ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Δʹ.

Περὶ ἰδιωμάτων τῆς Ὑπερβολῆς, ὅσα ἐκ τῆς τῶν κατ' αὐτὴν Ἀσυμπτώτων ἀπονάει θεωρίας.

§. 125.

Σχ. 14. Ἐπὶ προσδιορισμῷ τῶν Ἀσυμπτώτων βΒ, βb, αἱ ΣΒ, Σb ἴσαι ἑκάστη τῷ δευτέρῳ Ἡμιάξονι ΓΛ ἐλήφθησαν. Ἐπεὶ δὲ τὰ διάφορα τῶν Ἀξόνων μήκη, τὰς διαφόρους καταγράφει Ὑπερβολὰς, ταύτητοι τὴν τῶν Ἀσυμπτώτων γωνίαν ὑπὸ bΓΒ ὀξεῖαν εἶναι χρεὼν, ἢ ὀρθὴν, ἢ ἀμβλεῖαν, ἡνίκ' ἂν ὁ πρῶτος Ἡμιάξων ΓΣ μείζων, ἢ ἴσος, ἢ ἐλάσσων ᾖ τοῦ Συζυγοῦς Ἡμιάξονος ΓΛ. Ἐπείτοιγε τὸ ἐκείνης ἥμισυ, ὅ ἐστιν, ἡ ὑπὸ ΣΓΒ γωνία ἐστὶν ἐλάσσων, ἢ ἴση, ἢ μείζων 45°, ὅταν ἡ Εὐθεῖα ΣΒ ἐλάσσων ᾖ, ἢ ἴση, ἢ μείζων τῆς ΓΣ.

§. 126.

Ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῶν Ἀξόνων ἐμβαδὸν ΓΛbΣ Ὀρθογώνιόν ἐστι, καὶ αἱ Διαγώνιοι ΣΛ, Γb ἀλλήλαις ἴσαι, κατὰ τὸ Υ διχοτομούμεναι, ἔσται ἄρα $ΣΥ^2 = \frac{1}{4} ΓΛ^2 + \frac{1}{4} ΓΣ^2 = \frac{1}{4} ββ + \frac{1}{4} αα$.

§. 127.

Ε'ὰν ἡ ὑπὸ τῶν Α'συμπτώτων περιεχομένη γωνία ὀρθὴ ᾖ, ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ἡ Υ'περβολὴ καλεῖται. Πρόδηλον ἂν

Α'. Τὴν τῆς Ι'σοσκελᾶς Υ'περβολῆς Παράμετρον ἴσᾶσθαι ἑκάςῳ τῶν ἀλλήλοις συνισεμένων Α'ξόνων.

Β'. Κατὰ τὴν ἰσοσκελῆ Υ'περβολὴν ἀπὸ μὲν τῆς κορυφῆς λογιζομένων τῶν Α'ποτετμημένων, τὴν ἐπ' αὐτῆς ἐξίσωσιν τὴν τὰς Α'ξονας περιέχεσαν εἶναι $yy = 2\alpha\chi + \chi\chi$, ἀπὸ δὲ τῦ Κέντρε, $yy = -\alpha\alpha + \chi\chi$. Καὶ γὰρ, ἄσης τῆς ὑπὸ bΓΒ Ο'ρθῆς, ἐπεὶ $b\Sigma = \Sigma B$, ἡ ὑπὸ bΓΣ ἔσεται $45°$. Τὸ ἄρα τρίγωνον bΓΣ Ι'σοσκελὲς. Α'ρα $\Gamma\Lambda = \Sigma b = \Sigma\Gamma$, τετέςι $\beta = \alpha$ διόπερ (§. 57.) $2\alpha = 2\beta = \pi$. Ε'πεὶ δὲ ἡ ἐπὶ τῆς Υ'περβολῆς Ε'ξίσωσίς ἐςι (§. 49.) $yy = \frac{2\beta\beta\chi}{\alpha} + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ὅταν ᾖ $\alpha = \beta$, ἔςαι $yy = 2\alpha\chi + \chi\chi$. Ε'πεὶ δὲ πάλιν ἡ, ἀπὸ τῦ Κέντρε τῶν Α'ποτετμημένων λογιζομένων, ἐπὶ τῆς Υ'περβολῆς Ε'ξίσωσίς ἐςι (§. 85.) $yy = -\beta\beta + \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἔςαι, ἀντικαταςάσει τῦ α ἀντὶ β, $yy = -\alpha\alpha + \chi\chi$.

Γ΄. Ἐπειδὴ αἱ ἐπὶ τȣ̃ Κύκλȣ Ἐξισώσεις ὑπάρχȣσιν $yy = 2\alpha\chi - \chi\chi$, ϗ· $yy = \alpha\alpha - \chi^2$, ἡ μὲν, τῶν Ἀποτετμημένων ἀπὸ τῆς Κορυφῆς λογιζομένων, ἡ δ', ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ, αἵτινες μηδενὶ διαφέρȣσι τῶν ἐπὶ τῆς Ἰσοσκελȣ̃ς Ὑπερβολῆς ἀλλ' ἢ τοῖς σημείοις, καθάπερ ϗ οἱ ἐπὶ τῶν ἀνίσȣς Ἄξονας ἐχȣσῶν Ὑπερβολῶν τύποι ȣ̓δενὶ διενηνόχασι τῶν ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως, ὅτι μὴ μόνοις τοῖς σημείοις (§ 50.) ταύτητοι ὅ,τε Κύκλος, ϗ ἡ Ἰσοσκελὴς Ὑπερβολὴ τὰ αὐτὰ πρὸς ἀλλήλȣς διατηρȣ̃σιν, ἅπερ ἤτε Ὑπερβολὴ ἡ ἀνίσȣς Ἄξονας ἔχȣσα, ϗ ἡ Ἔλλειψις.

§. 128.

Αἱ δὲ ῥηθεῖσαι δισσαὶ ἐπὶ τȣ̃ κύκλȣ Ἐξισώ-
Σχ.3. σεις ἐξευρίσκονται ȣ̓τωσί. Ῥηθείσης γὰρ (§. 6.) τῆς κατὰ τὸν κύκλον Διαμέτρȣ $\Sigma\sigma = 2\alpha$, ϗ $\mathrm{M}\Pi = y$, ϗ $\Sigma\Pi = \chi$, ἔςαι $\sigma\Pi = 2\alpha - \chi$· ἀλλὰ $\mathrm{M}\Pi^2 = \Sigma\Pi . \Pi\sigma$· ἄρα $yy = \chi\,(2\alpha - \chi) = 2\alpha\chi - \chi\chi$. Ἐὰν δ' ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ Γ λογισθῶσιν αἱ Ἀποτετμημέναι, ἔςαι $\Gamma\Pi = \chi$, ϗ $\Sigma\Pi = \alpha - \chi$, ϗ $\sigma\Pi = \alpha + \chi$, ϗ $yy = \alpha\alpha - \chi\chi$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄.

§. 129.

Ἐὰν πᾶσα ἐπὶ τοῦ Ἄξονος Τεταγμένη ΠΜ προαχθῇ ἑκατέρωσε ἄχρι τοῦ προσαντῆσαι ταῖς ἀσυμπτώτοις ἐν τοῖς Α, α, ἔςαι ΑΜ . Μα $=$ ΓΛ^2, τουτέςιν ΑΜ : ΓΛ : : ΓΛ : Μα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ τῆς ἐν (§. 25.) ἐξισώσεως τῆς τὴν τοῦ ἀφ' ἑκάςης Τεταγμένης τετραγώνου Ἀξίαν προσδιοριζούσης $yy = \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} - \beta\beta$, ἀπολαμβάνεται $\beta\beta =$

$$\Gamma\Lambda^2 = \frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha} - yy = \left(\frac{\beta\chi}{\alpha} - y\right) . \left(\frac{\beta\chi}{\alpha} + y\right).$$

ἀλλὰ $\frac{\beta\chi}{\alpha}$ τέταρτός ἐςιν ὅρος ἀναλογίας τῶν τριῶν α, β, χ, εἴτ' οὖν τῶν ΓΣ, ΓΛ, ΓΠ· ἡ ἄρα τετάρτη τούτων ἀνάλογος ἐκτεθείσεται $\frac{\beta\chi}{\alpha}$. Ἐπισκεψαμένοις δὲ τὴν τοῦ σχήματος φύσιν ἐπίδηλον, ὅτι τὸ ΛΓΣ Τρίγωνον τὸ τὰς δύω τῶν εὐθειῶν πλευρὰς ἑαυτοῦ ἔχον ὅμοιον ὑπάρχει τῷ ΓbΣ· τὸ δὲ, τῷ

ΓΑΠ· τὰ ἄρα ΛΓΣ, ΓΑΠ ἀλλήλοις ὅμοια· ἄρα ΓΣ : ΓΛ :: ΓΠ : ΑΠ· ἄρα $\text{ΑΠ} = \frac{\beta\chi}{\alpha}$. Οὐκῦν ΑΜ $= \text{ΑΠ} - \text{ΠΜ} = \frac{\beta\chi}{\alpha} - y$, ϗ $\text{Μ}\alpha = \alpha\text{Π} + \text{ΠΜ} = \frac{\beta\chi}{\alpha} + y$· ἄρα $\text{ΑΜ} . \text{Μ}\alpha = \text{ΓΛ}^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 130.

Ὡσαύτως ἐςὶν $\text{ΙΩ} . \text{Ι}\omega = \text{ΓΛ}^2 = \text{ΑΜ} . \text{Μ}\alpha = \alpha\mu . \mu\text{Α} = \iota\omega . \iota\text{Ω}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. ϛ΄.

§. 131.

Ἐὰν ἀπό τινος τῶν ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς σημείϐ Μ ἀχθῇ ἄχρι τῆς ἐγγὺς ἀσυμπτώτϐ ΓΑ ἡ εὐθεῖα ΜΡ παραλλήλως θατέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΓΒ, ἔςαι $\text{ΜΡ} . \text{ΡΓ} = \text{ΓΥ}^2 = \text{ΣΥ}^2$, τϐτέςι ΜΡ : ΣΥ :: ΣΥ : ΡΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθω ἡ ΜΧ παράλληλος τῇ ΑΓ. Οὐκῦν

ΜΧ = ΡΓ. Ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΜΑΡ, ΣbΥ, ΜαΧ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσίν· εἴγε ἕκαςον αὐτῶν ἔχει τὰς δύω τῶν πλευρῶν παραλλήλες ταῖς δυσὶν ὁμολόγοις θατέρυ. Ἄρα ἐκ μὲν τῆς τῶν δύω πρώτων ὁμοιότητος ἔςι ΜΡ : ΣΥ : : ΜΑ : Σb (= ΓΛ)· ἀλλὰ ΜΑ : ΓΛ : : ΓΛ : Μα (§. 129.) ἄρα ΜΡ : ΣΥ : : Σb : Μα. Ἐκ δὲ τῆς τῶν δύω ὑςέρων Σb : Μα : : bΥ : ΜΧ. Διὸ δὴ ΜΡ : ΣΥ : : bΥ : ΜΧ· ἀλλὰ bΥ = ΥΓ = ΥΣ, ϗ ΜΧ = ΡΓ· ἄρα ΜΡ : ΣΥ : : ΣΥ : ΡΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 132.

Πᾶσα Εὐθεῖα (ἡ ΜΡ, φέρε) ἀφ' οἱυδήποτε σημείυ τῆς Ὑπερβολῆς ἐπὶ τῆς ΓΑ Ἀσυμπτώτυ παραλλήλως θατέρᾳ Ἀσυμπτώτῳ ἀγομένη, θεωρηθῆναι ἂν ἔχοι οἷα δὴ ϗ Τεταγμένη, ἧςπερ Ἀποτετμημένη μέρος ἂν εἴη τι τῶν τῆς Ἀσυμπτώτυ ΓΑ. Ἐπείτοι γὰρ ἡ Ἀσύμπτωτος ΓΒ ἐπιψαύυσά ἐςιν (ἐν ἀπείρῳ διαςήματι) τῆς Ὑπερβολῆς, ταύτῃ δὴ ἡ αὐτῆς θέσις δύναιτ' ἂν προσδιορίσασθαι τὴν τῶν Τεταγμένων κλίσιν (§. 11.) Ἐπινοηθήτω ὖν ὡς Ἀρχὴ τῶν Ἀποτετμημένων τὸ Γ. Οὐκῦν ἡ ΓΡ Ἀποτετμημένη ἐςὶν ὑπὸ τῆς Τεταγμένης ΜΡ. Ἐὰν ἂν τεθῇ ΓΡ $=\chi$, ϗ ΜΡ $=y$, ϗ ΓΥ, ἢ ΣΥ $=\delta$, ἔσεται (§. 131.) $\chi y=\delta\delta$, ἢ $\chi y=\frac{1}{4}\alpha\alpha+\frac{1}{4}\beta\beta$ (§. 126.) Αὕτη δὴ ἡ Ἐξίσωσις ἐμφαίνει τὸν τῆς ἀπομειώσεως τῶν ἐπὶ τῆς Ἀσυμπτώτȣ νόμον, ἐφ' ᾧ τὰ κατὰ τὴν Καμπύλην σημεῖα προσδιορισθῆναι. Εἰκότως ἄρα κληθήσεται: *Ἐξίσωσις ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς, ὡς ἐκ τῶν Ἀσυμπτώτων.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 133.

Ἐὰν προαχθῇ ἡ ΜΡ ἄχρι τῆς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένης Ὑπερβολῆς ΔΛδ, ἔςαι ΔΡ $=$ ΜΡ. Ἔςι γὰρ (§. 131.) ΔΡ . ΓΡ $=$ ΓΥ^2 $=$ ΜΡ . ΓΡ. Ἀλλαμὴν ὀρθογώνια ἴσα τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντα, ἔχȣσι πάντως ἴσας καὶ τὰς βάσεις· ἄρα ΔΡ $=$ ΡΜ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'.

§. 134.

Σχ. 19. Ἐὰν Εὐθεῖα ἡ ΖΕ ἀχθῇ διὰ τῆς Ὑπερβολῆς, τὰ ΕΘ, ΖΙ μέρη τὰ μεταξὺ τῶν Ἀσυμπτώτων ϗ τῆς Καμπύλης, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

ΔΕΙ̃ΞΙΣ.

Διὰ τῶν σημείων Θ, Ι ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῷ Ἄξονι αἱ ΔΤ, ΒΞ. Ἔςαι ȣ̃ν (§. 130.) ΔΡ.ΡΤ, ἢ ΘΤ.ΘΔ = ΒΙ.ΙΞ. Οὐκȣ̃ν ΙΞ : ΘΤ :: ΘΔ : ΒΙ. Ἐπεὶ δὲ αἱ ΔΤ, ΒΞ παράλληλοί εἰσι, ταύτῃ τοι τὰ τρίγωνα ΘΤΕ, ΕΙΞ εἰσὶν ἀλλήλοις ὅμοια, καθάπερ ϗ τὰ ΖΒΙ, ΖΘΔ. Τοιγαρȣ̃ν ἐκ μὲν τῶν ὑςέρων ἐςὶ ΘΔ : ΒΙ :: ΘΖ : ΙΖ· ἐκ δὲ τῶν προτέρων ΙΞ : ΤΘ :: ΙΕ : ΘΕ. Ἀντικαταςάντων ἄρα τῶν ἴσων λόγων ἐν τῇ προτέρᾳ ἀναλογίᾳ ἔςαι ΙΕ : ΘΕ :: ΘΖ : ΙΖ. Οὐκȣ̃ν ΙΕ — ΘΕ : ΘΕ :: ΘΖ — ΙΖ : ΙΖ, ὅ ἐςιν, ΙΘ : ΘΕ :: ΙΘ : ΙΖ. Ἀλλὰ ΙΘ = ΙΘ, ἄρα ΘΕ = ΙΖ.

ΠΌΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 135.

Ἐντεῦθεν ἄρα συνάγεται μέθοδος τȣ̃ καταγράφειν Ὑπερβολὴν ἐντὸς δυεῖν δοθεισῶν Ἀσυμπτώτων, διὰ σημείȣ τινος δοθέντος τȣ̃ Ι διήξȣσαν. Ἐὰν γὰρ δι' αὐτȣ̃ τȣ̃ σημείȣ Ι ἀχθῶσιν οἱαιδήποτε Εὐθεῖαι ἔςγε τὰς Ἀσυμπτώτȣς ἐφήκȣσαι αἱ ΑΠ, ΒΞ, ΖΕ, κτ. ϗ ληφθῶσι ΠΗ = ΑΙ, ΞΚ = ΒΙ, ΘΕ = ΖΙ, κτ. τὰ Η, Κ, Θ σημεῖα τῆς Ὑπερβολῆς ἔσονται. Ἐὰν δ' αὖ ἀντὶ τȣ̃ δοθέντος Ι ληφθῇ ἕν τι ἄλλο τῶν εὑρεθέντων, δι' αὐτȣ̃ ἕτερα σημεῖα τῇ αὐτῇ μεθόδῳ εὑρεθῆναι δύνανται, ϗ ȣ̃τως ἅπαντα τὰ κατὰ τὴν Ὑπερβολὴν σημεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 136.

Ἐὰν ληφθῇ σημεῖόν τι Ι ἤτοι ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς Ὑπερβολῆς τινος ἤδη καταγραφείσης τῆς ΡΣΗ, ἧς Ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔ, ΓΠ, καταγραφῆναι δύναται διὰ τῆς τȣ̃ ἀνωτέρω πορίσματος μεθόδȣ Ὑπερβολὴ ἑτέρα ἔχȣσα μὲν Ἀσυμπτώτȣς τὰς αὐτὰς τῇ πρώτῃ, διήκȣσα δὲ διὰ τȣ̃ ἤτοι ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς ἐκείνης ληφθέντος σημείȣ Ι. Αὗται γȣ̃ν αἱ δύω Ὑπερβολαὶ ȣ̓κ ἂν ἀλλήλαις συνέλθοιεν, εἰμὴ ἐν διαστήματι ἀπείρῳ. Ἑκατέρα γάρτοι, ἐξ ὑποθέσεως, ἀσυμπτώτȣς ἔχει τὰς αὐτάς. Ἀλλὰ (§. 77, 132.) πᾶσα Ὑπερβολὴ ȣ̓δαμῇ ἐπιψαύει τῶν αὐτῆς Ἀσυμπτώτων, εἰμὴ ἐν διαστήματι ἀπείρῳ. Ἑκατέρα ἄρα τȣ́των κοινὴν ἔχει τὴν σύμπτωσιν ταῖς Ἀσυμπτώτοις, εἴτ' ȣ̃ν ἐν τῷ ἀπείρῳ διαστήματι ἀλλήλαις συνέρχονται.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 137.

Πᾶσα Ἐφαπτομένη τῆς Ὑπερβολῆς πρὸς ταῖς Ἀσυμπτώτοις ἑκατέρωσε περατυμένη, οἷον ἡ ζε, ἐν τῷ τῆς ἐπαφῆς σημείῳ τ δίχα τέμνεται. Ἐπείπερ, ἣν ἡ ΖΕ κινυμένη παραλλήλως ἑαυτῇ συνεχῶς τέμνη τὴν Ὑπερβολὴν ἐν ἀπειράκις ἔγγιστα σημείοις, τὰ σημεῖα Θ, Ι συμπεσῦνται τῷ τῆς Ἐπαφῆς σημείῳ τ. Ἄρα, ὡς πρότερον, ἔσεται ΖΙ = ΘΕ, εἴτ' ἦν ζτ = τε.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 138.

Ἡ τῆς Ὑπερβολῆς Ἐφαπτομένη, καὶ ταῖς Ἀσυμπτώτοις συμβάλλυσα εϑ ἰσῦται τῇ ΔΝ διαμέτρῳ τῇ συζυγεῖ τῆς πρὸς τῷ σημείῳ τῆς Ἐπαφῆς Μ περατυμένης ΟΜ, τυτέςι τὸ χωρίον ΔΜϑΓ ὑπάρχει Παραλληλόγραμμον· καὶ δὴ Μϑ = ΔΓ = Με. Ἤχϑω γάρ τοι ἀπὸ τῦ Μ εὐθεῖά τις παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ ΓΒ ἄχρις ἂν προσαντήσῃ τῇ ΓΔ διαμέτρῳ· καὶ δὴ τὸ χωρίον ΜΔΓϑ Παραλληλόγραμμον ἔσεται, τυτέςι τὸ πέρας τῆς ἀπὸ τῦ Μ ἀχθείσης παραλλήλυ (ὅπερ εἰρήσϑω δ) συμπεσεῖται τῷ Δ· εἰμὴ γὰρ, εἴη ἂν ἤτοι ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς τῆς Ὑπερβολῆς· ἀλλ' ἐκεῖ ἡ ΓΔ Συζυγὴς Διάμετρος παράλληλός ἐςι τῇ Μθ, ϗ προαχθεῖσα ἢ ἐλαττωθεῖσα ἕως ἂν τῷ δ σημείῳ συμβάλῃ, παράλληλος αὐτῇ διαμένει, ϗ (ἐκ κατασκευῆς) ἡ Μδ παράλληλος τῇ Γθ, πάντως ἄρα τὸ ΜδΓθ χωρίον ὑπάρχει Παραλληλόγραμμον. Ἀλλὰ γὰρ ϗ τὸ χωρίον ΜΔΓθ Παραλληλόγραμμον εἶναι ἐπάναγκες, καθότι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ μία μόνη παράλληλος τῇ Γθ ἀχθῆναι δύναται, ἡ δὲ ΔΓ παράλληλος δῆ Μθ, ὡς εἴρηται. Ἐπεὶ οὖν Παραλληλόγραμμα δύω κοινὰς ἔχει τὰς τρεῖς Γωνίας, κοινὴν ἕξει ϗ τὴν πρὸς τῷ Δ, εἴτ' οὖν τὸ σημεῖον δ ταυτίζεται τῷ τῆς διαμέτρου ΓΔ πέρατι Δ. Οὐκοῦν ΓΔ = Μθ = Με, ϗ εθ = ΔΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄.

§. 139.

Σχ. 19. Ἐὰν ἀπὸ δυοῖν οἱωνδηποτοῦν τῆς Ὑπερβολῆς σημείων Ι, Ρ ἀχθῶσι παράλληλοι αἱ ΙΑ, ΡΧ, ϗ ΙΕ, ΡΥ, ἀνὰ δυω, ὧν αἱ μὲν πρῶται τῇ ἐγγυτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ συμβάλλοιεν, αἱ δὲ, θατέρᾳ ἔςαι ΙΑ.ΙΕ = ΡΧ.ΡΥ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Ι, Ρ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι αἱ ΒΞ, ΔΤ ἑκατέρωσε ταῖς Ἀσυμπτώτοις συμβάλλουσαι. Ἀποκαθίστανται οὖν ὅμοια ἀλλήλοις τὰ τρίγωνα ΒΙΛ, ΔΡΧ, καθάπερ καὶ τὰ ΙΞΕ, ΤΡΥ. Ἔστιν ἄρα ΙΒ : ΙΛ : : ΔΡ : ΡΧ, καὶ ΙΞ : ΙΕ : : ΡΤ : ΡΥ. οὐκοῦν συνθέσει τῶν λόγων γίνεται ΙΒ . ΙΞ : ΙΛ . ΙΕ : : ΔΡ . ΡΤ : ΡΧ . ΡΥ. ἀλλ' ἐστὶ ΒΙ . ΙΞ = ΔΡ . ΡΤ (§. 130.) ἄρα καὶ ΙΛ . ΙΕ = ΡΧ . ΡΥ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 140.

Ἀχθεισῶν διὰ τῆς Ὑπερβολῆς δυεῖν οἱωνδήποτε Παραλλήλων τῶν ΖΕ, ΨΥ ἕως τε τὰς ἀσυμπτώτους ἑκατέρωσε ἡκουσῶν, πάντως ἔσεται ΖΙ . ΙΕ = ΨΡ . ΡΥ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄

§. 141.

Ἐὰν δὲ ἡ ἑτέρα τῶν Παραλλήλων ἐφάπτηται τῆς Ὑπερβολῆς κατὰ τὸ τ, ἔσεται $\zeta\tau^2$ = ΖΙ . ΙΕ. = ΨΡ . ΡΥ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ. Ε'.

Προβλήματα τινὰ ἐπὶ τῶν Κωνικῶν Τομῶν.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ Α'.

§. 142.

Μέρες τῆς Κωνικῆς Τομῆς δοθέντος, ἐν ᾧ ὑπάρχει καὶ ἡ Κορυφὴ, τὸ εἶδος, ϗ τὴν θέσιν αὐτῦ προσδιορίσαι.

ΛΥ'ΣΙΣ.

Ἤχθωσαν δισσαὶ ὁποιαιδήποτε Παράλληλοι, ἐφικνέμεναι ἑκατέρωσε τῦ δοθέντος τῆς τομῆς μέρες, ϗ δίχα τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν, ϗ ἤχθω διὰ τῦ τῆς διχοτομίας σημείε εὐθεῖα, ἥτις ἔςαι μία τῶν Διαμέτρων. Ὡ'σαύτως δ' εἶτα ἤχθωσαν ἕτεραι Παράλληλοι δύω ταῖς πρώταις πλάγιαι, ϗ διὰ τῶν τῆς διχοτομίας σημείων ἀχθήσεται ἡ ἑτέρα Διάμετρος. Ε'ὰν ἦν αὕτη παράλληλος ᾖ τῇ πρώτῃ Διαμέτρῳ, ἡ τομὴ ἔςαι Παραβολή. Ε'ὰν δὲ τέμνῃ αὐτὴν ἐκτὸς τῆς Καμπύλης, εἴτ' ἦν πρὸς τὸ τῆς κυρτότητος μέρος, ἡ τομὴ ἔςαι Ὑ'περβολή. Ε'ὰν δὲ τέως αἱ Διάμετροι προσαντῶνται ἀλλήλαις ἐντὸς τῆς Καμπύλης, τȣτέςι πρὸς τὸ τῆς κοιλότητος μέρος, ἡ τομὴ ἔςαι Ἔλλειψις, ϗ τὸ τῆς διατομῆς τῶν διαμέτρων σημεῖον ἀείποτε τὸ Κέντρον ὑπάρχει. Τοιγαρȣ͂ν, εἴπερ διὰ τȣ͂ Κέντρȣ ὅτως εὑρεθέντος καταγραφῇ Κύκλος τῷ δοθέντι τῆς τομῆς μέρει ἐν δυσὶ σημείοις συμπίπτων, Εὐθεῖα, ἥτις ἂν ἐκ τȣ͂ Κέντρȣ ἀχθείη διὰ σημείȣ τȣ͂ μεσαιτάτȣ τῶν, καθ᾽ ἃ συμβάλλει τῇ Κωνικῇ τομῇ ὁ Κύκλος, ἔσεται Ἄξων. Ἀλλ᾽ ἐὰν ἡ τομὴ Παραβολὴ ᾖ, ἤχθω Κάθετος μιᾷ τινι αὐτῆς διαμέτρῳ ἑκατέρωσε συμβάλλȣσα τῇ Καμπύλῃ. Ταύτης ȣ͂ν διχοτομηθείσης ἡ τῷ τῆς διχοτομίας σημείῳ πρὸς ὀρθὰς ςαθεῖσα ἔσεται τῆς Παραβολῆς ὁ Ἄξων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 136.

Διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Μ, μ, m, καὶ περὶ τὴν δοθεῖσαν Ἑςίαν ὄντων, εἴτ᾽ ȣ͂ν μὴ ἐπ᾽ εὐθείας τῇ Ἑςίᾳ Ζ κειμένων, τὴν Κωνικὴν Τομὴν καταγράψαι, καὶ τό,τε εἶδος αὐτῆς, καὶ τȣ̀ς Ἄξονας προσδιορίσαι. Σχ. 20.