Λ Υ΄ Σ Ι Σ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ $M\mu$, μm, ϗ γενέσθω $ZM : Z\mu :: ME : \mu E$, ϗ $Z\mu : Zm :: \mu H : mH$, εἴτ' οὖν, ὃ δὴ ταὐτὸν, εἰλήφθω ἡ $\mu E = \frac{Z\mu \,.\, M\mu,}{Z\mu - ZM}$, καθότι ἐκ τῆς ἀναλογίας $ZM : Z\mu :: ME : \mu E$, ἐστι ϗ $Z\mu : ZM :: \mu E : ME$, ϗ $Z\mu - ZM : Z\mu :: \mu E - ME (= M\mu) : \mu E$. ἄρα $\mu E = \frac{Z\mu \,.\, M\mu}{Z\mu - ZM}$. Οὕτως οὖν εὑρίσκεται ἡ μE, τέταρτος τῆς ἀναλογίας ὅρος, ἐξ ἧς ἀφαιρεθείσης τῆς γνωστῆς $M\mu$, καταλειφθήσεται ἡ ME, τρίτος τῶν κατὰ τὴν ἀναλογίαν ὅρος. Εἰλήφθω δὲ (διὰ πράξεως τῇ ἀνωτέρω παραπλησίας) ϗ $\mu H = \frac{Z\mu \,.\, \mu m}{Zm - Z\mu}$, ϗ διὰ τῶν σημείων E, H οὕτω προσδιορισθέντων ἤχθω τέρματος ἄνευ εὐθεῖα ἡ EH, ἥτις ἔσεται τῆς τομῆς ἡ Διευθετοῦσα. Ἐὰν γὰρ καταχθῶσι πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ αἱ $M\Theta$, $\mu\vartheta$, $m\upsilon$, ὄντων τῶν τριγώνων $\vartheta\mu E$, ΘME ὁμοίων ἀλλήλοις, ἔσεται $M\Theta : \mu\vartheta :: ME : \mu E : ZM : Z\mu$. Ὡσαύτως δὲ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων $\mu H\vartheta$, $mH\upsilon$ ὁμοιότητα) ἐστιν $\mu\vartheta : m\upsilon :: \mu H : mH : Z\mu : Zm$. Αἱ Κάθετοι ἄρα πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχȣσιν, ὃν αἱ Εὐθεῖαι ΜΖ, μΖ, mΖ. Ἡ ἄρα Εὐθεῖα ΕΗ (§. 18.) ἐςιν ἡ Διευθετȣσα τῆς διὰ τῶν σημείων Μ, μ, m διϊȣσης Κωνικῆς Τομῆς, ἧς τὸ εἶδος ἐκ τȣ, ὃν ἔχει ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΘΜ, λόγȣ χαρακτηρίζεται. Ἐὰν ȣν διὰ τȣ Ζ ἀχθῇ Κάθετος ἐπὶ τῆς Διευθετȣσης ἡ ΖΑ ἔςαι κατ' αὐτὴν ἡ Κορυφὴ τῆς Καμπύλης. Ἐὰν δὲ γίνηται ϗ ΜΘ : ΖΜ :: ΑΣ : ΣΖ : Ασ : σΖ, τȣτέςιν ἐὰν ληφθῇ $\Sigma Z = \frac{ZA \, . \, ZM}{ZM + \Theta M}$ (ἐκ γὰρ τῆς ἀναλογίας ΜΘ : ΖΜ :: ΑΣ : ΣΖ, συνθέσει τῶν λόγων γίνεται ΜΘ + ΖΜ : ΖΜ :: ΑΣ + ΣΖ (= ΑΣ) : ΣΖ. Οὐκȣν $\Sigma Z = \frac{ZA \, . \, ZM}{ZM + \Theta M}$) ϗ (πράξει παραπλησίᾳ διὰ διαιρέσεως τῶν λόγων) $Z\sigma = \frac{ZA \, . \, ZM}{\Theta M - ZM}$, εὑρεθήσονται ϗ αἱ τȣ Ἄξονος Κορυφαὶ Σ, σ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 144.

Δοθεισῶν δυεῖν τῆς Ὑπερβολῆς συ- Σχ.
ζυγῶν Διαμέτρων τῶν ΜΟ, ΔΝ, εὑρεῖν 14.
τὰς κατ' αὐτὴν Ἀσυμπτώτȣς.

ΛΥ'ΣΙΣ. Α'.

Διὰ τοῦ πέρατος Μ τῆς πρώτης διαμέτρου ΜΟ ἤχθω ἡ εϑ παράλληλος τῇ συζυγεῖ ΔΝ, ϗ γενέσθω Μϑ = Με = ΓΔ, εἶτ' οὖν ΓΝ. Κείσεται οὖν τὰ σημεῖα ϑ, ε ἐπὶ τῶν Ἀσυμπτώτων.

ΛΥ'ΣΙΣ. Β'.

§. 146.

Ἡ τὰ τῶν Διαμέτρων ἄκρα ἐπὶ ζευγνῦσα ΔΜ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ρ, ϗ διὰ τοῦ Κέντρου ϗ τοῦ Ρ διήχθω Εὐθεῖα ἡ ΓΡ, ἥτις ἔσεται ἡ ἑτέρα τῶν Ἀσυμπτώτων. Ἀτέρα δὲ ἔςαι, εἴτις ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΔΜ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 146.

Τοὐναντίον δὲ, δοθεισῶν δήπου τῶν Ἀσυμπτώτων, ϗ τοῦ κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν σημείου Μ, εὑρεθήσονται αἱ δύω συζυγεῖς Διάμετροι, ἐὰν τέρματος ἄτερ ἡ Εὐθεῖα ΔΜ ἀχθῇ παράλληλος τῇ Ἀσυμπτώτῳ ΓΒ, ϗ γίνεται ΔΡ = ΜΡ. Αἱ γάρ τοι ΜΓ, ΔΓ ἔσονται συζυγεῖς διάμετροι. Καὶ ἄλλως δὲ, τουτέστιν ἐὰν διὰ τοῦ Μ ἀχθῇ ἐπιψαύουσα ἡ εϑ τῇ

Α'συμπτώτῳ συμβάλλουσα, καὶ διὰ τοῦ Γ ἀχθῇ ἡ ΓΔ παράλληλος καὶ ἴση τῇ Με, ἢ Μθ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 147.

Τῆς Κωνικῆς Τομῆς τὴν Α'κτίνα τῆς Καμπυλότητος εὑρεῖν ἐπί τινος δοθέντος σημείου Μ Σχ. 17. 18.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Η'χθωσαν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Μ ἡ Διάμετρος ΜΟ, καὶ ἡ αὐτῇ Συζυγὴς ΔΝ, καὶ οἱ Α'ξονες Σσ, Λλ, καὶ τὸ κατὰ τὴν ΜΟ σημεῖον Κ ὑποτεθείσθω ὑπάρχειν ἐπὶ κύκλου περιφερείας διὰ τριῶν τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς σημείων ἀπειράκις ἔγγιστα κειμένων τῶν Μ, μ, m, διιόντος. Ε'σεται οὖν (γεωμετρ. §. 187.) $mH . H\mu = MH . HK$, ἢ $\mu H^2 = MH . HK$. ἴσαι γάρ τοι ἀλλήλαις αἱ μΗ, mH, ὡς ἀπειράκις ἐλάχισται οὖσαι. Α'λλ' ἔστι (§. 61.) $\mu H^2 : MH . HO :: \Gamma\Delta^2 : \Gamma M^2$ ἄρα $MH . HK : MH . HO :: \Gamma\Delta^2 : \Gamma M^2$. Οὐκοῦν $HK : HO :: \Gamma\Delta^2 : \Gamma M^2$, καὶ ἐπεὶ ΜΗ ἀπειράκις ἐλαχίστη ἐστὶ πρός γε τὴν μΗ, ἐκ τούτου ἄρα $MK : MO\ (= 2\Gamma M) :: \Gamma\Delta^2 : \Gamma M^2$ · ἄρα $MK = \frac{2\Gamma\Delta^2}{\Gamma M}$.

Κείσθω νῦν τὴν διάμετρον τῆ κατὰ τὰ μ, Μ, m συμπίπτοντος τῇ Καμπύλῃ κύκλῳ ὑπάρχειν ΜΑ, ϗ ἤχθω ἡ χορδὴ ΑΚ. ἔςεται δὴ τὸ τρίγωνον ΑΚΜ Ὀρθογώνιον πρὸς τὸ Κ, ϗ ὅμοιον τῷ πρὸς τὸ Ρ Ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΜΓΡ. Ἐπεὶ γάρ τοι ἡ ΜΑ Κάθετος τῷ τόξῳ mμ, ὅέςι, τῇ αὐτῇ Ἐφαπτομένῃ Μχ, ἐκ τῆ ἀκολέθε ἐςὶ κάθετος ϗ τῇ συζυγεῖ διαμέτρῳ ΝΔ. Ἔςιν ἄρα ΜΡ : ΜΓ :: ΜΚ (εἴτ' ἐν $\frac{2\Gamma\Delta^2}{\Gamma M}$) : ΜΑ $=\frac{2\Delta\Gamma^2}{M P}$. Διόπερ $\frac{1}{2}$ ΜΑ $=\frac{\Gamma\Delta^2}{M P}$. Ἀμέλειτοι.

Α΄. „Ἡ Ἀκτὶς τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν Τομὴν „ἔντινι τῶν ἐπ' αὐτῆς δοθέντι σημείῳ Μ καμπυλό- „τητος ἰσῆται τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρε „τῆς συζυγῆς τῇ διὰ τῆ δοθέντος σημείε διέσῃ, „διαιρεθέντι διὰ τῆς ἀπὸ τῆ δοθέντος σημείε ἐπὶ „τὴν συζυγῆ διάμετρον καταχθείσης Καθέτε.

Ἀλλ' ἐπεὶ (§. 123.) ΜΡ $=\frac{\Gamma\Lambda \cdot \Gamma\Sigma}{\Gamma\Delta}$, ταύτῃ

δὴ $\frac{1}{2}$ ΑΜ $=\frac{\Gamma\Delta^3}{\Gamma\Lambda \cdot \Gamma\Sigma}$. Ἀμέλειτοι.

Β΄. „Ἡ Ἀκτὶς τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν Τομὴν „ἔντινι τῶν ἐπ' αὐτῆς δοθέντι σημείῳ Μ καμπυλό- „τητος ἰσῆται Κύβῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρε τῆς

„συζυγȣ̃ς τῇ διὰ τȣ̃ δοθέντος σημείȣ διϊȣ́σῃ, διαιρε-
„θέντι διὰ τȣ̃ ὑπὸ τῶν Ἡμιαξόνων παραγομένȣ."

§. 148.

Ἐὰν ἔκ τε τῆς Ἑςίας Ζ, ϗ τȣ̃ Κέντρȣ Γ καταχθῶσιν αἱ ΓΙ, ΖΘ Κάθετοι τῇ κατὰ τὸ Μ τῆς τομῆς ἐπιψαυέσῃ, ἀπολαμβάνεται (§. 123.) $\text{ΜΡ}^2 : \text{ΓΣ}^2 :: \text{ΓΛ}^2$ (ἢ $\text{ΜΡ}.\text{ΜΝ}$)$: \text{ΓΔ}^2 = \frac{\text{ΓΣ}^2 . \text{ΜΝ}}{\text{ΜΡ}^2}$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{1}{2}$ $\text{ΜΑ} = \frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΜΡ}}$, ἔσεται ὡσαύτως καὶ

$\frac{1}{2}$ $\text{ΜΑ} = \frac{\text{ΓΣ}^2 . \text{ΜΝ}}{\text{ΜΡ}^3}$. Ἔςι δὲ παρὰ ταῦτα ἡ κατὰ

τὸν Ἄξονα Στ Παράμετρος $\pi = \frac{2\text{ΓΛ}^2}{\text{ΓΣ}}$, ἄρα $\frac{1}{2}\pi =$

$\frac{\text{ΓΛ}^2}{\text{ΓΣ}}$. ἄρα $\frac{1}{2}\pi . \text{ΓΣ} = \text{ΓΛ}^2 = \text{ΜΡ}.\text{ΜΝ}$, ϗ ἐκ τȣ̃

ἀκολȣ́θȣ $\text{ΜΡ} = \frac{\pi . \text{ΓΣ}}{2\,\text{ΜΝ}}$. Οὐκȣ̃ν $\text{ΜΡ}^3 = \frac{\pi\pi . \text{ΓΣ}^2}{4\text{ΜΝ}^2}$.

Τοιγαρȣ̃ν τελȣμένης τῆς ἀντικαταςάσεως προκύπτει $\frac{1}{2}$ $\text{ΜΑ} = \frac{4\text{ΜΝ}^3}{\pi\pi} = \frac{\text{ΜΝ}^3}{\frac{1}{4}\pi\pi}$, ὅ ἐςι

Γ΄. „Ἡ Ἀκτὶς τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν Τομὴν „ἔν τινι τῶν ἐπ' αὐτῆς δοθέντι σημείῳ Μ καμπυλό-

„τητος ἰσοῦται Κύβῳ τῷ ἀπὸ τῆς Καθέτου διαιρεθέν-
„τι διὰ τοῦ τεταρτημορίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς
„κατὰ τὸν πρῶτον Ἄξονα Παραμέτρου."

§. 149.

Ἐπὶ δὲ τῆς Παραβολῆς ὁ τύπος τῆς κατὰ τὴν καμπυλότητα Ἀκτίνος δείκνυται εἶναι $\frac{(4\pi\chi+\pi\pi).\sqrt{4\pi\chi+\pi\pi}}{2\pi\pi}$. ἐστι γὰρ (§. 79.) $NM^2 = \pi\chi + \frac{1}{4}\pi\pi$. Οὐκοῦν $4NM^2 = 4\pi\chi + \pi\pi$, καὶ $4\,NM^3 = (4\pi\chi + \pi\pi).\sqrt{\pi\chi + \frac{1}{4}\pi\pi}$· ἐστι δὲ $\sqrt{\pi\chi + \frac{1}{4}\pi\pi} = \frac{\sqrt{4\pi\chi}}{4} + \frac{\pi\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{4}.4\pi\chi + \frac{1}{4}\pi\pi} = \sqrt{\frac{1}{4}(4\pi\chi + \pi\pi)} = \frac{1}{2}\sqrt{4\pi\chi + \pi\pi}$· ἄρα $4NM^2 = (4\pi\chi + \pi^2).\frac{1}{2}\sqrt{4\pi\chi + \pi\pi}$, καὶ $\frac{4NM^3}{\pi\pi} = \frac{(4\pi\chi + \pi\pi).\sqrt{4\pi\chi + \pi\pi}}{2\pi\pi}$. Ἐν δὲ ταῖς λοιπαῖς τῶν τομῶν ἔτι μᾶλλον σύνθετοι γενήσονται οἱ τύποι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 150.

Σχ. 13. Τὰς Κωνικὰς Τομὰς τετραγωνίζειν.

ΛΥΣΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

Κείσθω πρὸς τετραγωνισμὸν τὸ χωρίον ΣνΜΠ, τῆς τῶν Ἀποτετμημένων ἀρχῆς τιθεμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ. Ἔςιν ȣ̓̃ν (§. 60.) $\Pi M = y = \sqrt{\pi\chi}$. Τεθέντος δὲ $\pi = 1$, ἔσεται $y = \sqrt{\chi}$, τȣτέςιν $y = \chi^{\frac{1}{2}}$. Τοιγαρȣ̃ν ὅπως ἂν ἀποληφθείη τὸ ἄθροισμα τῶν μεταξὺ Σ, ϗ ΠΜ Τεταγμένων, συναπτέον τὴν σειρὰν $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots \chi^{\frac{1}{2}}$. Ἀλλὰ ταύτης τὸ ἄθροισμα (Ἀλγβ. §. 575.) ὑπάρχει $\frac{\chi^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\chi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\chi^3} = \frac{2}{3}\chi\sqrt{\chi}$, εἴτ' ȣ̓̃ν (ἐπεὶ $y = \sqrt{\chi}$) $= \frac{2}{3}\chi y$. Τὸ ἄρα παραβολικὸν χωρίον ΣΜΠ δυσὶν ἰσȣ̃ται τριτημορίοις τȣ̃ ἐκτε τῆς Ἀποτετμημένης ϗ τῆς Τεταγμένης γενομένȣ, εἴτ' ȣ̓̃ν τȣ̃ ἐμβαδȣ̃ τȣ̃ κατὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΣΠΜΛ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 151.

Ἐὰν ἐπιζευχθῇ Εὐθεῖα ἡ ΣΜ, τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΣΜν ἔςαι $= \frac{1}{6}\chi y$. Ἐξισȣ̃ται γὰρ τὸ αὐτȣ̃ ἐμβαδὸν τῷ ΣΠΜν ἀφαιρεθέντι τὸ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνου ΣΠΜ ἐμβαδὸν, ὅ ἐστι ΣΜν $= \frac{2}{3}\chi y - \frac{1}{2}\chi y$ $= \frac{1}{6}\chi y$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 152.

Τὸ τοῦ τμήματος ΣΜν ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ τριγράμμου Μν ΣΛ ἡμιεμβαδῷ· τουτὶ γάρ τοι (τὸ Μν ΣΛ) ἰσοῦται τῷ $\frac{1}{2}\chi y$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 153.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Π τῇ Ἑστίᾳ ἐπιπίπτῃ, ἐστι $\chi = \frac{1}{4}\pi$, καὶ $y = \frac{1}{2}\pi$. Διόπερ τοτηνικαῦτα ἐστι $\frac{2}{3}\chi y = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{12}\pi\pi$, τουτέστι τὸ παραβολικὸν ἐμβαδὸν ἔσεται $\frac{1}{12}$ τοῦ ἀπὸ τῆς Παραμέτρου τετραγώνου.

ΛΥΣΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ.

§. 154.

Ἡ ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως ἐξίσωσις, τῶν Ἀποτετμημένων ἐκ τοῦ Κέντρου ἀρχὴν ποιουμένων, ἐστιν

$$yy = \frac{\alpha\alpha\,\beta\beta - \beta\beta\,\chi\chi}{\alpha\alpha}, \text{ εἴτ' οὖν } yy = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}.\ (\alpha\alpha -$$

χχ). Διὸ $y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha\alpha - \chi\chi}$. Οὐκοῦν Εὐθεῖα πᾶσα τεταγμένως ἀχθῆναι δυναμένη μεταξὺ τῆς ΓΛ, καὶ ΠΜ (§. 15.) ἔσεται (§. 17, καὶ Α'λγβ. §. 560.) $\frac{\beta}{\alpha}.\alpha - \frac{\beta}{\alpha}.\frac{\chi\chi}{2\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}.\frac{\chi^4}{8\alpha^3} - \frac{\beta}{\alpha}.\frac{\chi^6}{16\alpha^4}$ $- \frac{\beta}{\alpha}.\frac{5\chi^8}{128\alpha^7}$ — κτλ., εἴτ' οὖν $\beta - \frac{\beta\chi\chi}{2\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^4}{8\alpha^4}$ $- \frac{\beta\chi^6}{16\alpha^6} - \frac{5\beta\chi^8}{128\alpha^8}$ — κτλ. Τοιγαροῦν ἐὰν ἡ σειρὰ ἥδε τοσάκις συναφθῇ, ὅσαι μεταξὺ Γ, καὶ Π Ἀποτετμημέναι ὑπάρχειν δύνανται ἐπίδηλον δήπου, ὅτι τὸ ἁπασῶν τῶν Τεταγμένων ἄθροισμα ληφθήσεται, ὅ ἐστι τὸ ἐμβαδὸν ΓΛΜΠ. Ἐὰν οὖν ἀντὶ πασῶν τῶν Ἀποτετμημένων τεθῇ ἡ ἄπειρος σειρὰ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... χ, ἐπίδηλον.

Α΄. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς $\beta - \frac{\beta\chi\chi}{2\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^4}{8\alpha^4}$ — κτ. ληφθείσης τοσάκις, ὅσαι αἱ Ἀποτετμημέναι, εὑρίσκεσθαι, εἴγε τεθείη βχχ, εἴτ' οὖν βχ.

Β΄. Τὸ ἄθροισμα ἁπάντων τῶν δευτέρων ὅρων $-\frac{\beta\chi\chi}{2\alpha\alpha} = -\frac{\beta}{2\alpha\alpha}$ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ὅρων τῆς ἀπείρȣ σειρᾶς 1. 2. 3. 4. 5. 6. . . . . . χ, ὅπερ ἐςὶν (Ἀλγεβ. §. 574.) ἴσον $\frac{\chi^3}{3}$. Δῆλον ὂν, τὸ τῶν δευτέρων ὅρων ἄθροισμα εἶναι $-\frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha}$.

Γ΄. Τὸ πάντων τῶν τρίτων ὅρων $-\frac{\beta\chi^4}{8\alpha^4}$ ἄθροισμα ἐξισȣ̃σθαι τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ $-\frac{\beta}{8\alpha^4}$, ϗ τȣ̃ ἀθροίσματος ἁπασῶν τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν ἀπὸ τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς 1. 2. 3. 4. 5. 6. . . . . . χ, ὅπερ ἐςὶν (Ἀλγέβ. §. 575.) $=\frac{\chi^5}{5}$. Τὸ ἄρα τῶν τρίτων ὅρων ἄθροισμά ἐςιν $=\frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4}$. Κατὰ ταὐτὰ δὴ εὑρίσκεται ϗ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν τετάρτων ὅρων $-\frac{\beta\chi^6}{16\alpha^6}$, ἴσον $-\frac{\beta}{16\alpha^6}\cdot\frac{\chi^7}{7}=-\frac{\beta\chi^7}{112\alpha^6}$. Ἔτι δὲ ϗ τὸ ἄθροισμα τῶν πέμπτων ὅρων $=-\frac{5\beta\chi^9}{1152\alpha^8}$, κτλ. Ὥςε τὸ ΓΛΜΠ χωρίον δηλωθήσεται διὰ τῆς ἀπείρȣ σειρᾶς $\beta\chi$ —

$$\frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4} - \frac{\beta\chi^7}{112\alpha^6} - \frac{5\beta\chi^9}{1152\alpha^8} - \frac{7\beta\chi^{11}}{2816\alpha^{10}}$$

$- \frac{21\beta\chi^{13}}{13312\alpha^{12}} -$ κτλ, ἧσπερ ἡ σύναψις· ἐπεὶ μέχρι καὶ νῦν ἐν πεπερασμένοις ὅροις οὐχ εὕρηται, ταύτῃ δὴ ὁ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν τετραγωνισμὸς εἰσέτι ἐκ ἔγνωσται.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 155.

Ἐὰν τεθῇ $\chi = \alpha$, γενομένης τῆς ἀμοιβῆς, ἡ σειρὰ τρέπεται εἰς τὴν $\alpha\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta - \frac{1}{40}\alpha\beta - \frac{1}{112}\alpha\beta -$ κτλ, ἴσην τῷ χωρίῳ ΓΛΜΣ τεταρτημορίῳ τῆς Ἐλλείψεως, καὶ ἣν α, καὶ β ὑποτεθῶσιν ὁλοσχερεῖς Ἄξονες, ἡ αὐτὴ σειρὰ ὅλον τὸ κατὰ τὴν Ἔλλειψιν ἐμβαδὸν ἐπεμφαίνει.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 156.

Ἐὰν τεθῇ $\alpha = \beta$, ἡ μὲν Ἔλλειψις εἰς κύκλον τραπήσεται, ἡ δ' ἀνωτέρω σειρὰ εἰς τὴν $\alpha\alpha - \frac{1}{6}\alpha\alpha - \frac{1}{40}\alpha\alpha - \frac{1}{112}\alpha\alpha -$ κτλ. Διόπερ αὕτη τὸ τοῦ κύκλου τεταρτημόριον παρίστησιν, ἣ καὶ ὅλον τὸν κύκλον ὑποτεθείσης τῆς ὅλης διαμέτρȣ = α.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 157.

Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὅτι τὸ ἐλλειπτικὸν ἐμβαδόν ἐςι πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κύκλȣ καταγραφέντος ἐπὶ τȣ̃ μείζονος Α᾿ξονος, ὡς αβ — $\frac{1}{6}$ αβ — $\frac{1}{40}$ αβ — κτλ. πρὸς αα — $\frac{1}{6}$ αα — $\frac{1}{40}$ αα — κτλ, εἰτ᾿ ȣ̃ν ὡς αβ πρὸς αα, τȣτέςιν ὡς β πρὸς α, ὅ ἐςιν ὡς ὁ ἐλάσσων Α᾿ξων πρὸς τὸν μείζονα. Ἢν δ᾿ ὁ Κύκλος καταγραφῇ ἐπὶ τȣ̃ ἐλάσσονος Α᾿ξονος, ἔςεται τὸ κυκλικὸν ἐμβαδὸν πρὸς τὸ τῆς Ε᾿λλείψεως, ὡς ὁ ἐλάσσων Α᾿ξων πρὸς τὸν μείζονα.

§. 158.

Παραπλησίως ἡ τȣ̃ Κύκλȣ μερὶς ΓΠΝΟ ἐςι πρὸς τὴν τῆς Ε᾿λλείψεως μερίδα ΓΠΜΛ, ὡς ὁ μείζων Α᾿ξων πρὸς τὸν ἐλάσσω, τȣτέςιν ὡς α πρὸς β. Τῆς μὲν γάρ τοι τὸ ἐμβαδὸν ἐμφαίνεται διὰ τῆς σειρᾶς $\alpha\chi - \frac{\alpha\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\alpha\chi^5}{40\alpha^4}$ — κτ. τῆς δὲ, ὑπὸ τῆς $\beta\chi - \frac{\beta\chi^3}{6\alpha\alpha} - \frac{\beta\chi^5}{40\alpha^4}$ — κτλ. Ταὐτὸ δὴ τȣ̃το κρατεῖ ϗ περὶ τῶν Ε᾿μβαδῶν ΠΝΣ, ΠΜΣ.