ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 159.

Ταυτὶ πάντα λίαν εἰσὶ σαφῆ. εἴγε τὰ τοιάδε κυκλικὰ ἐμβαδὰ τὸ ἄθροισμα εἰσὶ τῶν ἐν αὐτοῖς Τεταγμένων, ὧν ἑκάςη (§. 93.) πρὸς ἑκάςην συςοιχᾶσαν τῶν ἐν τῇ Ε'λλείψει (ὧν τὸ ἄθροισμα ἐμφαίνει ὡσαύτως τὰ ἐλλειπτικὰ ἐμβαδὰ) λόγον ἔχει, ὃν ὁ μείζων Α'ξων πρὸς τὸν ἐλάσσονα.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 160.

Ε'ὰν ἀπό τινος σημείȣ Α ληφθέντος ἐπὶ τȣ͂ Α'ξονος τῆς ἤτοι ἐγγεγραμμένης, ἢ περιγεγραμμένης τῷ κύκλῳ Ε'λλείψεως ἐπιζευχθῶσιν ἐπὶ τὰ τῆς κοινῆς Τεταγμένης ΠΝ πέρατα αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΑΝ, τὸ ἐμβαδὸν τȣ͂ κυκλικȣ͂ Τομέως ΣΑΝ πρὸς τὸ τȣ͂ ἐλλειπτικȣ͂ ΣΑΜ λόγον ἔχει, ὃν ὁ Α'ξων, ἐφ' ȣ͂ καταγέγραπται ὁ κύκλος πρὸς τὸν ἕτερον Α'ξονα. Ε'ςι μὲν γὰρ τὸ κυκλικὸν ἐμβαδὸν ΣΠΝ πρὸς τὸ ἐλλειπτικὸν ΣΜΠ ἐν τῷ εἰρημένῳ λόγῳ, ὡς δέδεικται (§. 158.), ἔςι δὲ καὶ τὸ τȣ͂ τριγώνȣ ΠΑΝ ἐμβαδὸν πρὸς τὸ τȣ͂ τριγώνȣ ΠΑΜ τȣ͂ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΠ, ὡς ἡ ΠΝ πρὸς τὴν ΠΜ, ἢ (§. 93.) ὡς ἡ ΓΟ πρὸς τὴν ΓΛ, ὅ ἐςιν, ὡς ὁ Α'ξων ὁ ὢν διάμετρος τȣ̃ κύκλȣ πρὸς τὸν ἕτερον Α'ξονα. Καὶ τὰ ὁλόκληρα ἄρα ἐμβαδὰ ΣΑΝ, ΣΑΜ ἐν τῷ αὐτῷ ὑπάρχȣσι λόγῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.

§. 161.

Τὸ τῆς Ἐλλείψεως ἐμβαδὸν ἴσον ἐςὶ τῷ ἐμβαδῷ κύκλȣ ἔχοντος Διάμετρον μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τῆς Ἐλλείψεως ἀξόνων. Κληθείσης γάρ τοι τῆς τȣ̃ κύκλȣ διαμέτρȣ δ, ἔςαι δδ = αβ (Ἀλγβ. §. 500.) ἀλλὰ τὸ μὲν τȣ̃ κύκλȣ ἐμβαδὸν ἐμφαίνει ἡ (§. 155.) $δδ - \frac{1}{6}δδ - \frac{1}{40}δδ -$ κτλ, τὸ δὲ τῆς Ἐλλείψεως ἡ $αβ - \frac{1}{6}αβ - \frac{1}{40}αβ -$ κτλ. ἴσα ἄρα ἀλλήλοις.

ΠΟΡΙΣΜΑ ς'.

§. 162.

Τὰ δυεῖν Ἐλλείψεων ἐμβαδά εἰσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰς Ἀξόνων Ὀρθογώνια. Ἔςωσαν γὰρ τῆς μὲν Α'ξονες οἱ α, β, τῆς δὲ, οἱ γ, δ. Τῆς μὲν ȣ̃ν τὸ ἐμβαδὸν ἔςαι $αβ - \frac{1}{6}αβ -$

$\frac{1}{40}$ αβ — κτ, τῆς ἑτέρας δὲ, γδ — $\frac{1}{6}$ γδ — $\frac{1}{40}$ γδ — κτ. ὧν ὁ λόγος ἐπιδήλως ὁ αὐτός ἐςι τῷ τῶν γινομένων αβ πρὸς γδ.

ΛΥΣΙΣ ἐπὶ τῆς ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ.

§. 163.

Κληθήτω ὁ πλάγιος Ἡμιάξων ΣΓ $= \beta$, καὶ Σχ. 12.
ΓΛ $= \alpha$, καὶ ἡ Ἀποτετμημένη ΓΗ $= \chi$, καὶ ἡ Τεταγμένη ΜΗ $= y$. Ἔςαι οὖν (§. 94.) $yy = \frac{\alpha\alpha\beta\beta + \beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, εἶτ' οὖν $yy = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} \cdot (\alpha\alpha + \chi\chi)$

ἄρα $y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha\alpha + \chi\chi}$. Τοιγαροῦν ἑκάςη τῶν μεταξὺ ΓΣ, καὶ ΗΜ. Τεταγμένων ἐςὶν $= \beta + \frac{\beta\chi\chi}{2\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^4}{8\alpha^4} + \frac{\beta\chi^6}{16\alpha^6} - \frac{5\beta\chi^8}{128\alpha^8} +$ τλ. Ἐπεὶ δὲ αὕτη ἡ σειρὰ οὐδενὶ τῆς τῶν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως Τεταγμένων εὑρεθείσης διενήνοχεν, ὅτι μὴ μόνῳ τῷ τῶν ἀρτίων ὅρων σημείῳ, ταύτῃ τοι συλλογισμοῦ ἐφόδῳ παραπλησίᾳ εὑρεθήσεται.

Α΄. Τὸ τοῦ ὑπερβολικοῦ ἐμβαδοῦ χωρίον ἐκδηλοῦϑαι διὰ τῆς σειρᾶς $\beta\chi + \frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4} + \frac{\beta\chi^7}{112\alpha^6} - \frac{5\beta\chi^9}{1152\alpha^8} +$ κτλ.

Β΄. Ἐξαιρȣμένȣ τȣ̃ κατὰ τὸ ὀρθογώνιον ΓΣΗΙ $= \beta\chi$ χωρὶς, καταλείπεσθαι τὸ ἐμβαδὸν τȣ̃ ὑπερβολικȣ̃ τριγράμμȣ ΣΙΜ $= \frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4} + \frac{\beta\chi^7}{112\alpha^6} -$ κτλ.

Γ΄. Ἐὰν ἐν τῇ Ἰσοσκελεῖ Ὑπερβολῇ, ἐν ᾗ $\beta = \alpha$, τεθῇ $\alpha = \chi$, ἔσεται $\alpha\alpha + \frac{1}{6}\alpha\alpha - \frac{1}{40}\alpha\alpha + \frac{1}{112}\alpha\alpha -$ κτλ. Οὐκȣ̃ν ἡ μεταξὺ Ἰσοσκελȣ̃ς Ὑπερβολῆς, ϗ ἑτέρας ἀνίσȣς Ἄξονας ἐχȣ́σης ἀναλογία ὡσαύτως ἂν περαιτέρω προαχθείη, ὡς ϗ ἀνωτέρω μεταξὺ Κύκλȣ, ϗ Ἐλλείψεως γέγονεν.

Ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς μεταξὺ τῶν Ἀσυμπτώτων.

§. 164.

Σχ. 14. Κείσθω πρὸς τετραγωνισμὸν τὸ χωρίον ΑΡΜΨ ταῖς δυσὶ Τεταγμέναις ΑΨ, ΡΜ ἐμπεριλαμβανόμενον. Καὶ δὴ γενέσθω ἡ τῶν Ἀποτετμημένων Ἀρχὴ ἀπὸ τȣ̃ Ρ, ϗ ἔσω ΓΥ $= \alpha$, ϗ ΓΡ $= \beta$, ϗ ΡΑ

$=\chi$, ϗ ΑΨ $=y$. Ἔϛιν ȣ̃ν (§. 132.) ΓΑ.ΑΨ $=$ ΓΥ², τȣτέϛι $\beta y + \chi y = \alpha\alpha$· ἄρα $y = \frac{\alpha\alpha}{\beta+\chi} =$

$$\frac{\alpha\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\alpha\chi}{\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha\chi\chi}{\beta^3} - \frac{\alpha\alpha\chi^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\alpha\chi^4}{\beta^5} - \text{κτλ.}$$

(Ἀλγβ. §. 559.). Τὸ ȣ̃ν ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων τῆς σειρᾶς ταύτης τοσάκις ληφθείσης, ὅσοι ὅροι εἰσὶν ἐν τῇ ἀπείρῳ σειρᾷ 1. 2. 3 4. 5. 6. . . . . χ παρέξει τὴν ἄπειρον σειρὰν $\frac{\alpha\alpha\chi}{\beta} - \frac{\alpha\alpha\chi^2}{2\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha\chi^3}{3\beta^3} - \frac{\alpha\alpha\chi^4}{4\beta^4} +$ κτλ ἴσην τῷ ἐμβαδῷ ΑΜΡΨ. Συγκλίνει δὲ τοσȣ́τῳ τάχιον αὕτη ἡ σειρὰ, ὅσῳ ἂν ἡ χ ᾖ ἐλάσσων τῆς β (Ἀλγβ. §. 569.)

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 165.

Ἐὰν τεθῇ $\beta = \alpha$, τȣτέϛιν ἐὰν ἡ τῶν Ἀποτετμημένων Ἀρχὴ διορισθῇ κατὰ τὸ Υ, ἔσεται τὸ χωρίον ΣΥΑΨ $= \alpha\chi - \frac{1}{2}\chi\chi + \frac{1}{3}\frac{\chi^3}{\alpha} - \frac{1}{4}\frac{\chi^4}{\alpha\alpha} + \frac{1}{5}\frac{\chi^5}{\alpha^3} -$ κτλ, ϗ τεθέντος $\alpha = 1$ τραπήσεται ἡ σειρὰ εἰς τὴν $\chi - \frac{1}{2}\chi\chi + \frac{1}{3}\chi^3 - \frac{1}{4}\chi^4 +$ κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄.

§. 166.

Ἔςω ΓΥ $=1$ ϗ αἱ Ἀποτετμημέναι ΓΡ, ΓΑ, Γτ ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ. ϗ ΓΑ $=\zeta$, ϗ Ατ $=\xi$. ἔσεται ἦν $\zeta=\beta+\chi$, ϗ Γτ $=\zeta+\xi$: Οὐκῆν $\beta:\beta+\chi::\zeta:\zeta+\xi$, ϗ ἐκ τῆ ἀκολέθε (§. 446. Ἀλγβ.) $\frac{\chi}{\beta}=\frac{\xi}{\zeta}$. Ἐπίδηλον τοίνυν τὸ ἐμβαδὸν ΡΜΨΑ τὸ ἰσέμενον τῇ σειρᾷ $\frac{\chi}{\beta}-\frac{\chi^2}{2\beta^2}+\frac{\chi^3}{3\beta^3}-\frac{\chi^4}{4\beta^4}+$ κτ. ἐξισῆσθαι ϗ τῷ ἐμβαδῷ ΑΨ κτ, ὅπερ ἐμφαίνει ἡ σειρὰ $\frac{\xi}{\zeta}-\frac{\xi^2}{2\zeta^2}+\frac{\xi^3}{3\zeta^3}-\frac{\xi^4}{4\zeta^4}+$ κτ, εὑρεθεῖσα μεθόδῳ τῇ αὐτῇ, ἧπερ εὕρηται ϗ ἡ ἐν §. 164. Ἴσα ἄρα ἀλλήλοις τὰ ὑπερβολικὰ ἐμβαδὰ, ὧν αἱ βάσεις εἰσὶ διαφοραὶ τῶν ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ ληφθεισῶν Ἀποτετμημένων. Ἐξ ἦ ἄρα ϗ τῆτὶ καταφαίνεται, ὡς ἐὰν αἱ ΓΥ, ΓΡ, ΓΑ, Γτ τοιαίδε Ἀποτετμημέναι ὑπάρχωσιν, οἷαι παριςᾶν σειρὰν γεωμετρικῆς προόδε τῆς $\div\!\div$ κ°. κ¹. κ². κ³., ἐπεὶ τὰ ἐπὶ τῶν βάσεων ΥΡ, ΡΑ, Ατ εἰσὶν ἀλλήλοις ἴσα, τὰ ἐπὶ τῶν βάσεων ΥΡ, ΥΑ, Υτ ἐμβαδὰ λόγον ἔξεσα πρὸς ἄλληλα, ὃν οἱ ἀριθμοὶ 1. 2. 3. Εἰσὶν ἄρα πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ τῶν ποσοτήτων ΓΡ, ΓΑ, Γτ Ἐκθέται, ϗ ἑπομένως (Ἀλγβ. §. 521.) ὡς οἱ Λογάριθμοι τῶν αὐτῶν. Τοιγαρȣ̃ν οἱ Λογάριθμοι διὰ τῶν ὑπερβολικῶν τῶνδε ἐμβαδῶν εὑρεθῆναι ἔχȣσι, ϗ τ᾽ἀνάπαλιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄.

§. 167.

Ἐὰν ζητηθῇ τὸ μεταξὺ τῆς Ἀσυμπτώτȣ ΓΒ, ϗ μέρȣς τῆς ἑτέρας Ἀσυμπτώτȣ ΓΡ, ϗ τῆς Τεταγμένης ΜΡ, ϗ τȣ̃ ἀπείρȣ κλωνὸς ΜΣ ἐμπεριλαμβανόμενον Ἐμβαδὸν, ἐπείπερ $aa = xy$ (§. 132.) εἰ τεθῇ a (τȣτέςι ΓΥ) $= 1$, ἔσεται $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

ἔςι δὲ (Ἀλγβ. §. 575.) τὸ πάντων τῶν x^{-1} ἄθροισμα $= \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^{0}}{0} = \frac{1}{0}$. Ἀλλ᾽ ἐπείπερ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς 1 διὰ τȣ̃ 0 πηλίκον ἐςὶν ἄπειρον· ϗ τὸ χωρίον ἐκεῖνο ἄρα ὡσαύτως ἄπειρον ἔσεται.

ΣΧΟ´ΛΙΟΝ.

§. 186.

Λοιπὸν δὲ ἤδη ἐξετάσαι ὅπως αἱ μέχρι τῦδε θεωρηθεῖσαι Καμπύλαι ἐκ τῆς τῦ Κώνυ τομῆς ἐξίασιν, ὅ ἐςιν, εἴπερ τωόντι εἰσι Κωνικαὶ Τομαί. Ἐπεὶ δ' ἒν ὁ ὀρθὸς Κῶνος τετραχῶς ἂν ἔχοι διχῆ τμηθῆναι, ταύτῃ τοι κ̀ ἡμεῖς ἐν τέσσαρσι θεωρήμασι τοῖς ἑπομένοις τὰς τέσσαρας αὐτῦ Τομὰς, κ̀ τὰς ἀπ' αὐτῶν προκυπτύσας Καμπύλας ἐκθησόμεθά τε κ̀ ἀποδείξομεν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.

§. 169.

Ἐὰν ὁ Κῶνος δἰ ἐπιπέδυ Παραλλήλυ τῇ βάσει αὐτῦ τμηθῇ, καμπύλη ἡ τὸ ἑκατέρυ τῦ Τετμημένυ μέρυς ἐπίπεδον περιέχυσα ἔσεται Κύκλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐ͂ςι γάρ τοι τὸ τὸν Κῶνον τέμνον ἐπίπεδον ἓν τῶν ἐκείνυ ςοιχείων, ἃ πάντα κύκλυς ὑπάρχειν ἐπίδηλον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

§. 170.

Ἐὰν ὁ Κῶνος ἐπιπέδῳ οἱῳδήποτε τῷ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς Κορυφῆς διὰ τȣ̃ Ἄξονος αὐτȣ̃ διήκοντι, ϗ ἐπὶ τῆς Βάσεως αὐτȣ̃ Καθέτῳ ἐπινοȣμένῳ τμηθῇ, τμηθῇ δὲ ϗ ἑτέρῳ Ἐπιπέδῳ τῷ Σπ Παραλλήλῳ μιᾷ τινι τῶν τȣ̃ Κώνȣ πλευρῶν ΑΒ, εἶτ' ȣ̓̃ν συνιςῶντι μετὰ τȣ̃ τῆς Βάσεως ἐπιπέδȣ τὴν ὑπὸ ΣπΓ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τȣ̃ Κώνȣ, ϗ τȣ̃ τῆς Βάσεως Ἄξονος περιεχομένῃ, τηνικαῦτα ἡ ἀπέραντος Καμπύλη μΜΣΜμ (εἰ γὰρ ἐπ' ἄπειρον προήγετο ὁ Κῶνος, ὡσαύτως ἂν ἔτεμνεν αὐτὸν τὸ ἐπίπεδον) ἡ τὴν τομὴν περιέχȣσα ἔσεται Παραβολή. Σχ. 21.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςω ἐπίπεδον τῇ βάσει τȣ̃ Κώνȣ παράλληλον, ȣ̃ ἡ Τομὴ ἔσεται Κύκλος ὁ ΕΔΜ. Ἐπεὶ ȣ̓̃ν οἱ κύκλοι ΕΜΔ, ΒμΓ τέμνονται ὑπὸ τῆς Καμπύλης κατὰ τὰς ΜΜ, μμ, προσέτι δὲ ϗ ὑπὸ τȣ̃ ἐπιπέδȣ ΑΒΓ, κατὰ τὰς ΕΔ, ΒΓ: Δῆλον ἄρα τὰς ΜΜ, μμ ἀλλήλαις εἶναι παραλλήλȣς, ϗ δὴ ϗ τὴν διάμετρον ΕΔ τῇ διαμέτρῳ ΒΓ. Καὶ ἐπείπερ ἐξ ὑποθέσεως τὸ Ἐπίπεδον ΑΒΓ πρὸς ὀρθάς ἐϛι τῷ τέμνοντι Ἐπιπέδῳ, ἔσεται ἄρα ϗ μμ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ, ὡσαύτως ϗ ἡ ΜΜ τῇ ΕΔ. Ἐπεὶ δὲ προσέτι αἱ Διάμετροι ΕΔ, ΒΓ ὑπὸ τȣ̃ τῆς Τομῆς Ἄξονος Σπ διατέμνονται κατὰ τὰ Π, π, ταύτῃ τοι ὁ Ἄξων ἐν τῷ αὐτῷ ὑπάρχει Ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ϗ αἱ Διάμετροι (γεωμετρ. §. 242.), τȣτέϛιν ἐν τῷ Ἐπιπέδῳ ΑΒΓ. Ἐφεϛήκασιν ἄρα αἱ ΜΜ, μμ ὡσαύτως Κάθετοι ϗ τῇ Σπ. Οὐκȣ̃ν αἱ πμ, ΠΜ εἰσι καὶ Τεταγμέναι τῶν τε Κύκλων βμΓ, ΕΜΔ, ϗ τῆς Τομῆς μ Σμ. Ἀλλ' ἐϛι $\pi\mu^2 = \beta\pi . \pi\Gamma$, ϗ $\Pi M^2 = E\Pi . \Pi\Delta$. ἄρα $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: \beta\pi . \pi\Gamma : E\Pi . \Pi\Delta$. Ἀλλ' ἐπείπερ αἱ ΑΒ, Σπ εἰσὶ παράλληλοι, ταύτῃ τοι $E\Pi = \beta\pi$. ἄρα $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: \pi\Gamma : \Pi\Gamma$. Ὄντων δὲ τῶν τριγώνων ΣΠΔ, ΣΠΓ ὁμοίων ἀλλήλοις, ἐϛι $\pi\Gamma : \Pi\Delta :: \Sigma\pi : \Sigma\Pi$. Οὐκȣ̃ν ϗ $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: \Sigma\pi : \Sigma\Pi$. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐπίδηλον, ὅτι ἡ Καμπύλη μ Σμ τοιάνδε φύσιν ἔχει, ὥϛε τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων αὐτῆς τετράγωνα λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ αὐτῶν Ἀποτετμημέναι. Οὐκȣ̃ν (§. 62.) ὑπάρχει Παραβολή.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Γ'.

§. 171.

Ἐὰν ὁ Κῶνος οἱῳδήποτε Ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒΓ διὰ τῆς Κορυφῆς, ϗ τȣ̃ Ἄξονος αὐτȣ̃ διήκοντι, ϗ πρὸς τὴν βάσιν αὐτȣ̃ Καθέτῳ ἐφεςηκότι τμηθῇ, τμηθῇ δὲ ϗ ἑτέρῳ Ἐπιπέδῳ τῷ Σπ, ὅ μητε τῇ βάσει, μήτε τινι τῶν τȣ̃ Κώνȣ πλευρῶν παράλληλον εἴη, εἴη δὲ μᾶλλον προσκεκλιμένον τῷ τῆς βάσεως Ἐπιπέδῳ ΒΓ, ἢ ταῖς τȣ̃ Κώνȣ πλευραῖς, τηνικαῦτα ἑκατέρα μὲν τῶν τȣ̃ Κώνȣ πλευρῶν τμηθήσεται τῷ δε τῷ Ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ τὴν Τομὴν περατȣ̃σα ἄπειρος Καμπύλη, ἡ ϗ πρὸς ἑαυτὴν ἐπανακάμπτȣσα, ἔσεται Ἔλλειψις. Σχ. 22.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθωσαν Ἐπίπεδα δύω τῇ τȣ̃ Κώνȣ βάσει παράλληλα, ἐξ ὧν προκύψȣσι Κύκλοι δύω οἱ ΕμΖ, ΘΜΗ τέμνοντες τὸ τῆς Καμπύλης ἐπίπεδον. Δείξει ȣ̃ν παραπλησίᾳ τῇ ἀνωτέρῳ δείκνυται τὰς μπ, ΜΠ, κοινὰς εἶναι Τεταγμένας ἔντε τῷ κύκλῳ, κἀν τῇ ἐκ τῆς τομῆς Καμπύλῃ, ϗ ἐκ τῆς τῶν κύκλων φύσεως ὑπάρχειν μπ²: ΜΠ²:: Επ.πΖ: ΘΠ.ΠΗ. Ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΣΠΗ, ΣπΖ, σΕπ, σΘΠ εἰσι ὅμοια, ἔσεται προσέτι καὶ πΖ:ΠΗ::Σπ:ΣΠ, καὶ Επ:ΘΠ::σπ:σΠ. Οὐκοῦν (Ἀλγβ. §. 491.) Επ. πΖ:ΘΠ.ΠΗ::σπ.Σπ:σΠ.ΣΠ, καὶ ἑπομένως πμ²: ΠΜ²::σπ.Σπ:σΠ.ΣΠ. Ἔστιν ἄρα ἡ τομὴ σΜΣ φύσεως τοιᾶσδε, ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐν αὐτῇ τετράγωνα λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ ὑπὸ τῶν συστοιχούντων αὐταῖς Ἀποτετμημένων παραγόμενα, τουτέστιν (§. 61,) ὑπάρχει Ἔλλειψις.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 172.

Ταυτὰ δειχθήσεται, κἂν τὸ στερεὸν ΑΒΓ Κύλινδρος ὑπάρχῃ ὀρθός.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄.

§. 173.

Σχ. Ἐὰν ὁ Κῶνος οὕτω τμηθῇ, ὥστε τὸ
23. τέμνον ἐπίπεδον μᾶλλον προσκεκλίσθαι ταῖς τοῦ Κώνου πλευραῖς, ἢ τῇ βάσει αὐτοῦ, τηνικαῦτα ἅπασαι μὲν ἑκατέρωσε αἱ

τȣ̃ Κώνȣ πλευραὶ ἐ τμηθήσονται, ἡ δὲ τὴν τομὴν περιέχȣσα ἀπέραντος Καμπύλη μΜΣ ἔσεται Ὑπερβολή.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐπειδήπερ ἐκ τῆς φύσεως τῶν Κύκλων ΕΜΔ, ΒμΓ ἐςὶ $\pi\mu^2 : \Pi M^2 : B\pi . \pi\Gamma : E\Pi . \Pi\Delta$, ϗ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΔΠΣ, ΓπΣ, πσΒ, ΠσΕ ἐςὶ $\pi\Gamma : \Pi\Delta :: \pi\Sigma : \Pi\Sigma$, ϗ $\pi B : \Pi E :: \pi\sigma : \sigma\Pi$, ϗ συνθέσει τῶν λόγων, $\pi\Gamma . \pi B : \Pi\Delta . \Pi E :: \pi\Sigma . \pi\sigma : \Pi\Sigma . \sigma\pi$. Ἔςαι ἄρα ϗ $\pi\mu^2 : \Pi M^2 :: \pi\Sigma . \pi\sigma : \Pi\Sigma . \sigma\Pi$. ἰδίωμα δὲ τȣ̃το τῆς Ὑπερβολῆς (§. 61.)

ΣΧΌΛΙΟΝ.

§. 174.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς τȣ̃ Κώνȣ κορυφῆς Α ἕτερος Σχ.
Κῶνος ὅμοιος κατασαθῆ, καὶ προαχθῆ τὸ τέμνον 23.
ἐπίπεδον, ϗ τόνδε κατὰ τὸ σ τεμεῖ. Εἰδ᾽ ἀμφότεραι αἱ Τομαὶ θεωρηθῶσιν, αἱ ἀντικείμεναι ληφθήσονται Ὑπερβολαί.

§. 175.

Ἐπίδηλον δὲ δήπȣ, ὡς ἐὰν τὸ τέμνον ἐπί-