετμημένων, ᾗ θατέρυ τῶν Α'ξόνων παραγομένυ, διὰ τῦ πρώτυ Α'ξονος διαιρεθέντος, προϊόντι Πηλίκῳ. Η' δ' ἐνταῦθα (πορ. Α) Ε'ξίσωσις $\chi\chi = \frac{\alpha\alpha(\beta\beta - yy)}{\beta\beta}$ σημαίνει, ὡς ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῦ δευτέρυ Α'ξονος Τετράγωνα ἐξισῦται τῷ Πηλίκῳ τῷ προϊόντι ἐκ τῆς διαιρέσεως τῦ παραγομένυ ὑπὸ τῶν ἰδίων Α'ποτετμημένων ᾗ θατέρυ τῶν Α'ξόνων διαιρεθέντος διὰ τῦ αὐτῦ δευτέρυ Α'ξονος· ταὐτὸν ἄρα τὸ ἰδίωμα.

Ω'σαύτως ἡ Ε'ξισωσις (§. 59.) $yy = \pi\chi - \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$, εἴτ' ἒν $yy = \frac{((2\alpha-\chi)\chi)\pi}{2\alpha}$, ἐκδηλοῖ, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῦ πρώτυ Α'ξονος Τετράγωνα συνισῦνται τῷ ἐκ τῦ γινομένυ ὑπὸ τῶν ἰδίων Α'ποτετμημένων, ᾗ τῆς ἰδίας Παραμέτρυ διαιρεθέντος διὰ τῦ πρώτυ Α'ξονος, προερχομένῳ Πηλίκῳ. Η' δὲ (Πορ. Β'.) Ε'ξίσωσις $\chi\chi = \frac{(\beta\beta - yy)\lambda}{2\beta}$ παριςάνει, ὅτι τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τοῦ δευτέρου Ἄξονος ἐξισοῦται τῷ Πηλίκῳ τῷ ἐκ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῶν ἰδίων Ἀποτετμημένων, καὶ τῆς ἰδίας Παραμέτρου διαιρεθέντος διὰ τοῦ δευτέρου Ἄξονος. Οὐκοῦν κἀνταῦθα ταυτίζεται τὰ ἰδιώματα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄.

§. 93.

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν μείζονος Ἄξονος (τοῦτο δ' αὐτὸ, κἂν ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος) ληφθέντος ἀντὶ Διαμέτρου καταγραφῇ Κύκλος ὁ ΣΝσΞ, Σχ. 15.
καὶ ΝΠ, νπ ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τῆς αὐτῆς Διαμέτρου, τὰ ἀπ' αὐτῶν Τετράγωνα ἴσα ὄντα τοῖς συστοιχοῦσι παραγομένοις ὑπὸ τῶν μερῶν τῆς Διαμέτρου, εἴτ' οὖν τοῖς σΠ×ΠΣ, σπ×πΣ, τὸν αὐτὸν λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα, ὃν καὶ τὰ γινόμενα ταῦτα. Ἀλλαμὴν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΠ, μπ Τετράγωνα ἀνάλογον ἔχουσι πρὸς τὰ αὐτὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν αὐτῶν συστοιχουσῶν Ἀποτετμημένων (§. 61. 62.) Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐν τῷ Κύκλῳ Τετράγωνα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ἐν τῷ λόγῳ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐν τῇ Ἐλλείψει ταῖς ἐν τῷ Κύκλῳ συστοιχουσῶν. Οὐκοῦν καὶ αἱ ἐξ αὐτῶν ῥίζαι ἀνάλογον ἔσονται. Ἔστιν οὖν ΝΠ : νπ :: ΜΠ : μπ, καὶ ΟΓ : ΝΠ ::

ΛΓ : ΜΠ. Ἀεὶ ἄρα ἑκάστη Τεταγμένη τοῦ Κύκλου πρὸς τὴν συστοιχοῦσαν Τεταγμένην τῆς Ἐλλείψεως, ὡς ΟΓ : ΛΓ, ἢ ὡς ΣΓ : ΛΓ, ἢ ὡς Σσ : Λλ, ὅ ἐστιν, ὡς ὁ Ἄξων ἐφ' ὃν ὁ Κύκλος γέγραπται πρὸς τὸν ἕτερον Ἄξονα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄.

§. 94.

Ὁ δὲ τῶν ἐπὶ τοῦ δευτέρου τῆς Ὑπερβολῆς Ἄξονος Τεταγμένων λόγος ἄλλως ἔχων εὑρίσκεται. Ἡ γάρ τοι ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐξίσωσις $yy = -\beta\beta + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, $\alpha\alpha\ yy = -\alpha\alpha\ \beta\beta + \beta\beta\ \chi\chi$, $\beta\beta\ \chi\chi = \alpha\alpha\ yy + \alpha\alpha\ \beta\beta = (yy + \beta\beta)\ \alpha\alpha$, δίδωσιν ἀναλογίαν τὴν $\chi\chi : yy + \beta\beta :: \alpha\alpha : \beta\beta$, ἧς ἄπεστι τὸ ὑπὸ τῶν Ἀποτετμημένων τοῦ δευτέρου Ἄξονος γινόμενον, ὅπερ τῇ κατὰ τὸ πρῶτον πόρισμα ἀναλογίᾳ ἔγκειται. Ἔστι γὰρ $\text{ΗΛ} = \text{ΠΜ} - \text{ΓΛ} = y - \beta$, καὶ $\text{Ηλ} = y + \beta$, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $\text{ΗΛ} \times \text{Ηλ} = yy - \beta\beta$· ἀλλ' ὁ ἐν ταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ δεύτερος ὅρος ὁ $yy + \beta\beta$ τὸ ἄθροισμά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΗ, ΓΛ τετραγώνων. Οὐκοῦν κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν „ Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης

„ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος (δευτέρου) Ἄξονος Τετράγωνον,
„ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων τοῦ τε ἀπὸ τῆς
„ αὐτῇ συστοιχούσης Ἀποτετμημένης (ἀπὸ τοῦ Κέντρου),
„ καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ Ἡμιελάσσονος (ἡμιδευτέρου) Ἄξονος
„ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος (πρώτου) Ἡ-
„ μιάξονος Τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμιελάσ-
„ σονος (ἡμιδευτέρου) Ἄξονος". Ἀπὸ δὲ τῆς γενι-
κῆς Ἐξισώσεως $yy = \pm\beta\beta \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$ ῥᾷστα ἐξέρχε-
ται, καὶ ἡ ἐπίτε τῆς Ὑπερβολῆς, καὶ τῆς Ἐλλείψεως
κοινὴ $\chi\chi = \pm\alpha\alpha \mp \frac{\alpha\alpha yy}{\beta\beta}$ ἡ τῷ δευτέρῳ Ἄξονι ἐ-
πανήκουσα, καὶ περιέχουσα τάς τε Τεταγμένας ἐπ' αὐτοῦ,
καὶ τὰς Ἀποτετμημένας, λαμβανομένης τῆς αὐτῶν
ἀρχῆς ἐκ τοῦ Κέντρου, τεθείσης ἀμέλειτοι τῆς μὲν
Τεταγμένης $= \chi$, τῆς δ' Ἀποτετμημένης $= y$. Ἐξ
αὐτῆς δὲ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἐκπηγάζουσι καὶ ἑκα-
τέρα τῶν ἀναλογιῶν, ἡ μὲν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, ἡ
ἐν τῷ Α΄. Πορίσματι καταφαινομένη, ἡ δ' ἐπὶ τῆς
Ὑπερβολῆς, ἡ ἀνωτέρα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄.

§. 95.

Ὥσπερ ἐκ τοῦ Κέντρου θεωρηθείσης τῆς τῶν

Α᾽ποτετμημένων ἀρχῆς ἐπιλέλυται τὸ Πρόβλημα (§. 85.) ὅτως εἶχεν ἂν ἔτι εὑρεθῆναι ἐπὶ τῆς Καμπύλης ἐξίσωσις ἐξιχνεύουσα τὴν φύσιν αὐτῆς, κἂν ἐκ τῆς Ε᾽στίας ἄρχεσθαι θεωρηθῶσιν αἱ Α᾽ποτετμημέναι· ἀλλὰ δὴ ϗ ἐξ ὁτινοσοῦν ἄλλου σημείου δεδομένου ἐπὶ τοῦ Α᾽ξονος. Καὶ δῆλον ἄρα, ὡς οὐχ ἁπλῆ τις ὅτε μοναχὴ τοῦ ἐπὶ τῆς δοθείσης Καμπύλης ἐξίσωσιν ἐξευρεῖν, ἡ μέθοδος.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄.

§. 96.

Ε᾽ὰν ἐκ τῶν δυεῖν ἐξισώσεων τῶν κατὰ τὸ ΙΑ΄. Πρόβλημα, ἐν ᾧ αἱ Α᾽ποτετμημέναι ἀπὸ τοῦ Κέντρου ὑπολογίζονται, εὑρεθεισῶν μετακομισθῇ ὁ τῶν εἰς κατασκευὴν συντελέντων τριγώνων Υ᾽πολογισμὸς, τῶν κἂν τοῖς Προβλήμασι Ε΄, ϛ΄, Ζ΄, Η΄, Θ΄, Ι΄, παραληφθέντων οἱ τῶν λοιπῶν εὐθειῶν τύποι ἀνακύψουσιν ὧδε.

Α΄.

§. 97.

Ζητηθήτω ἡ τῆς Υ᾽ποκαθέτου ΠΝ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις τῶν Α᾽ποτετμημένων ἀπὸ τοῦ Κέντρου ὑπολογιζομένων.

Λ Υ´ Σ Ι Σ.

Ἐν τῷ Ε΄. προβλήματι (§. 63.) εἴδομεν, ὅτι $\zeta\mu : Z\zeta :: M\mu \,(= MZ) : ZN$. Ἀλλ' ἡ μὲν $\zeta\mu = 2\alpha$ (ἐδὲν γὰρ πρὸς αὐτὴν, ἤντ' ἐκ τῆς Κορυφῆς, ἤντ' ἐκ τἒ Κέντρε αἱ Ἀποτετμημέναι ὑπολογίζωνται) ἡ δὲ $Z\zeta = 2\alpha \mp 2\gamma$· ἡ δὲ MZ ἐστιν ἐκεῖθι $= \chi + \gamma \mp \frac{\gamma\chi}{\alpha}$, ὅ ἐστι $MZ = \Pi\Sigma + Z\Sigma \mp \frac{Z\Sigma\,.\,\Pi\Sigma}{\alpha}$· ἀλλὰ $\Pi\Sigma = \pm\alpha \mp \chi$ (§. 85.) ἔσεται ἄρα ἐνταῦθα $MZ = \pm\alpha \mp \chi \pm \gamma \mp \frac{\gamma \pm \alpha \mp \chi}{\alpha}$, καὶ τῶν ἀναγκαίων ἐκπερανθεισῶν πράξεων ἔσεται $MZ = \pm\alpha \mp \chi + \frac{\gamma\chi}{\alpha}$· ἐστιν ἄρα $2\alpha : 2\alpha \mp 2\gamma :: \pm\alpha \mp \chi + \frac{\gamma\chi}{\alpha} : ZN = \pm\alpha \mp \chi - \gamma + \frac{2\gamma\chi}{\alpha} \mp \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha}$· ἀλλὰ $\Pi N = ZN - Z\Pi$, καὶ $Z\Pi = \pm\Sigma\Gamma \mp \Gamma\Pi - \Sigma Z = \pm\alpha \mp \chi - \gamma$: ἄρα $\Pi N = \pm\alpha \mp \chi - \gamma + \frac{2\gamma\chi}{\alpha} \mp \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha} \mp \alpha \pm \chi + \gamma = \frac{2\gamma\chi}{\alpha} \mp \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha}$. Ἐπεὶ δὲ $\gamma\gamma = \mp 2\alpha\gamma \mp \frac{1}{2}\alpha\pi$ (προβλ. Ε΄.) ἔσαι $\Pi N =$

$$\frac{2\gamma\chi}{\alpha} \mp \frac{\chi(\mp 2\alpha\gamma \pm \frac{1}{2}\alpha\pi)}{\alpha\alpha} = \frac{2\gamma\chi}{\alpha} - \frac{2\alpha\gamma\chi}{\alpha\alpha} + \frac{\frac{1}{2}\alpha\pi\chi}{\alpha\alpha} = \frac{2\gamma\chi}{\alpha} - \frac{2\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\pi\chi}{2\alpha} = \frac{\pi\chi}{2\alpha},$$

ἡ ζητȣμένη τῆς Ὑποκαθέτȣ ἐξίσωσις, ἐν Ὑπολογισμῷ τῶν ἀπὸ τȣ͂ Κέντρȣ Ἀποτετμημένων, τῆς κατὰ τὴν Παράμετρον ἐκθέσεως περιεκτική. Εἰ δὲ τὴν θατέρȣ τῶν Ἀξόνων ἔκθεσιν περιέχειν ζητηθείη αὕτη, ἐπεὶ $\pi = \frac{2\beta\beta}{\alpha}$ (§. 57), ἔσεται $\Pi\text{N} = \frac{\chi}{2\alpha} \cdot \frac{2\beta\beta}{\alpha} = \frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$.

Β'.

§. 98.

Ζητηθήτω ἡ ἀναλυτικὴ ἔκθεσις τῆς Ὑφαπτομένης ΠΤ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐν τῷ ϛ'. Προβλήματι (§. 67.) ἐςὶν ἡ Ὑφαπτομένη $\Pi\text{T} = \frac{\text{M}\Pi^2}{\text{N}\Pi} = \frac{yy}{\text{N}\Pi}$. ἀλλαμὴν (§. 85.) $yy = \pm\beta\beta \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἢ $yy = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$, ϗ $\text{N}\Pi =$

$\frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha} = \frac{\pi\chi}{2\alpha}$ (§. ἀνωτ.), ἄρα ΠΤ $= \frac{\pm\frac{1}{2}\alpha\pi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}}{\frac{\pi\chi}{2\alpha}} =$

$\pm\frac{\alpha\alpha\pi \mp \pi\chi\chi}{2\alpha}\cdot\frac{2\alpha}{\pi\chi} = \pm\frac{2\alpha^3\pi \mp 2\alpha\pi\chi\chi}{2\alpha\pi\chi} = \pm$

$\frac{\alpha\alpha \mp \chi\chi}{\chi}$. αὐτὸ δὴ τȣ̃το τὸ τῆς ΠΤ Ὑφαπτομένης ἀντάξιον προκύπτει, κἂν ἀντὶ $\frac{\gamma\gamma}{\mathrm{N\Pi}}$ αἱ τὸν Ἄξονα β περιέχȣσαι Ἀξίαι τεθῶσιν.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 99.

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα τε κἂν τῷ ϛ΄. Προβλήματι (§. 67.) τȣ̃ τῆς Ὑφαπτομένης ἀνταξίȣ ποσȣ̃ ἄπεσιν ἡ β, τέτȣ δὴ χάριν ἡ αὐτὴ Ὑφαπτομένη ἔμενεν ἂν, εἰ ϗ ἄλλαι Ἐλλείψεις τε, ϗ Ὑπερβολαὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Διαμέτρȣ$=\alpha$ κατεγράφοντο, ϗ αὐτῶν Εὐθεῖαι εἰς σημεῖον τῷ Μ ἀντίςοιχον ἔψαυον.

Γ΄.

§. 100.

Ζητηθήτω ἡ τῆς ΓΤ ἔκθεσις.

ΛΥ΄ΣΙΣ.

Ἐπεὶ ΓΤ $=$ ΓΠ $\pm$ ΠΤ· οὐκοῦν ΓΤ $= \chi \pm \frac{(\pm \alpha\alpha \mp \chi\chi)}{\chi} = \frac{\chi\chi + \alpha\alpha - \chi\chi}{\chi} = \frac{\alpha\alpha}{\chi}$.

Δ΄.

§. 101.

Ζητηθήτω, ἡ τῆς ΣΤ ἔκθεσις.

ΛΥ΄ΣΙΣ.

Ἐκ τῶν σχημάτων ἐπίδηλον, ὅτι ΣΤ $= \pm$ ΓΤ $\mp \alpha$· ἄρα ΣΤ $= \pm \frac{\alpha\alpha}{\chi} \mp \alpha = \pm \frac{\alpha^2 \mp \alpha\chi}{\chi}$

Ε΄.

§. 102.

Ζητηθήτω ἡ τοῦ ΣΒ² ἔκθεσις.

ΛΥ΄ΣΙΣ.

Ἐκ τοῦ Ζ΄. Προβλήματος (§. 75.) ἐστὶ ΠΤ : ΣΤ : : ΠΜ : ΣΒ. Τῶν ἄρα ἄρτι εὑρεθέντων ἀνταξίων αὐτοῖς ποσῶν ἀντικαταστάντων, ἔσται $\pm \frac{\alpha\alpha \mp \chi\chi}{\chi} : \pm \frac{\alpha\alpha \pm \alpha\chi}{\chi}$: : ΠΜ : ΣΒ : : $\pm \alpha\alpha \mp \chi\chi$:

$\pm \alpha\alpha \mp \alpha\chi$· ὅθεν καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν Τετράγωνα ἀνάλογον ἕξουσιν, εἴτ' οὖν $\alpha^4 - 2\alpha\alpha\chi\chi + \chi^4 : \alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha\alpha\chi\chi :: \Pi M^2 : \Sigma B^2$, καὶ τοῦ ἀνταξίου ποσοῦ τεθέντος ἀντὶ τοῦ ΠM^2 (§. 49.) ἔσαι: $\alpha^4 - 2\alpha\alpha\chi\chi + \chi^4 : \alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha\alpha\chi\chi :: \pm \frac{\alpha\alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} : \Sigma B^2$· ὅθεν $\Sigma B^2 =$ τῷ $(\alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha\alpha\chi\chi) \cdot \left(\frac{\pm \alpha\alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}\right)$ διαιρεθέντι διὰ τοῦ πρώτου ὅρου.

Αὐτὸ δὲ τὸ γινόμενόν ἐστιν $= \left(\frac{\alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha\alpha\chi\chi}{\alpha\alpha}\right) \cdot (\pm \alpha\alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi\chi) = (\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi\chi) \cdot (\pm \alpha\alpha\beta\beta \mp \beta\beta\chi^2) = \pm \alpha^4\beta\beta \mp 2\alpha^3\beta\beta\chi \pm \alpha^2\beta^2\chi^2 \mp \alpha^2\beta^2\chi^2 \pm 2\alpha\beta\beta\chi^3 \mp \beta\beta\chi^4 = \pm \alpha^4\beta\beta \mp 2\alpha^3\beta\beta\chi \pm 2\alpha\beta\beta\chi^3 \mp \beta^2\chi^4$· ἄρα $\Sigma B^2 = \frac{\pm \alpha^4\beta\beta \mp 2\alpha^3\beta\beta\chi \pm 2\alpha\beta\beta\chi^3 \mp \beta^2\chi^4}{\alpha^4 - 2\alpha\alpha\chi\chi + \chi^4}$, ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις. Εἰ δὲ τὴν Παράμετρον περιέχειν ζητηθῇ, ἀντικαταστάσει $\beta\beta = \frac{1}{2}\alpha\pi$, ἔσεται $\Sigma B^2 =$

$$\pm \frac{(\alpha^4 \mp 2\alpha^3\chi \pm 2\alpha\chi^3 \mp \chi^4)\,\frac{1}{2}\alpha\pi}{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi\chi + \chi^4} = \pm \frac{\alpha^5\pi \mp 2\alpha^4\pi\chi \pm 2\alpha^2\pi\chi^3 \mp \alpha\pi\chi^4}{2\alpha^4 - 4\alpha^2\chi\chi + 2\chi^4}.$$