$= 2\alpha$, ϗ $Z\zeta = \Sigma\sigma - 2\Sigma Z$, ἢ $- 2\sigma\zeta = 2\alpha - 2\gamma$, ϗ $\zeta\Pi = \Sigma\sigma - \Sigma\Pi - \zeta\sigma = 2\alpha - \chi - \gamma$, καὶ $\Pi Z = \Pi\Sigma - \Sigma Z = \chi - \gamma$, ἐξ οὗ ϗ $\zeta\Pi - \Pi Z = 2\alpha - \chi - \gamma - \chi + \gamma = 2\alpha - 2\chi$· ἔςαι ἄρα ὁ τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος $\zeta M -$

$$MZ = \frac{4\alpha^2 - 4\alpha\gamma - 4\alpha\chi + 4\gamma\chi}{2\alpha} = 2\alpha - 2\gamma - 2\chi + \frac{2\gamma\chi}{\alpha}$$

. Γνωσθέντων οὖν τοῦ ἀθροίσματος $\zeta M + MZ$, ϗ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, γνωσθήσεται πάντως ϗ ἕκαςον αὐτῶν μέρος· ἀμέλειτοι ἔςαι (Ἀλγβ. §. 232.) $MZ = \alpha - \alpha + \gamma + \chi - \frac{\gamma\chi}{\alpha} = \chi + \gamma - \frac{\gamma\chi}{\alpha}$· ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ ΠΜΖ τριγώνῳ ἐςι $\Pi M^2 = ZM^2 - \Pi Z^2$, ἔςαι $yy = \left(\chi + \gamma - \frac{\gamma\chi}{\alpha}\right)^2 - (\chi - \gamma)^2 = 4\gamma\chi - \frac{2\gamma\chi\chi - 2\gamma\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi\chi}{\alpha}$. Ἔξεςι μέντοιγε ταύτην τὴν ἔκθεσιν ἁπλουςέραν ἀπεργάσασθαι ἐκβολῇ μὲν τῆς $\gamma\gamma$ ποσότητος, ἀντικαταςάσει δὲ τῆς ἐλάσσονος Ἡμιδιαμέτρου β· Ἔςι γὰρ $\gamma = \Sigma Z = \alpha - \Gamma Z$, ὅθεν $\Gamma Z = \alpha - \gamma$· ἐν δὲ τῷ ΖΛΓ τριγώνῳ ἐςι $Z\Gamma^2 = Z\Lambda^2 - \Lambda\Gamma^2$, εἴτ' οὖν, ἐν ὅροις ἀναλυτικοῖς, $(\alpha - \gamma)^2$

$= \alpha^2$ (εἴγε $Z\lambda = \frac{1}{2}\Sigma\sigma = \alpha$) $- \beta^2$ ($\lambda\Gamma = \frac{1}{2}\lambda\Lambda = \beta$) ὅ ἐςιν $\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma\gamma = \alpha^2 - \beta^2$, ὅθεν $\gamma\gamma = 2\alpha\gamma - \beta\beta$. Ἀντικατασάσης ȣ̃ν ἀντὶ $\gamma\gamma$ τῆς ἰσοδυνάμȣ αὐτῇ ποσότητος, τραπήσεται ἡ ἀνωτέρα ἐξίσωσις εἰς ταύτην $\gamma\gamma = 4\gamma\chi - \frac{2\gamma\chi\chi}{\alpha} - \frac{2\chi(2\alpha\gamma - \beta\beta)}{\alpha} + \frac{\chi\chi(2\alpha\gamma - \beta\beta)}{\alpha\alpha}$. Μετὰ δὲ, τῶν πολλαπλασιασμῶν περανθέντων, ϗ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης πρόεισιν $\gamma\gamma = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} - \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητȣμένη ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως ἐξίσωσις, τῶν Ἀποτετμημένων ἀπὸ τῆς κορυφῆς λογιζομένων.

Σχ. 12. Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν τεθείσθω ὡσαύτως $\Sigma\sigma = 2\alpha$, ϗ $\lambda\Lambda = 2\beta$, ϗ ΣZ, ἢ $\sigma\zeta = \gamma$, καὶ $\Sigma\Pi = \chi$, ϗ $\Pi M = y$· μετὰ δὲ, γενέσθω $M\phi = MZ$, ἐξ ȣ̃ ϗ $\Pi\phi = \Pi Z$· ἔςιν ȣ̃ν ἐν τῷ τριγώνῳ $\phi M\zeta$ (Τριγωνομετρ. §. αυτ.) $\zeta\phi : \zeta M + M\phi :: \zeta M - M\phi : \zeta\Pi - \Pi\phi$. Ἵνα δὲ ἀναλυτικῶς ἐκτεθείη αὕτη ἡ ἀναλογία, σκεπτέον, ὅτι $\zeta\phi = \zeta\Pi + \Pi\phi$, ϗ ἡ μὲν $\zeta\Pi = \chi + 2\alpha + \gamma$, ἡ δὲ $\Pi\phi = \Pi Z = \chi - \gamma$· ὅθεν $\zeta\phi = 2\alpha + 2\chi$, καὶ $\zeta M - M\phi = \zeta M - MZ = \Sigma\sigma$ (§. 33.) $= 2\alpha$· ἄρα $2\alpha + 2\chi : \zeta M + M\phi :: 2\alpha : 2\alpha + 2\gamma$, καὶ $2\alpha : 2\alpha + 2\chi :: 2\alpha + 2\gamma : \zeta M + M\phi = 2\alpha$

$+2\gamma+2\chi+\frac{2\gamma\chi}{\alpha}$· τὸ ἄρα ἔλασσον μέρος

$ZM=\gamma+\chi+\frac{\gamma\chi}{\alpha}$. Ἀλλ' ἐν τῷ ΠΜΖ τριγώνῳ ἐςὶ $\Pi M^2=ZM^2-\Pi Z^2$. Γενομένης ἄρα τῆς ἀντικαταςάσεως ἐν ὅροις ἀναλυτικοῖς, ϗ τῶν λοιπῶν πράξεων, ὡς ἀνωτέρω, τελεσθεισῶν, καὶ ἀντὶ γγ εἰσαχθέντος τῦ $\beta\beta-2\alpha\gamma$· ἔςι γὰρ ἐν τῷ ΣλΓ τριγώνῳ, $\Sigma\lambda^2$ $(=\Gamma Z^2=(\alpha+\gamma)^2)$ $=\lambda\Gamma^2\,(=\beta\beta)+\Gamma\Sigma^2\,(=\alpha x)$, ἀποφέρεται $yy=\frac{2\beta\beta\chi}{\alpha}+\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητȣμένη ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐξίσωσις περιέχȣσα τȣ̀ς ἑαυτῆς Ἄξονας.

§. 50.

Κατά τε τὴν Ἔλλειψιν, ϗ τὴν Ὑπερβολὴν τὸν αὐτὸν τρόπον περαίνεται ἡ τῦ Ὑπολογισμῦ πρᾶξις, ὥσπερ δὴ ϗ αἱ δύω εὑρεθεῖσαι ἐξισώσεις ἐπιμαρτυρȣ̃σι μηδενὶ ἀλλ' ἢ τοῖς σημείοις μόνον ἀλλήλων διενηνοχεῖαι. Κἂν τοῖς ἑπομένοις δὲ τύποις ȣ̓δεμία παρὰ τὴν τῶν σημείων διαφωνία ἐν αὐτοῖς εὑρεθήσεται. Διὰ ταῦτ' ἄρα ἐν τοῖς ἐφεξῆς κοινοῖς τῶν δύω τȣτωνὶ Καμπύλων ἰδιώμασιν ἀπόχρη ἑνὶ ὑπολογισμῷ, ϗ τύπῳ ἑνὶ ταῦτα ἐκτιθέναι, ἔνθα περ αν η τὸ διττὸν σημεῖον $\pm$, ἢ $\mp$, τὸ μὲν ὕπερθεν πρὸς τὴν Ἔλλειψιν, τὸ δ' ἔνερθεν πρὸς τὴν Ὑπερβολὴν ἀπονέμοντας. Συνημμένως ἦν αἱ δύω προκύψασαι ἐπὶ τούτων ἐξισώσεις παρίσανται οὕτως $\gamma\gamma = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$.

§. 51.

Σχ. 13. Ἐν τῇ Παραβολῇ δὲ, ἐπείπερ ὁ κατ' αὐτὴν Ἄξων ἐςὶν ἄπειρος, τουτέςιν $\alpha = \infty$, καὶ δευτέρου μὲν Ἄξονος ἀμοιρεῖ, εὐμοιρεῖ δὲ Ἑςίας, διὰ ταῦτα ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀποδειχθείσῃ ἐξισώσει $\gamma\gamma = 4\gamma\chi \mp \frac{2\gamma\chi\chi \mp 2\gamma\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἐφ' ἧς ἀμέλει ἐμφιλοχωρεῖ ἡ τῆς Ἑςίας ἀπὸ τῆς κορυφῆς διάςασις $= \gamma$, ἐὰν ἀντικαταςῇ ∞ ἀντὶ α, γενήσεται $\gamma\gamma = 4\gamma\chi$. Ἄμφω γάρ τοι τὰ κλάσματα, οἷς ὁ Παρονομαςὴς ἄπειρος, τῷ μὲν, πρώτης τάξεως, τῷ δὲ, δευτέρας, ἀπειράκις ἐλάχιςαι ποσότητές ἐσι (Ἀλγεβ. §. 544) δι' ὃ καὶ $= 0$, ὅσον πρὸς τὴν πεπερασμένην ποσότητα $4\gamma\chi$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 52.

Βουλομένοις δὲ τὴν ἐπὶ τῆς Παραβολῆς ἐξίσωσιν γεωμετρικῇ σκέψει ἐξευρεῖν, ἐξιχνευέσθω τὸ Τρίγωνον ΠΜΖ. Ἀλλὰ τὸ πρῶτον σκεπτέον, ὡς ἐὰν $A\Sigma = \Sigma Z$, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ $A\mu$ Διευθετοῦσα ἔσεται (§. 20.) καὶ δὴ $MZ = M\mu$ (§. 18.) $= A\Pi$, παράλληλος γὰρ (§. 44.). Ἐὰν οὖν τεθῶσι $\Sigma Z = \gamma$, καὶ $\Sigma\Pi = \chi$, καὶ $M\Pi = y$, ἔσαι $MZ = A\Pi = \gamma + \chi$, καὶ $Z\Pi = \chi - \gamma$. Ἔστι δὲ $M\Pi^2 = MZ^2 - Z\Pi^2$, ἀντικαταστάσει ἄρα ἔσαι $yy = \gamma^2 + 2\gamma\chi + \chi\chi - \chi\chi + 2\gamma\chi - \gamma\gamma = 4\gamma\chi$, ἐξίσωσις ἐπὶ τῆς Παραβολῆς, ὡς ἀνωτέρω.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 53.

Ἐπείπερ (§. 49.) $\gamma\gamma = \pm 2\alpha\gamma \mp \beta\beta$, ἔσαι $\beta\beta = 2\alpha\gamma - \gamma\gamma$ (ἐν τῇ Ἐλλείψει), ἢ $\beta\beta = 2\alpha\gamma + \gamma\gamma$ (ἐν τῇ Ὑπερβολῇ), ὅ ἐστιν ἐπ' ἀμφοῖν $\beta\beta = 2\alpha\gamma \mp \gamma\gamma = \gamma(2\alpha \mp \gamma) = \Sigma Z \times Z\sigma$. Τουτέστιν „ὁ ἐλάσσων Ἡμιάξων ἐστὶν Εὐθεῖα μέση ἀνάλογος, „μεταξὺ τῶν τῆς ἑτέρας τῶν ἐστιῶν ἀφ' ἑκατέρας „τῶν κορυφῶν διαστάσεων."

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

§. 54.

Τὴν Ἀλγεβραϊκὴν ἔκθεσιν τῆς κατὰ τὸν πρῶτον Ἄξονα παραμέτρου ἑκάστης Κωνικῆς τομῆς ἐξευρεῖν.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Δυνατὸν ὑποτιθέναι τὴν Τεταγμένην πίπτειν ἐπὶ τῆς Ἑςίας. Τηνικαῦτα δὴ ἡ Ἀποτετμημένη ἐξισȣ̃ται τῇ τῆς Ἑςίας διαςάσει ἀπὸ τῆς ἐγγυτέρας κορυφῆς· τεθείσθω ȣ̃ν $\chi = \gamma$, ϗ ἀντὶ χ τεθέντος τȣ̃ γ ἐν τῇ ἐξισώσει $yy = 4\chi\gamma \mp \frac{2\gamma\chi\chi \mp 2\gamma\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi\chi}{\alpha\alpha}$, γενήσεται $yy = 4\gamma\gamma \mp \frac{4\gamma^3}{\alpha} + \frac{\gamma^4}{\alpha\alpha}$, ἄρα $y = \sqrt{(4\gamma\gamma \mp \frac{4\gamma^3}{\alpha} + \frac{\gamma^4}{\alpha\alpha})} = 2\gamma \mp \frac{\gamma^2}{\alpha}$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως y τὴν διὰ τῆς Ἑςίας διιȣ̃σαν Τεταγμένην ὑποδηλοῖ νῦν, ἡ εὑρεθεῖσα ἄρα ἰσοδύναμος αὐτῇ ἔκθεσις αὐτὴν ταύτην τὴν Τεταγμένην παριςᾷ, ἧς τὸ διπλȣ̃ν ἐςὶν ἡ Παράμετρος (§. 39.) ἥτις ἐν γένει ῥηθήσεται π· ἄρα $\pi = 4\gamma \mp \frac{2\gamma^2}{\alpha}$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

§. 55.

Κατὰ δὲ τὴν Παραβολήν ἐςὶ $\pi = 4\gamma$· τὸ γάρ τοι κλάσμα ἐξȣδενȣ̃ται, ὄντος $\alpha = \infty$. Ἀλλ' ἐν τῷ 10 σχήματι ῥᾴδιον τȣτὶ συνιδεῖν. Διὰ γὰρ τῆς

ΠΔ τῆς διὰ τῆς Ἑςίας Ζ διηκέσης τρίγωνον συνίςαται τὸ ΑΠΔ ὅμοιον τῷ ΑΣΒ. Διόπερ ΑΣ : ΑΠ : : ΣΒ : ΠΔ. Ἀλλὰ $2ΑΣ = ΑΠ$, ἄρα καὶ $2ΣΒ = 2ΣΖ = ΠΔ$, καὶ $4ΣΖ = 2ΠΔ$, ὅ ἐςι $4\gamma = \pi$ (§. 39.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 56.

Ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἡ τῦ κατ' αὐτὴν πρώτυ Ἄξονος Παράμετρος ἐξισῦται τῇ τῆς κορυφῆς τετραπλῇ διαςάσει ἀπὸ τῆς Ἑςίας· ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ὑπεράλλεται τῆς αὐτῆς τετραπλῆς διαςάσεως, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει, ὑφίεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 57.

Ἐὰν ἐν τῇ τῆς Παραμέτρυ ἐξισώσει $\pi = 4\gamma \mp \frac{2\gamma\gamma}{\alpha}$ ἀντικαταςαθῇ τὸ ἀντάξιον τῇ $\gamma\gamma = \pm 2\alpha\gamma \mp \beta\beta$ (§. 49.) ἀποκαθίςησιν ἐξίσωσιν τὴν $\pi = 4\gamma \mp \frac{2}{\alpha}(\mp 2\alpha\gamma \pm \beta\beta) = \frac{2\beta\beta}{\alpha}$ κατά τε τὴν Ἔλλειψιν ϗ τὴν Ὑπερβολὴν, ἐχέσας ἀμέλειτοι πεπερασμένυς τὺς Ἄξονας α, β, ὧν ἀμοιρεῖ ἡ Παραβολή. Ἔςι τοίνυν $\pi = \frac{4\beta\beta}{2\alpha}$, ἐξῆς προκύπτει ἡ ἀναλογία $2\alpha : 2\beta :: 2\beta : \pi$, τϐτέςιν „ἡ Παράμετρος „τȣ̃ πρώτȣ Ἄξονος ἐςὶν Εὐθεῖα τρίτη συνεχῶς ἀνά„λογος τῶν Ἀξόνων μείζονος ϗ ἐλάσσονος."

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 58.

Ἡ μὲν ἐν (§. 54.) ἔκθεσις ἐμφαίνει τὸ τῆς Παραμέτρȣ ἀντάξιον ποσὸν περιέχον τὴν γ διάςασιν τῆς Κ'σίας ἀπὸ τῆς κορυφῆς· ἡ δ' ἐν τῷ (§. ἀνωτ.) τὸ αὐτὸ περιλαμβάνον τȣ̀ς Ἄξονας. Τὸ ἐφεξῆς μέντοι Πρόβλημα παρέξεται τὴν ἔκθεσιν αὐτῆς ταύτης διὰ τῶν Ἀποτετμημένων, ϗ Τεταγμένων.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 59.

Ἐξίσωσιν εὑρεῖν παριςῶσαν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ πρώτη Παράμετρος ἑκάςης Κωνικῆς τομῆς πρὸς τὰς συνεκθέσεις τῶν τε Ἀποτετμημένων ϗ Τεταγμένων.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ἐπειδὴ $\pi = \frac{2\beta\beta}{\alpha}$, ἔςαι $\alpha\pi = 2\beta\beta$, καὶ $\frac{1}{2}$ $\alpha\pi = \beta\beta$. Ἀντὶ δὲ $\beta\beta$ τεθέντος τȣ̃ ταύτης ἀνταξίȣ ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει $\gamma\gamma \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἔϛαι $yy = \frac{2\chi\,(\frac{1}{2}\alpha\pi)}{\alpha} \mp \frac{\chi\chi\,(\frac{1}{2}\alpha\pi)}{\alpha\alpha}$, ὅ ἐϛιν yy $= \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητȣμένη ἐξίσωσις ἐπίτε τῆς Ἐλλείψεως, ϗ τῆς Ὑπερβολῆς, ὧν δηλονότι ὁ Ἄξων α πεπερασμένος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 60.

Ἐν δὲ τῇ Παραβολῇ, ἐπειδὴ $\alpha = \infty$, τὸ τȣ τύπȣ κλάσμα ἐϛὶν ἀπειροϛόν, ϗ τῷ μηδενὶ ἐξισȣμενον· ἄρα $yy = \pi\chi$. Ἀλλ' ἐπεὶ $4\gamma = \pi$ (§. 55.), ἡ ἄρα εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις $yy = \pi\chi$ ἡ αὐτή ἐϛι τῇ πρότερον εὑρεθείσῃ $yy = 4\gamma\chi$ (§. 51.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 61.

Ἐκ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $yy = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$ τῆς τὴν Παράμετρον περιεχȣσης, πρόεισι $2\alpha yy = 2\alpha\pi\chi \mp \pi\chi\chi = \pi\,(2\alpha\chi \mp \chi\chi)$, ἐξ ἧς ἡ ἀναλογία $yy : 2\alpha\chi \mp \chi\chi :: \pi : 2\alpha$. Ἀλλαμὴν $2\alpha\chi \mp \chi\chi = (2\alpha \mp \chi)\,\chi = \sigma\Pi \times \Pi\Sigma$, ἐν γένει ἄρα, „τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τȣ „πρώτȣ τῆς Ἐλλείψεως, ϗ Ὑπερβολῆς ἄξονος πρὸς „τὰ ὑπὸ τῶν συϛοιχȣσῶν Ἀποτετμημένων γινόμε-

„να λόγον ἔχει, ὃν ἡ Παράμετρος πρὸς τὸν πρῶ„τον Ἄξονα." Ἀεὶ δὲ ςαθερȣ̃ τυγχάνοντος τȣ̃ κατὰ τὴν ἀναλογίαν δευτέρȣ λόγȣ, κἂν ἄλλαι, ϗ ἄλλαι ληφθῶσιν αἱ Τεταγμέναι, ϗ αἱ συςοιχȣ̃σαι αὐταῖς Ἀποτετμημέναι, οἷον $yy : (2\alpha \mp \chi)\,\chi :: \pi : 2\alpha$, ϗ $YY : (2\alpha \mp X)\,X :: \pi : 2\alpha$, ὅθεν ϗ $yy : (2\alpha \mp \chi)\,\chi :: YY : (2\alpha \mp X)\,X$, καὶ $yy : YY :: (2\alpha \mp \chi)\,\chi : (2\alpha \mp X)\,X$, ἔςιν ἄρα ἐν γένει „τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων τετράγωνα „πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν αὐτῶν Ἀποτετμη„μένων γινόμενα."

Ἐὰν προσέτι ἡ τῶν Ἀξόνων περιεκτικὴ ἐξίσωσις (49.) ἀναλυθῇ εἰς ἀναλογίαν, οἷον ἡ $yy = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἐξ ἧς πολλαπλασιασμῷ προκύπτει ἡ $\alpha\alpha yy = 2\alpha\beta\beta\chi \mp \beta\beta\chi\chi = \beta\beta\,(2\alpha \mp \chi))\,\chi$, ἔσαι $yy : (2\alpha \mp \chi)\,\chi :: \beta\beta : \alpha\alpha$, τȣτέςι „κατά τε τὴν Ἔλλειψιν, ϗ τὴν Ὑπερβολὴν „τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων τετράγωνα πρὸς τὰ „ὑπὸ τῶν συςοιχουσῶν ἀποτετμημένων γινόμενα „λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τȣ̃ ἐλάσσονος ἡμιάξο„νος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ̃ μείζονος".

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 62.

Ε'πειδὴ κατὰ τὴν Παραβολὴν ἀεί ἐςιν $\gamma\gamma = \pi\chi$ (§. 60.) ὅ ἐςι τὸ ἀφ' ἑκάςης Τεταγμένης τετράγωνον ἰσȣ̃ται τῷ ὑπὸ τῆς Παραμέτρȣ (μονίμου ποσότητος) ϗ τῆς συςοιχȣ́σης Α'ποτετμημένης γινομένῳ, οἷον $\gamma\gamma = \pi\chi$, καὶ $\Upsilon\Upsilon = \pi X$, διὰ τȣ̃το $\pi\chi : \pi X : : \chi : X$, ὅθεν ϗ $\gamma\gamma : \Upsilon\Upsilon : : \chi : X$, τȣτέςι „τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τεταγ„μένων πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ἐν τῷ λόγῳ τῶν αὐταῖς „συςοιχȣσῶν Α'ποτετμημένων".

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 63.

Τὴν ἀναλυτικὴν ἔκθεσιν τῆς Υ'ποκαθέτȣ (ΠΝ) εὑρεῖν.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ἡ Ζμ χορδὴ κάθετος ἐφέςηκε τῇ Ε'φαπτομένῃ ΜΤ (§. 47.)· διὸ ϗ τῇ ΝΜ, Καθέτῳ (ἐξ ὑποθέσεως) ἐφιςαμένῃ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Ε'φαπτομένης, ἔςαι παράλληλος. Τὰ ἄρα τρίγωνα ζΜΝ, ζμΖ ὅμοιά εἰσὶ, ϗ δὴ $\zeta\mu$ ($= \zeta M \pm MZ$) ($= 2\alpha$) : ζZ ($= 2\alpha \mp 2\gamma$) : : μM ($= MZ$) ($= \chi + \gamma \mp$ Σχ. 11. 12.

$\frac{\gamma\chi}{\alpha}$ (§. 49.)) : $ZN = \chi + \gamma \mp \frac{\gamma\gamma}{\alpha} \mp \frac{2\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha}$. Ἀλλὰ $ZN - \Pi Z\ (= \chi - \gamma) = \Pi N$, ἄρα $\Pi N = 2\gamma \mp \frac{\gamma\gamma}{\alpha} \mp \frac{2\gamma\chi}{\alpha} + \frac{\gamma\gamma\chi}{\alpha\alpha}$, ἡ ζητουμένη τῆς Ὑποκαθέτου ἔκθεσις, ἥτις, ἐκβληθέντος μὲν τοῦ $\gamma\gamma$, ἀντεισαχθείσης δὲ τῆς Παραμέτρου, ἢ τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἐφ' ἁπλουστέρας καὶ γενικωτέρας ἐκθέσεις ἀνάγεται. Ἐπεὶ γὰρ (§. 54.) $\pi = 4\gamma \mp \frac{2\gamma\gamma}{\alpha}$, ἄρα $\gamma\gamma = \pm 2\alpha\gamma \mp \frac{1}{2}\alpha\pi$, καὶ ἡ ἄρα $\Pi N = 2\gamma \mp 1 \frac{(\pm 2\alpha\gamma \mp \frac{1}{2}\alpha\pi)}{\alpha} \mp \frac{2\gamma\chi}{\alpha} + 1 \frac{(\pm 2\alpha\gamma \mp \frac{1}{2}\alpha\pi)\chi}{\alpha\alpha} = 2\gamma - 2\gamma + \frac{1}{2}\pi \mp \frac{2\gamma\chi}{\alpha} \pm \frac{2\gamma\chi \mp \frac{1}{2}\pi\chi}{\alpha} = \frac{1}{2}\pi \mp \frac{\pi\chi}{2\alpha}$. Ἐν ταύτῃ οὖν τῇ ἐξισώσει ἀντεισαχθέντος ἀντὶ π τοῦ ταύτης ἀνταξίου ποσοῦ $\frac{2\beta\beta}{\alpha}$ (§. 56.) προκύπτει ἐξίσωσις ἑτέρα ἡ $\Pi N = \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta\beta}{\alpha}\right) \mp \frac{\chi}{2\alpha}\left(\frac{2\beta\beta}{\alpha}\right) = \frac{\beta\beta}{\alpha} \mp \frac{\beta\beta\chi}{\alpha\alpha}$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α'.

§. 64.

Ἡ κατὰ τὴν Παραβολὴν Ὑποκάθετος ἰσῦται τῇ Ἡμιπαραμέτρῳ· ἐν γὰρ τῇ ἐξισώσει ΠΝ $= \frac{1}{2}$ Σχ. 13.
$\pi \mp \frac{\pi\chi}{2\alpha}$, ἐπεὶ $\alpha = \infty$, ἐξυδενωθήσεται μὲν τὸ κλάσμα, ἔσεται δὲ ἡ ΠΝ $= \frac{1}{2}\pi =$ ΖΑ. Ἐπεὶ δὲ ΖΑ $= 2\gamma$ (§. 56.) ἔςιν ἄρα ἡ ΠΝ ἐπὶ τῆς Παραβολῆς ποσότης μηδέποτε αὔξυσα, ἢ φθίνυσα, ὅ ἐςιν εὐςαθὴς, ὁποῖον ἂν ᾖ τὸ τῆς ψαύσεως σημεῖον Μ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 65.

Ἐὰν δέ τις ὑπενδοιάζων, ὡς ἄρα ὄσης $\alpha = \infty$ τὸ κλάσμα ἐςὶ μηδὲν (ὅπερ ἀθέμιτον τοῖς γε προβεβηκόσι) γεωμετρικὴν ἀπαιτῇ περὶ τύτυ τὴν δεῖξιν, ἐποίσομεν ἐκ περιυσίας, ΜΖ $=$ Μμ (§. 52.). Καὶ ἐπεὶ ἡ Ζμ κάθετος ἐφέςηκε τῇ Ἐφαπτομένῃ (§. 47.), διὰ τῦτο παράλληλός ἐςι τῇ ΜΝ· ἄρα ΜΖ $=$ Μμ $=$ ΑΠ $=$ ΖΝ, κοινῆς δὲ ἀφαιρεθείσης τῆς ΖΠ, ἐγκαταλείπεται ΑΖ $= 2\gamma =$ ΠΝ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β'.

§. 66.

Τῶν Κωνικῶν Τομῶν τῆς μεν ὑπερβολῆς ἡ

Ὑποκάθετός ἐςιν ἴση τῇ Ἡμιπαραμέτρῳ, τῆς δὲ Ἐλλείψεως, ἐλάσσων τῆς Ἡμιπαραμέτρȣ, τῆς δὲ Ὑπερβολῆς, μείζων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'.

§. 67.

Τὴν Ἀναλυτικὴν ἔκθεσιν τῆς Ὑφαπτομένης ΠΤ εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΝΜΤ Ὀρθογώνιον ἐςὶ κατὰ τὸ Μ, ἔςαι $\div$ ΝΠ : ΠΜ : ΠΤ, καὶ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ $\Pi T = \frac{\Pi M^2}{\Pi N}$, ὅ ἐςι

$$\Pi T = \frac{\pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}}{\frac{1}{2}\pi \mp \frac{\pi\chi}{2\alpha}} (\S.\ 59,\ 63.) = \frac{\chi \mp \frac{\chi\chi}{2\alpha}}{\frac{1}{2} \mp \frac{\chi}{2\alpha}}$$

$$= \frac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{2\alpha} : \frac{\alpha \mp \chi}{2\alpha} = \frac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha \mp \chi}$$

$$= \frac{4\alpha^2\chi \mp 2\alpha\chi\chi}{2\alpha\alpha \mp 2\alpha\chi} = \frac{2\alpha\chi \mp \chi\chi}{\alpha \mp \chi}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 68.

Ἡ δὲ κατὰ τὴν Παραβολὴν ὑφαπτομένη ΠΤ δείκνυται $=2\chi$, εἴγε τεθέντος ∞ ἀντὶ α ἐν τῇ εὑρεθείσῃ ἐξισώσει, ἔσται ΠΤ $= \frac{2\infty\chi \mp \chi\chi}{\infty \mp \chi} = \frac{2\infty\chi}{\infty}$ (Ἀλγβ. §. 545.) $= 2\chi$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 69.

Ἀρίστη μὲν ὄντως ἡ δεῖξις ἥδε, ἐκ περιουσίας μέντοι αὐτὸ δὴ τοῦτο καὶ οὕτως ὑποσυνάξομεν· Σχ. 13.
ἐπειδὴ ΠΤ $= \frac{\text{ΜΠ}^2}{\text{ΠΝ}}$, ἔσται ΠΤ $= \frac{\pi\chi}{\frac{1}{2}\pi} =$ (§. 60, 64.) $= \frac{2\pi\chi}{\pi} = 2\chi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 70.

Ἐπεὶ ἐν τῇ Ἐλλείψει ἐστὶ ΠΤ $= \frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$, ἔσται ἄρα $(\alpha - \chi)$ ΠΤ $= (2\alpha - \chi)\,\chi$, καὶ ΠΤ : 2α

$- \chi :: \chi : \alpha - \chi :: 2\chi : 2\alpha - 2\chi$· ἀλλαμὴν $2\alpha - \chi > 2\alpha - 2\chi$, ἄρα καὶ $\Pi T > 2\chi$ (Γεωμετρ. §. αὐτ). Κατὰ δὲ τὴν ὑπερβολὴν ἐπειδὴ $\Pi T = \frac{2\alpha\chi + 2\chi\chi}{\alpha + \chi}$, ἔςαι $(\alpha + \chi)\,\Pi T = (2\alpha + \chi)\chi$, ὅθεν ἡ ἀναλογία $\Pi T : 2\alpha + \chi :: \chi : \alpha + \chi :: 2\chi : 2\alpha + 2\chi$· ἀλλαμὴν $2\alpha + \chi < 2\alpha + 2\chi$, ἄρα $\Pi T < 2\chi$, τετέσι (Πορ. Α΄.) „ἡ Ἐφαπτομένη κατὰ μὲν τὴν Παραβολὴν ἰσοῦται τῷ διπλῷ τῆς Ἀποτετμημένης, αὐτῆς δὲ ταύτης ὑπερέχει ἐν τῇ Ἐλλείψει, ἐλλείπει δὲ κατὰ τὴν Ὑπερβολήν".

ΠΟ΄ΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 71.

Σχ. Ῥᾷςα ἔτι ὑποσυνάγεται, ὅτι ἐν μὲν τῇ Πα-
11. ραβολῇ ἐςιν ἡ $\Sigma T = \chi$, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει $\Sigma T > \chi$,
12.
13. ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ $\Sigma T < \chi$, εἴ τ᾽ οὖν „τὸ τῆς διαμέτρου, εἰ δέοι, προαχθείσης μέρος ΣΤ τὸ μεταξὺ τῆς κορυφῆς, καὶ τοῦ σημείου, καθ᾽ ὃ προσαυτᾷ τῇ Ἐφαπτομένῃ προαχθείσῃ, ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἰσοῦται τῇ Ἀποτετμημένῃ, αὐτῆς δὲ ταύτης ὑπερβάλλει μὲν κατὰ τὴν Ἔλλειψιν, ἐλλείπεται δὲ κατὰ τὴν Ὑπερβολήν".