ΚΕΦ. Β΄.

Περὶ Φύσεως τῶν Κωνικῶν τομῶν ἤδη ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφεισῶν, καὶ περὶ τῶν κατὰ τὰς Διαμέτρους αὐτῶν ἀρχοειδεστέρων ἰδιωμάτων.

§. 18.

Σχ. 8. Ἐὰν ληφθῇ εὐθεῖα ἡ ΑΘ, ϗ ἐκτὸς αὐτῆς
ϗ 9. σημεῖον τὸ Ζ, δυνατὸν ἐπινοήσασθαι Καμπύλην οὕτω
ϗ 10. καταγραφεῖσαν, ὥστε τὰς ἀπό τινος αὐτῆς σημείου Μ δισσὰς διαστάσεις, τὴν μὲν ἀπὸ τοῦ Μ ἕως τῆς εὐθείας ΑΘ, τὴν δὲ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Μ ἕως τοῦ ληφθέντος ἐν αὐτῇ σημείου Ζ, λόγόν τινα πρὸς ἀλλήλας τηρεῖν, ϗ ἀεὶ τὸν αὐτόν· οἷον, ἐν ἑκάστῳ σχήματι, τὸν λόγον ΜΘ : ΜΖ ἀεὶ ὑπάρχειν, ὡς ὁστισοῦν ἄλλος ΜΘ : ΜΖ. Δῆλον δὲ, ὅτι τριχῶς ἂν τουτὶ γένοιτο· ἤτοι γὰρ ΜΘ > ΜΖ, ἢ ΜΘ = ΜΖ, ἢ ΜΘ < ΜΖ· τρεῖς ἄρα Καμπύλαι καταγραφήσονται ἀλλήλων εἰδικῶς διαφέρουσαι. Ἡ μὲν οὖν ΑΘ ὀνομάζεται ΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΑ, τὸ δὲ Ζ σημεῖον ἙΣΤΙΑ· Καὶ ὅταν μὲν ᾖ ΜΘ > ΜΖ, ἡ Καμπύλη καλεῖται ἘΛΛΕΙΨΙΣ, ὅταν δὲ ΜΘ > ΜΖ, ὙΠΕΡΒΟΛΗ, ὅταν δὲ ΜΘ = ΜΖ, ΠΑΡΑΒΟΛΗ. Ἀλλ᾽ ἐπείπερ ταῖς τοῦ Κώνου τομαῖς

γεωμετρικῶς θεωρȣμέναις πρόσεσιν αὐτὰ ταῦτα τὰ ῥηθέντα ἰδιώματα, τȣ́τȣ χάριν τὰς Καμπύλας τὰς τῷ ἀνωτέρω λόγῳ καταγραφȣμένας προσήκει Κωνικὰς τομὰς ὀνομάζειν.

§. 19.

Ἐὰν διὰ τȣ̃ Ζ σημείȣ Κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν Διευθετȣ̃σαν ΑΘ ἡ ΖΛ, εἰρήσεται αὕτη *Διεύθυνσις* τȣ̃ πρώτȣ Ἄξονος. Δῆλον δὲ, ὡς ἄρα τῷ τῆς κωνικῆς τομῆς σαθερῷ λόγῳ ΜΘ : ΜΖ ἑτέρȣ προσαρμοσθέντος ἐν φθινȣ́σῃ προόδῳ, ϗ αὖθις ἑτέρȣ, εἴτ' ȣ̃ν τȣ̃ Μ μᾶλλον, ϗ μᾶλλον ἔγγιον γινομένȣ τῇ ΑΖ, ἐπάναγκες τέως τὴν ΜΘ, ϗ ΜΖ εἰς μίαν εὐθεῖαν συνελθεῖν, εἴτ' ȣ̃ν τὸ Μ συμπεσεῖν ἐπὶ τȣ̃ Σ. Αὐτὸ δὴ τὸ σημεῖον Σ ȣ̃τως εὑρεθὲν, ὥστε εἶναι ΣΑ : ΣΖ : : ΜΘ : ΜΖ, ΚΟΡΥΦΗ ἐστι τῆς τομῆς, εἴτ' ȣ̃ν ἀρχὴ, ἢ πέρας τȣ̃ πρώτȣ Ἄξονος.

§. 20.

Ἐκ τῶν (§. 18, 19.) συνάγεται τὴν Κωνικὴν τομὴν εἶναι Ἔλλειψιν, ἢ Ὑπερβολὴν, ἢ Παραβολὴν, ἐὰν ἡ αὐτῆς Κορυφὴ τῇ Ἑστίᾳ ᾖ ἐγγυτέρα ἢ τῇ Διευθετȣ́σῃ, ἢ ἀφεστηκεῖα ἐκείνης μᾶλλον ἢ ταύτης, ἢ ἀμφοῖν ἰσοδιεστῶσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 21.

Δοθεισῶν θέσει τῆς τε Διευθετούσης ΑΘ, καὶ τῆς Ἑστίας Ζ, καὶ τῆς Κορυφῆς Σ, ὅσα δήποτ' ἂν δέῃ, τῆς τομῆς σημεῖα εὑρεῖν, καὶ τὴν Καμπύλην δι' αὐτῶν καταγράψαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ ἐσάσθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ Ἄξονος ἡ ΣΒ = ΣΖ, καὶ ἤχθω τέρματος ἄνευ ἡ ΑΒΔ, καὶ ἐπὶ τοῦ Ἄξονος ἀνεσάσθωσαν πρὸς ὀρθὰς ὁσαιδήποτε αἱ ΠΔ, ΠΔ, ΠΔ (τοῦτ' αὐτὸ δὴ γενέσθω, εἰ δοκεῖ, καὶ ἐκ θατέρου τῆς κορυφῆς μέρους) καὶ εἰλήφθωσαν ἐπ' αὐτῶν σημεῖα Μ, Μ οὕτως, ὡς ἀεὶ ὑπάρχειν ΖΜ = ΠΔ, καὶ μετηνέχθωσαν αἱ ΠΜ ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν πρὸς θάτερον μέρος τοῦ Ἄξονος προηγμένων εὐθειῶν, ὥστε εἶναι ἑκάστην ΠΜ = Πμ. Λέγω δὴ τὴν διὰ τῶν σημείων Μ, Μ, μ, μ διϊοῦσαν Καμπύλην εἶναι τὴν ζητουμένην Κωνικὴν Τομήν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθω ἐξ οὑτινοσοῦν αὐτῆς σημείου Κάθετος ἐπὶ τὴν Διευθετοῦσαν ἡ ΜΘ, καὶ τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΑΠΔ ὁμοίων ὄντων, ἐσὶ ΔΠ : ΠΑ : : ΣΒ : ΣΑ, εἴτ' ὖν ΖΜ : ΜΘ : : ΣΖ : ΣΑ, τῦτ' ἔςιν, αἱ ἀπό τε τῆς Ἑςίας, ϗ τῆς Διευθετέσης τῶν σημείων Μ, Μ εἰσιν ἐν τῷ τῆς Καμπύλης ςαθερῷ λόγῳ ΣΖ : ΣΑ. Τὰ ἄρα ὕτως εὑρεθέντα σημεῖα Μ ὑπάρχυσι τῆς Καμπύλης (§. 19.).

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 22.

Τὰ αὐτὰ δήπυ κρατήσει δεικνύμενα ϗ ἐπὶ θατέρυ κλωνὸς Σμμ τῦ ἴσυ ϗ ὁμοίυ τῷ ΣΜΜ, εἴγε τὰ σημεῖα μ, μ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ϗ ἀφιςάμενα τῦ Ἄξονος, ὅσον ϗ τὰ ἐπὶ θάτερα σημεῖα Μ, Μ· ὥςε ἐν γένει ἅπαντα τὰ τῦ ΣΜΜ κλωνὸς, ϗ θατέρυ Σμμ ἔςαι οἰκεῖα. Ἐκ δὲ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς προΐασιν ἰδιώματα τῶν Κωνικῶν Τομῶν τὰ ἐχόμενα.

§. 23.

Α΄. Ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ἡ ὑπὸ ΣΑΒ γωνία ἐςὶ 45°, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει ἐλάσσων, ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ μείζων. Ἐπείτοιγε τῦ τριγώνυ ΑΣΒ ὀρθογωνίυ ὄντος πρὸς τῷ Σ, αἱ λοιπαὶ δύω γωνίαι Ὀρθῇ μιᾷ ἐξισῦνται. Ἀλλαμὴν ἐν παντὶ τριγώνῳ ἡ μείζων πλευρὰ ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ἄρα ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ, ὕσης (§. 20.) ΑΣ = ΣΖ = ΣΒ ἐκ κατασκευῆς, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει ΑΣ >

ΣΖ = ΣΒ, ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ ΑΣ < ΣΖ = ΣΒ, ἔςαι ἡ ὑπὸ ΣΑΒ ἐν τῇ Παραβολῇ μὲν 45°, ἐν δὲ τῇ Ἐλλείψει ἐλάσσων, ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ μείζων.

§. 24.

Β΄. Ἐπείπερ ἐκ τῆς κατασκευῆς ἀεὶ δεῖ γίνεσθαι (§. 21.) ΖΜ = ΠΔ εἰς εὕρεσιν τȣ̃ σημείȣ Μ, ὅταν ἄρα ἡ ΖΠ < ΠΔ, προσδιορισθήσεταί τι σημεῖον Μ· ὅταν δὲ ΖΠ > ΠΔ, διορισθῆναι ȣ̓ δύναται· ἐπείτοιγε ὄντος ΔΠ > ΖΠ, Τρίγωνον συνίςαται ὀρθογώνιον τὸ ΖΜΠ, ȣ̃τινος ἡ τὴν ὀρθὴν Ὑποτείνȣσα ΖΜ, εἴτ' ȣ̃ν ΠΔ μείζων τῆς ΖΠ. Ὅταν δὲ ἡ ΖΠ μείζων ᾖ τῆς συςοιχȣ́σης αὐτῇ ΠΔ, τηνικαῦτα ἡ ΖΜ ȣ̓ μὴ ἐφίξεται αὐτῆς (τῆς ΠΔ), ȣ̓δ' ἀποτμηθήσονται ὑπ' ἀλλήλων εἰς εὕρεσιν σημείȣ τινος Μ· ἀλλὰ γὰρ ἐὰν ΖΠ = ΠΔ, ἡ ΖΜ ὅλη πίπτει ἐπὶ τὴν ΖΠ, τȣ̃τ' ἔςι τὸ Μ σημεῖον τῆς Καμπύλης τῷ τȣ̃ Ἄξονος σημείῳ Π συμπίπτει, κἀν τȣ́τῳ ἡ Καμπύλη περατȣ̃ται. Τȣ́τȣ τεθέντος. . . .

Σχ. 8. Ἐν τῇ Ἐλλείψει αἱ Εὐθεῖαι ΑΠ αὔξȣσι μᾶλλον, ἢ αἱ αὐταῖς συςοιχȣ̃σαι ΠΔ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ΣΑΒ < 45°, ἔςιν ΑΣ > ΣΒ, καὶ (§. 21.) ΑΖ > ΖΔ. Ἐὰν δ' ἐκ τȣ̃ Δ Κάθετος ἀχθῇ ἡ Δο ἐπὶ τὴν ἐφεξῆς ΠΔ, Τρίγωνον συνίςαται τὸ ΔοΔ ὀρθογώνιον, ϗ ὅμοιον τῷ ΑΣΒ· ὅθεν ἡ Κάθετος

Δο μείζων ἐςι τῆς ἑτέρας πλευρᾶς οΔ. Ἀλλ' ἡ μὲν Δο = ΠΖ (= ΖΠ) Κάθετος τὴν τῆς ΑΖ παριςᾷ αὔξησιν· ἡ δ' ἐλάσσων πλευρὰ οΔ, τὴν τῆς ΖΔ· ἄρα αἱ αὐξήσεις τῆς ΑΖ (= ΖΠ) μείζους εἰσι τῶν τῆς ΖΔ αὐξήσεων. Ἐπάναγκες τοίνυν συνεχῶς αὐξούσης τῆς ΑΖ, γενέσθαι μίαν τινα ΖΠ ἐξισωμένην τῇ ΖΔ σὺν ἁπάσαις ταῖς αὐτῆς αὐξήσεσι. Κείσθω δὴ ΖΠ‴ = Π‴Δ‴ (= ΖΔ σὺν ἁπάσαις αὐτῆς ταῖς αὐξήσεσιν)· ἡ ἄρα Π‴Δ‴ τῇ ΖΠ‴ ἐπιπεσοῦσα ἐφαρμόσει, ὅ ἐςι τὸ Μ‴ ἐπὶ τοῦ Π‴ σημείου πεσεῖται, ἔνθα δὴ καὶ ἐπανακάμπτουσα ἡ Καμπύλη πέρας λήψεται. Εἰ δὲ ληφθείη, ἤτοι περαιτέρω τῆς Π‴Δ‴, ἢ μεταξὺ τοῦ Α καὶ τῆς ΣΒ, ἄλλη τις ΠΔ, αὕτη δὴ ἐλάσσων ἂν εἴη, ἢ ὥςε δύνασθαι γενέσθαι = ΖΠ, καὶ δὴ οὐκ ἂν δι' ἐκείνης προσδιορισθείη σημεῖον ἄλλο Μ. Ἔςιν ἄρα ἡ Ἔλλειψις Καμπύλη, ἧς περ οἱ κλῶνες ΣΜΜ, Σμμ πρῶτον μὲν τοῦ Ἄξονος ἑκατέρωσε ἀφίςανται, εἶτα πρὸς αὐτὸν ἐπανακάμπτοντες συνέρχονται ἐν σημείῳ τῷ σ, ὅπερ ἡ ἑτέρα ὑπάρχει τῶν Κορυφῶν τῆς Ἐλλείψεως, ἔνθα καὶ ὁ πρῶτος Ἄξων ἀποτερματίζεται· περαιτέρω δὲ τῶν Σ, σ ἀδύνατον ὑπάρχειν Κορυφὴν ἄλλην. Τούτου χάριν ἡ Ἔλλειψις *Ἐπανακάμπτουσα* Καμπύλη καλεῖται, καὶ ἔςι μοναδική.

§. 25.

Σχ.9. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ, οὔσης τῆς ὑπὸ ΣΑΒ $>$ 45°, ἔςαι ΑΣ $<$ ΣΒ· ἔνθεντοι αἱ ΑΠ ἧττον αὔξουσιν, ἤπερ αἱ συςοιχοῦσαι αὐταῖς ΠΔ· δι' ὃ καὶ ΑΖ $<$ ΖΔ. Ἀλλ' ἐφόδῳ δείξεως τῇ ἀνωτέρωθι παρακλησίας ἐπίδηλον, ἑκάςην ΖΠ τῶν ἔνερθεν τοῦ Ζ, ἐλάσσω εἶναι τοῦ οΔ μέρους τῆς ἐφεξῆς ΠΔ τοῦ ἐμπεριλαμβανομένου μεταξὺ τῆς Καθέτου Δο τῆς ἀπὸ τοῦ πρὸ αὐτῆς Δ ἀχθείσης, καὶ τοῦ οἰκείου Δ· ἐξ οὗ δὴ μηδεμίαν ΖΠ δύνασθαι ἐξισωθῆναι τῇ ἑαυτῆς σύςοιχῳ ΠΔ, πρόδηλον. Διὰ ταῦτα οἱ τῆς Ὑπερβολῆς κλῶνες ΣΜΜ, Σμμ ἑκατέρωσε ἐπ' ἄπειρον προϊόντες ἀφίςανται τοῦ κατ' αὐτὴν Ἄξονος ΣΠ. Ἐὰν δὲ προαχθείσης τῆς ΒΑ πέραν τῆς Διευθετούσης ἐπὶ τὸ Η, καὶ τῆς ΣΑ πέραν τοῦ Α, ληφθῶσιν αἱ εἰς τὰ ὑπὲρ τὴν Διευθετοῦσαν ἥκουσαι ΖΠ, πρῶτον μὲν ὑπερέξουσι τῶν συςοιχούσων αὐταῖς ΠΔ. Ἐπεὶ δὲ αἱ ΠΔ συνεχῶς αὔξουσι μᾶλλον, ἢ αἱ αὐταῖς συςοιχοῦσαι ΖΠ (ὃ δὴ καὶ περὶ τῶν ἔνερθεν τῆς Διευθετούσης δέδεικται), ἀνάγκη δήπου μίαν τινα ΠΔ ἐξισωθῆναι μιᾷ τινι ΖΠ. Κείσθω οὖν Π'''Δ''' = ΖΠ'''· δεῖ δὴ τὸ Π''' σημεῖον εἶναι τῆς Ὑπερβολῆς· τῶν γὰρ τριγώνων Δ'''Π'''Α, ΑΣΒ ὁμοίων ὄντων, ἔςι Π'''Α : Π'''Δ''' : : ΑΣ : ΣΒ, ὅ ἐςι Π'''Α : Π'''Ζ : :

ΑΣ : ΣΒ· τὸ ἄρα Π‴ σημεῖον ἐστὶ τῆς Ὑπερβολῆς, εἴγε εἴρηται (§. 18, 21.) τὴν διάστασιν (Π‴Α) τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς Διευθετούσης πρὸς τὴν διάστασιν (Π‴Ζ) τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τῆς Ἑστίας δεῖν εἶναι ἐν τῷ σταθερῷ λόγῳ τῆς τομῆς ΑΣ : ΣΒ. Ἐπείπερ ἔτι αἱ Εὐθεῖαι ΠΔ αἱ ὑπὲρ τὴν Π‴Δ‴ ἀεὶ αὔξουσι, καὶ ἀεὶ μᾶλλον, καὶ μᾶλλον ὑπερακοντίζουσι τῶν αὐταῖς συστοιχουσῶν ΖΠ, δυνατὸν καὶ ὕπερθεν τῆς Διευθετούσης προσδιορισθῆναι σημεῖα m τοιάδε, ὥστε τὰς εὐθείας Zm ἰσοῦσθαι ταῖς συστοιχούσαις αὐταῖς ΠΔ· καὶ οὕτως ἐκφυήσονται πρὸς ἑκάτερα τοῦ Ἄξονος καινοὶ κλῶνες Ὑπερβολῆς δύο ἐπ' ἄπειρον ἀνατρέχοντες, καὶ πρὸς τὴν Ἑστίαν Ζ, καὶ Διευθετοῦσαν τὴν ΑΘ ἀναφερόμενοι. Ταῦτ' ἄρα ἡ ΣΠ‴, ἢ Σσ κοινός ἐστιν Ἄξων, καὶ διωρισμένου μεγέθους μεταξὺ τῶν κατὰ τὰς *Ἀντικειμένας* Ὑπερβολὰς κορυφῶν Σ, σ.

§. 26.

Ἐν δὲ τῇ Παραβολῇ, τῆς ὑπὸ ΣΑΒ γωνίας
οὔσης = 45°, ἐστὶν ΑΣ = ΣΒ, καὶ ΑΠ = ΠΔ. Ἅπα- Σχ.
σαι ἄρα αἱ ΠΖ αἱ μεταξὺ τοῦ Σ καὶ τῆς Διευθετούσης 10.
ἔχουσαι τὸ σημεῖον Π, μείζους εἰσὶ τῶν αὐταῖς συστοι-
χουσῶν ΠΔ· ὥστε ἀδύνατον ἐκεῖσε σημεῖα Μ προσ-
διορισθῆναι. Πᾶσαι δὲ αἱ ὑπὸ τὸ Σ σημεῖον ΠΖ ἤτ-

τȣς εἰσὶ τῶν οἰκείων συςοιχȣσῶν ΠΔ· ἀνθ' ὅτȣ δὴ ὑπὸ τὴν Σ κορυφὴν δύνανται ἄπειρα σημεῖα Μ προσδιορίζεσθαι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΠΔ· ἔςιν ἄρα ἡ Παραβολὴ Καμπύλη δύω μόνȣς ἔχȣσα κλῶνας, οἵτινες προϊόντες ἐπ' ἄπειρον τȣ̃ Ἄξονος ἀφεςήκασι.

§. 27.

Σχ.8. 9. 10. Γ'. Ἐὰν, δοθεισῶν τῆς Διευθετȣ́σης ΑΘ, ϗ τῆς Ἑςίας Ζ, ϗ τῆς Κορυφῆς Σ, ζητηθῇ, πότερον ἄρα, ἄπειρος Ἄξων ἔνεςι τῇ Τομῇ, ἢ ϗ ἑτέρα Κορυφὴ, σ, ἤχθω ἀπὸ τῆς Ἑςίας Ζ ὑπὸ γωνίαν 45° ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος Εὐθεῖα τέρματος ἄτερ ἡ ΖΗ, ϗ ἐκ τȣ̃ σημείȣ Η, καθ' ὃ συμβάλλει τῇ ΑΒ προαχθείσῃ, εἰ δέοι, κατήχθω ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος Κάθετος ἡ Ζσ τέμνȣσα τὸν Ἄξονα κατὰ τὸ σ, ϗ τὴν ἑτέραν, ἐὰν ᾖ, κορυφὴν προσδιορίζουσα. Τȣ̃ γάρ τοι ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΖσΗ ἰσοσκελȣ̃ς ὄντος, ἐςὶ Ζσ = σΗ· ἐςὶ δὲ παρὰ τȣ̃το σΑ : σΗ : : ΣΑ : ΣΒ, εἴτ' ȣ̃ν ἡ διάςασις (σΑ) τȣ̃ σημείȣ σ ἀπὸ τῆς Διευθετȣ́σης, πρὸς τὴν διάςασιν (Ζσ = σΗ) τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ ἀπὸ τῆς Ἑςίας, ἔςιν ἐν τῷ ςαθερῷ λόγῳ τῆς Καμπύλης ΑΣ : ΣΖ = ΣΒ, (§. 18. 19)· Ἀναγκαίως ἄρα τὸ σ, σημεῖον τῆς Καμπύλης ἐςὶ, ϗ ἐπείπερ ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος ὑπάρχει, ἐςὶ ϗ Κορυφὴ τῆς Τομῆς.

§. 28.

Ἐκ δὴ τέτων συνάγεται τὸν τῆς Ἐλλείψεως, ϗ Ὑπερβολῆς Ἄξονα Σσ ἀεὶ εἶναι διωρισμένε μεγέθες· ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῆς Ἐλλείψεως ἐκτερματίζεσθαι ἀεὶ ἔνερθεν τῆς Ἑςίας Ζ· τῆς γάρ τοι γωνίας ὑπὸ ΣΑΒ $<$ 45° ἔσης, τὴν πλευρὰν ΑΒ προαχθεῖσαν ἐπάναγκες συμπεσεῖν τῇ ΖΗ ἐπὶ τὰ πρὸς ἅπερ ἂν ὦσιν αἱ (ΣΑΗ + ΑΖΗ) $<$ 180°. Ἐν δὲ τῇ Ὑπερβολῇ· ἐπὶ τὰ ὑπερ τὴν Ἑςίαν Ζ ὁ Ἄξων ἀποτερματίζεται, εἴγε αἱ (ΣΑΗ + ΑΖΗ) $<$ 180°· τῆς δὲ Παραβολῆς τὸν Ἄξονα ἐπ' ἄπειρον ἐκτείνεσθαι λίαν καταφανές. Ἐπείτοιγε ἡ ΖΗ παράλληλος ἔσα τῇ ΑΒ, ἐδέποτ' ἂν ἐν πεπερασμένῳ διαςήματι ταύτῃ συμπέσοι· ἀλλὰ γὰρ ἐν ἀπείρῳ διαςήματι συμπίπτειν ἐπινοεῖται καθ' ἑκάτερα κατά τε τὰ πρὸς τὸ Δ δηλονότι ϗ κατὰ τὰ πρὸς τὸ Α.

§. 29.

Δ'. Ἐὰν ἐπὶ μὲν τε Ἄξονος προαχθέντος ληφθῇ σα = ΣΑ, ἐπὶ δὲ τῆς Π‴Δ‴ προαχθείσης ἐπὶ θάτερα τε Ἄξονος, γένηται σβ = ΣΒ, ἔςαι ἡ ἀπέραντος Εὐθεῖα αβδ παράλληλος τῇ ΑΒΔ· ἴσαι γὰρ ἀλλήλαις αἱ ἐναλλὰξ Γωνίαι ὑπὸ ΣΑΒ, σαβ. Τῶν δέ τοι Παραλλήλων Δδ, Δδ, ἑκάςη Σχ. 8. 9.

ἰσῦται τῷ πρώτῳ Ἄξονι $\Sigma\sigma$, εἴγε κατὰ μὲν τὴν Ἔλλειψιν ἐςὶν ὁ Ἄξων $\Sigma\sigma = (\Sigma Z + Z\sigma) = (\Sigma B + \sigma H) = (\beta\sigma + \sigma H) = \beta H$, κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν $\Sigma\sigma = (\sigma Z - Z\Sigma) = (\sigma H - \Sigma B) = (\sigma H - \sigma\beta) = \beta H$. Ἀλλαμὴν ἅπασαι αἱ $\Delta\delta$ παράλληλοι, ϗ δὴ ϗ ἴσαι ἑκάςη τῇ βH, ἑκάςη ἄρα $\delta\Delta = \beta H = \Sigma\sigma$.

§. 30.

Κἀκεῖνο δὲ πρόδηλον, ὡς ἐὰν ληφθῶσι δύω $\Pi\Delta$ ἰσοδιεςῶσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν Σ, σ, ἐςὶ $\Sigma\sigma$ $\Pi = \Delta + \Pi\Delta$· ἀμέλειτοι, κατὰ μὲν τὴν Ἔλλειψιν τὸ ἄθροισμα δυεῖν $\Pi\Delta$ ἰσοδιεςωσῶν ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἰσῦται τῷ πρώτῳ Ἄξονι $\Sigma\sigma$. Ἐὰν γὰρ (§. 24.) ΣB θεωρηθῇ ὡς πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς ἀναλογίας, ὁ ἔσχατος ἔςαι $\Pi'''\Delta'''$· δείκνυται γὰρ (§. αὐτόθ.) τὰς διαφορὰς ἁπασῶν τῶν $\Pi\Delta$ τῶν μεταξὺ τῆς ΣB, ϗ $\Pi'''\Delta'''$, ἀλλήλαις ἰσῦσθαι. Διὰ ταῦτα ἐν $\div$ ΣB, $\Pi\Delta$, $\Pi\Delta$ . . . . . . $\Pi'''\Delta'''$ πρόοδον καθιςᾶσιν ἀριθμητικὴν, ἧς πρῶτος μὲν ὅρος ἡ $B\Sigma$, ἔσχατος δὲ ἡ $\Pi'''\Delta'''$. Ἀλλ' ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ δυοῖν ὅρων ἰσοδιεςώτων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἐξισῦται τῷ τῦ πρώτυ ϗ ἐσχάτυ ἀθροίσματι (§. 46. Ἀλγβ.)· ἡ ἄρα $\Pi\Delta$ σὺν τῇ ἰσοδιεςώσῃ $\Pi\Delta = \Sigma B + \Pi'''\Delta''' = \Sigma Z + Z\sigma = \Sigma\sigma$.

Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν, ἐξισῦται τῷ πρώτῳ Ἄξονι ἡ δυεῖν ἰσοδιεςωσῶν ἀπὸ τῶν κορυφῶν διαφορά· ἔχει γάρ τοι ἐν ταύτῃ τὰ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ὅτως. Ἐὰν οἱ ὑπὲρ τὴν Διευθετῦσαν ὅροι ΠΔ καταφατικοὶ, φέρε, τεθῶσιν, τῶν εὐχρησέντων ἵν' ἐκ τῆς Ἑςίας Ζ προσδιορισθῶσι τὰ ΠΙ σημεῖα, ἔσχατός ἐςιν ἡ Εὐθεῖα Π‴Δ‴· ἀχρησήσυσι δὲ οἱ λοιποὶ καταφατικοὶ ὅροι ἐς γ' ἐπὶ τὸ σημεῖον Α, ἀφ' ὃ ἄρξονται οἱ ἀχρησῦντες μὲν, ἀποφάσκοντες δὲ μέχρι τῦ σημείου Σ, ἔνθεν δὴ οἱ ἐν χρήσει ἀποφατικοὶ, ὧν πρῶτος μὲν ἐςιν ἡ Εὐθεῖα ΣΒ, ἐφεξῆς δὲ αἱ ΠΔ, ΠΔ ἐπ' ἄπειρον. Ἔςαι ὖν ἡ ἔκθεσις ταύτης τῆς προόδυ τοιάδε τις $\div$ ΔΠ ..... Δ‴Π‴ ..... ο ..... —ΣΒ, —ΠΔ, κτ. ἀλλ' ἐπείπερ (§. 29.) $\Sigma\sigma = \beta H = \delta\Delta$, ϗ $\Sigma B = \sigma\beta$, ἄρα $(\Delta'''\Pi''' - \Sigma B) = (\Delta'''\Pi''' - \sigma\beta) = \beta H = \delta\Delta$. Τοιγαρῦν ὁ πρὸ τῦ ὅρυ Δ‴Π‴, ϗ ὁ μετὰ τὸν ὅρον —ΣΒ, ὅ ἐςιν ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων τῶν ἰσοδιεςώτων ἀπότε τῆς Δ‴Π‴, ϗ ἀπὸ τῆς - - ΣΒ (ἥτις ἐςὶν ἴση τῷ ἀθροίσματι Δ‴Π‴—ΣΒ) ἐξισῦται τῷ Ἄξονι $\Sigma\sigma = \delta\Delta$. Ἀεὶ ἄρα ἐν τῇ Ὑπερβολῇ αἱ ἀπὸ τῶν κορυφῶν Σ, σ ἰσοδιεςῶσαι, εἴπερ ὖν ΔΠ—ΔΠ· ἐξισῦνται τῷ πρώτῳ Ἄξονι. Σχ. 9.

§. 31.

Ε΄. Ἐὰν ἡ αθ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΑΘ, ϗ ἐπὶ τοῦ Ἄξονος Σσ προαχθέντος, εἰ δέοι, ληφθῇ σημεῖόν τι οὕτως, ὥστε εἶναι $σζ = ΣΖ$, ὥσπερ διὰ τῆς Ἑστίας Ζ, ϗ τῆς Διευθετούσης ΑΘ, οὕτω ϗ δι' Ἑστίας μὲν τῆς ζ, Διευθετούσης δὲ τῆς αθ, καταγραφήσονται ἥτε Ἔλλειψις ϗ ἡ Ὑπερβολή. Κατὰ μὲν γὰρ τὴν Ἔλλειψιν ὅπως ἂν τὰ σημεῖα Μ, Μ διὰ τῆς Ἑστίας Ζ εὑρεθείη, τῶν διαστημάτων ΠΔ, ΠΔ ληφθέντων, ϗ ἐκ τοῦ Ζ ἐπ' αὐταῖς ταύταις ταῖς ΠΔ, ΠΔ τεθέντων, προσδιωρίσθησαν (§. 21.) τὰ σημεῖα Μ, Μ, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τῶν τῇ Σ πλησιεστέρων ΠΔ, μέχρι τῶν θατέρᾳ κορυφῇ σ προσπελαζόντων. Τῶν δ' αὐτῶν διαστημάτων ΠΔ μετενεχθέντων ἐπὶ θάτερα τῶν τοῦ Ἄξονος μερῶν, τὰ σημεῖα μ, μ ἐξευρέθησαν.

Εὑρεθήσεται δὲ ὡσαύτως τὰ αὐτὰ σημεῖα Μ, Μ καὶ διὰ Διευθετούσης μὲν τῆς αθ, Κορυφῆς δὲ τῆς σ, Ἑστίας δὲ τῆς ζ· ἀμέλει τοι τὰ διαστήματα Πδ ἐκ τῆς Ἑστίας ζ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Πδ μεταφερόμενα προσδιορίσουσι τὰ σημεῖα μ, μ· τῇ δὲ τούτων αὐτῶν ἐπὶ θάτερα τοῦ Ἄξονος μεταθέσει προσδιορισθήσεται τὰ Μ, Μ.

Ἀλλὰ δὴ ϗ ἄλλως προσδιορισθήσεται τὰ αὐτὰ σημεῖα Μ ἐκ τῆς Ἑςίας ζ ὕτω. Σεσημειώσθωσαν δύω τινες ΠΔ ἐπίσης ἑκάτεραι ἀφεςηκεῖαι τῶν Κορυφῶν, ἡ μὲν τῆς Σ, ἡ δὲ τῆς σ. Ἡ μὲν ὖν ἀπὸ τῆς Σ τὸν τρίτον, φέρε, κατέχουσα χῶρον, προσδιορίζεται ἐκ τῆς Ζ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον Μ, ἡ δ' αὐτῆς προαγωγὴ Πδ προσδιορίσαιτ' ἂν ἐκ τῆς ζ τὸ οἰκεῖον ἑαυτῆς μ· ἀλλὰ ταύτῃ τῇ Πδ ἴση ἐςιν ἡ ΠΔ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς σ τὸν τρίτον κατέχουσα χῶρον· ὕτω γὰρ ΠΔ + ΠΔ = δΔ = Σσ (§. 28.) ἡ ἄρα ἀπὸ τῆς Κορυφῆς σ τὸν τρίτον χῶρον κατέχυσα ΠΔ = τῇ ἀπὸ τῆς Κορυφῆς Σ τὸν τρίτον χῶρον κατεχύσῃ Πδ = ζμ = ζΜ. Διὰ ταῦτά τοι ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ταὐτόν ἐςι ΔΠ + Πδ, ἢ ΔΠ σὺν τῇ ἀπὸ τῆς ἑτέρας Κορυφῆς ἰσοδιεςώσῃ ΔΠ τῇ κατὰ ταὐτὰ τῦ Ἄξονος κειμένῃ.

Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν (σχ. 9.) τοῖς μὲν ἔνερθεν τῆς Κορυφῆς Σ διαςήμασι ΠΔ προσδιορίζεται τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν διαςημάτων σημεῖα Μ, ποιῦσιν ἑκάςῃ ΠΔ ἴσην ἑκάςην ΖΜ (§. 21.)· τοῖς δ' ὕπερθεν τῆς Κορυφῆς σ διαςήμασι ΠΔ, ἐκ τῆς αὐτῆς Ζ, εὑρίσκεται τὰ ἐπ' αὐτοῖς σημεῖα m, τιθεῖσιν ἑκάςῃ ΠΔ ἴσην ἑκάςην Zm· ἐπ' ἄπειρον ἄρα ἐκ τῆς Ἑςίας Ζ προσδιορισθήσεται τά τε σημεῖα Μ, καὶ δὴ καὶ τὰ m τὰ ἐπὶ θάτερα κείμενα.