$\beta\beta::\chi\chi:\mathrm{N}\Xi^2=\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. ἔςι δὲ $\Gamma\mathrm{M}^2=\Gamma\Pi^2+$ $\Pi\mathrm{M}^2=\chi\chi-\beta\beta+\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$ (§. 85.) ϗ $\Gamma\mathrm{N}^2=$ $\Gamma\Xi^2+\mathrm{N}\Xi^2=-\alpha\alpha+\chi\chi+\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$. ἄρα $\Gamma\mathrm{N}^2$ $-\Gamma\mathrm{M}^2=-\alpha\alpha+\chi\chi+\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}-\chi\chi+\beta\beta-\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}=\beta\beta-\alpha\alpha$, εἰτ' ἂν „ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ „δυεῖν ὡντινωνῦν συζυγῶν Διαμέτρων τετραγώνων „ἐπὶ τῆς Ὑπερβολῆς ἐςι ποσὸν εὐςαθὲς τῇ τῶν ἀπὸ „τῶν ἀξόνων τετραγώνων διαφορᾷ ἰσȣ̃μενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄.

§. 120.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐντὸς τῆς Τομῆς τεταγμένως ἐφ' ἧςτινοσȣ̃ν Διαμέτρȣ ΜΟ, ἀγομένης ΙΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν συςοιχȣσῶν Ἀποτετμημένων ΜΗ, ΗΟ γινομενον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς Συζυγȣ̃ς Ἡμιδιαμέτρȣ τετράγωνον

$ΓΝ^2$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας Ἡμιδιαμέτρȣ, ἐφ' ἧς ἡ ΙΗ τέτακται, τετράγωνον $ΓΜ^2$, ὅ ἐςι $ΗΙ^2 : ΜΗ . ΗΟ :: ΓΝ^2 : ΓΜ^2$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤχθω τεταγμένως ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος Σσ ἡ ΙΘ, ϗ ἀπὸ τȣ̃ Η ἐςάθωσαν Κάθετοι αἱ ΗΡ, ΗΚ, ϗ εἰρήσθωσαν ἡ μὲν $ΚΘ = ΗΡ = ρ$, ἡ δὲ $ΓΚ = τ$, ἡ δὲ $ΓΜ = δ$. Ἐν ȣ̃ν τῇ Ἐλλείψει ἔςαι $ΓΘ = ρ - τ$: ȣ̓κȣ̃ν $σΘ = α - ρ + τ$, ϗ $ΣΘ = α + ρ - τ$, ϗ $σΘ . ΘΣ = αα - ρρ + 2ρτ - ττ$. Παρὰ δὲ ταῦτα, ἐκ τῆς τῶν τριγώνων ΓΠΜ, ΓΗΚ ὁμοιότητος, δυὰς πηγάζει ἀναλογιῶν, ὧν ἡ μὲν ἐςι $ΓΠ : ΓΜ :: ΓΚ : ΓΗ$, εἶτ' ȣ̃ν $χ : δ :: τ : ΓΗ = \frac{δτ}{χ}$. ἀλλὰ $ΜΗ = ΓΜ - ΓΗ$. Ἄρα $ΜΗ = δ - \frac{δτ}{χ}$, ϗ $ΗΟ = δ + \frac{δτ}{χ}$, ϗ $ΜΗ . ΗΟ = δδ - \frac{δδττ}{χχ}$. Ἡ δ' ἑτέρα ἀναλογία ἐςι $ΓΠ : ΠΜ :: ΓΚ : ΚΗ$ (ἢ ΘΡ) τȣτέςι $χ : y :: τ : ΘΡ = \frac{yτ}{χ}$. Ἐπὶ δὲ τȣ́τοις ϗ τῶν τριγώνων ΤΠΜ, ΗΙΡ ὁμοίων ἀλλήλοις ὄντων, ἔςι $ΤΠ : ΠΜ$:

$:HP:PI$, εἶτ' ἦν (§. 98.) $\frac{\alpha\alpha - \chi\chi}{\chi} : y :: \varrho : PI =$
$\frac{y\varrho\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$. Οὐκῦν $I\Theta^2 = IP + P\Theta^2 = \frac{\varrho^2 \chi^2 y^2}{(\alpha\alpha - \chi\chi)^2}$
$+ \frac{2\varrho\tau yy}{\alpha\alpha - \chi\chi} + \frac{\tau\tau yy}{\chi\chi}$. Ἔςι δὲ παρὰ ταῦτα (§. 61.)
$\sigma\Pi . \Pi\Sigma : \sigma\Theta . \Theta\Sigma :: \Pi M^2 : \Theta I^2$, τυτέςιν $\alpha\alpha -$
$\chi\chi : \alpha\alpha - \varrho\varrho + 2\varrho\tau - \tau\tau :: yy : \Theta I^2 =$
$\frac{\alpha\alpha yy - \varrho^2 y^2 + 2\varrho\tau yy - \tau^2 y^2}{\alpha\alpha - \chi\chi}$. Τοιγαρῦν παρα-
βληθεισῶν τῶν δυεῖν τῦ ΘI^2 Ἀξιῶν, προκύψει Ἐ-
ξίσωσις ἡ $\frac{\alpha^2 y^2 - \varrho^2 y^2 + 2\varrho\tau y^2 - \tau^2 y^2}{\alpha\alpha - \chi\chi} =$
$\frac{\varrho\varrho\chi\chi yy}{(\alpha\alpha - \chi\chi)^2} + \frac{2\varrho\tau yy}{\alpha\alpha - \chi\chi} + \frac{\tau\tau yy}{\chi\chi}$· ϗ μεταθέσει
$\frac{\alpha\alpha yy - \varrho\varrho yy - \tau\tau yy}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{\varrho\varrho \chi\chi yy}{(\alpha\alpha - \chi\chi)^2} + \frac{\tau\tau yy}{\chi\chi}$,
ϗ $\frac{\alpha\alpha - \varrho\varrho - \tau\tau}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{\varrho\varrho\chi\chi}{(\alpha\alpha - \chi\chi)^2} + \frac{\tau\tau}{\chi\chi}$; καὶ ἔτι
$\frac{(\alpha\alpha - \chi\chi)\,\alpha\alpha - \varrho\varrho - \tau\tau}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{(\alpha\alpha - \chi\chi)\varrho\varrho\chi\chi}{(\alpha\alpha - \chi\chi).(\alpha\alpha - \chi\chi)}$
$+ \frac{(\alpha\alpha - \chi\chi)\tau\tau}{\chi\chi}$. Ἐξ ὗ δὴ ϗ $\alpha\alpha - \varrho\varrho - \tau\tau =$

$\frac{\rho\rho\chi\chi}{\alpha\alpha-\chi\chi}+\frac{\alpha\alpha\tau\tau-\tau\tau\chi\chi}{\chi\chi}$, ϗ $\alpha\alpha-\rho\rho=\frac{\rho\rho\chi\chi}{\alpha\alpha-\chi^2}$ $+\frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}$, ϗ $(\alpha\alpha-\chi\chi)(\alpha\alpha-\rho\rho)=\rho\rho\chi\chi+$ $\frac{(\alpha\alpha-\chi\chi)\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}$, ὅ ἐςιν $\alpha^4-\alpha^2\rho^2-\alpha\alpha\chi\chi+$ $\rho\rho\chi\chi=\rho\rho\chi\chi+\frac{\alpha^4\tau\tau}{\chi\chi}-\alpha\alpha\tau\tau$, ϗ $\alpha^4-\alpha\alpha\rho\rho-$ $\alpha\alpha\chi\chi=\frac{\alpha^4\tau\tau}{\chi\chi}-\alpha\alpha\tau\tau$, ϗ $\alpha\alpha-\rho\rho-\chi\chi=$ $\frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}-\tau\tau$, ϗ τέως $\rho\rho=\alpha\alpha-\chi\chi-\frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}+$ $\tau\tau=\text{ΗΡ}^2$. Τέτε τεθέντος, ἐπειδὴ $\delta\delta\,(\alpha\alpha-\chi\chi$ $+\tau\tau-\frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi})=(\alpha\alpha-\chi\chi)\,(\delta\delta-\frac{\delta\delta\tau^2}{\chi\chi})$, ὡς ἐκ τῆς τε πολλαπλασιασμε ἐκτελέσεως ἐπίδηλον, ἐκ τέτε ἄρα ἔςαι $\delta\delta-\frac{\delta\delta\tau\tau}{\chi\chi}:\delta\delta::\alpha\alpha-\chi\chi+$ $\tau\tau-\frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}:\alpha\alpha-\chi\chi$, ὅπερ ἐςιν (ἐν γραμμαῖς) $\text{ΜΗ}.\text{ΗΟ}:\text{ΓΜ}^2::\text{ΗΡ}^2:\text{ΓΞ}^2$ §. 116.), ϗ ἔτι τῶν τριγώνων ΗΙΡ, ΓΝΞ ὁμοίων ἀλλήλοις ὄντων ἐςὶ $\text{ΗΡ}^2:\text{ΓΞ}^2::\text{ΙΗ}^2:\text{ΓΝ}^2$. Οὐκεν $\text{ΜΗ}.\text{ΗΟ}:\text{ΓΜ}^2::$ $\text{ΙΗ}^2:\text{ΓΝ}^2$, ϗ $\text{ΙΗ}^2:\text{ΜΗ}.\text{ΗΟ}::\text{ΓΝ}^2:\text{ΓΜ}^2$

Κατὰ δὲ τὴν Ὑπερβολὴν τῶν αὐτῶν τηρουμένων ὀνομάτων, ἔσαι $\Gamma\Theta = \rho + \tau$. Οὐκοῦν $\sigma\Theta = \alpha + \rho + \tau$, καὶ $\Sigma\Theta = -\alpha + \rho + \tau$, καὶ $\sigma\Theta . \Theta\Sigma = -\alpha\alpha + \rho\rho + 2\rho\tau + \tau\tau$. Τῶν δὲ τριγώνων ΓΠΜ, ΓΗΚ ὁμοίων ἀλλήλοις ὄντων, ἔσι πρῶτον $\Gamma\Pi : \Gamma M :: \Gamma K : \Gamma H$, εἶτ' οὖν $\chi : \delta :: \tau : \Gamma H = \frac{\delta\tau}{\chi}$. Ἀλλὰ $MH = \Gamma H - \Gamma M = \frac{\delta\tau}{\chi} - \delta$, καὶ $HO = \frac{\delta\tau}{\chi} + \delta$. Οὐκοῦν $MH . HO = \frac{\delta\delta\ \tau\tau}{\chi\chi} - \delta\delta$. Ἔσι δὲ δεύτερον $\Gamma\Pi : \Pi M :: \Gamma K : KH$ (ἢ ΘΡ) εἶτ' οὖν $\chi : y :: \tau : KH = \frac{y\tau}{\chi}$. Ἔσι δ' ἐπὶ τούτοις (ἐκ τῆς τῶν τριγώνων ΤΠΜ, ΗΙΡ ὁμοιότητος) $T\Pi : \Pi M :: HP : PI$, εἶτ' οὖν (§. 98.) $\frac{\chi\chi - \alpha\alpha}{\chi} : y :: \rho : PI = \frac{\rho y \chi}{\chi\chi - \alpha\alpha}$. Ἐντεῦθεν ἄρα $I\Theta^2 = (IP + P\Theta)^2 = \frac{\rho^2\chi^2y^2}{(\chi\chi - \alpha\alpha)^2} + \frac{2\rho\tau yy}{\chi\chi - \alpha\alpha} + \frac{\tau\tau\ yy}{\chi\chi}$. Ἔσι δὲ παρὰ ταῦτα (§. 62.) $\sigma\Pi . \Pi\Sigma : \sigma\Theta . \Theta\Sigma :: M\Pi^2 : \Theta I^2$, τουτέσιν (ἐν ἀναλυτικοῖς ὅροις) $\chi\chi - \alpha\alpha : 2\rho\tau - \alpha\alpha +$

$\varrho\varrho + \tau\tau :: \gamma\gamma : \Theta I^2 = \frac{2\varrho\tau\gamma\gamma - \alpha\alpha\gamma\gamma + \varrho\varrho\gamma\gamma + \tau\tau\gamma\gamma}{\chi\chi - \alpha\alpha}$.

Παραβληθεισῶν ἐν ἀλλήλαις τῶν δυεῖν τῆ ΘI^2 Α'ξιῶν, πρόεισιν Ε'ξίσωσις ἡ $\frac{2\varrho\tau\gamma\gamma - \alpha\alpha\gamma\gamma + \varrho\varrho\gamma\gamma + \tau\tau\gamma\gamma}{\chi\chi - \alpha\alpha}$

$= \frac{\varrho\varrho\chi\chi\gamma\gamma}{(\chi\chi - \alpha\alpha)^2} + \frac{2\varrho\tau\gamma\gamma}{\chi\chi - \alpha\alpha} + \frac{\tau\tau\gamma\gamma}{\chi\chi}$. Τῶν ἐν λοιπῶν, ὡς ἀνωτέρω, ἐκπερανθεισῶν πράξεων, εὑρίσκεται $\varrho\varrho = HP^2 = \alpha\alpha - \chi\chi + \tau\tau - \frac{\alpha\alpha\tau\tau}{\chi\chi}$. Ε'φόδῳ δὲ δείξεως παραπλησίᾳ τῇ ἐπὶ τῆς Ε'λλείψεως χρησαμένοις συνάγεται εἶναι $IH^2 : MH . HO :: \Gamma N^2 : \Gamma M^2$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 121.

Η' τῆς ἀναλογίας τῦδε τῦ θεωρήματος ἔκφρασις καθομοιῦται τῇ περὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Τεταγμένων ἐπὶ τῦ πρώτυ Α'ξονος (§. 61.), ἢ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τῦ δευτέρυ Α'ξονος (§. 87.)

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 122.

Ε'πειδὴ κατὰ τὴν Ε'λλειψιν πᾶσαι αἱ ἐφ' ἡςτινοσῦν Διαμέτρε Τεταγμέναι ἐντὸς τῦ σχήματος κεῖνται, ἀεὶ ἀληθεύσει τὸ θεώρημα, ὁποιαιδήποτ' ἂν ὦσιν αἱ Συζυγεῖς Διάμετροι. Ε'πίδηλον δ' ἐπὶ τέτοις ἐν γένει τὰ περὶ τὲς Α'ξονας ἁπασῶν τῶν Κωνικῶν Τομῶν ἰδιώματα, οἷς μέντοιγε μηδὲν ἂν δέοι τῆς τῶν Ε'ςιῶν θεωρίας, ἔχειν ἂν προσεφαρμόζεσθαι καὶ πάσαις ταῖς Συζυγέσι τῶν Διαμετρῶν· τετωὶ μόνῳ διαλλάττοντα, καθότι αἱ μὲν ἐπὶ τῶν Α'ξόνων Τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς αὐτοῖς ἐφεςήκασιν, αἱ δ' ἐπὶ τῶν Διαμέτρων, πλαγίως. Διὰ ταῦτ' ἄρα τῆς Ιη ἐκ τῦ Ι ἀχθείσης τεταγμένως ἐπὶ τῆς διαμέτρε ΔΝ, δειχθείσεται ἐπὶ τῆς Ε'λλείψεως ἐφόδῳ ὁμοίᾳ τῇ ἐν (§. 87), ὅτι $Ιη^2 : Δη \,.\, ηΝ :: ΓΜ^2 : ΓΔ^2$, ἀμέλειτοι „Τὰ ἀπὸ τῶν Τεταγμένων „ἐπὶ τῆς δευτέρας Διαμέτρε Τετράγωνα πρὸς τὰ „ὑπὸ τῶν σισοίχεσῶν Α'ποτετμημένων γινόμενα λό„γον ἔχεσιν, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης Η'μιδιαμέτρε „Τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας."

Κατὰ δὲ τὴν Υ'περβολὴν (δι' ὅ,τι ἡ Ιη ἐκτὸς τῆς Καμπύλης κεῖται) δειχθήσεται, καθὰ καὶ ἐν (§. 94.) ὑπάρχειν $I\eta^2 : \Gamma\Delta^2 + \Gamma\eta^2 :: \Gamma M^2 : \Gamma\Delta^2$. Τῆς γάρ τοι πρώτης Διαμέτρου ΜΟ καλουμένης 2α, τῆς δέτοι δευτέρας $\Delta N = 2\beta$, τῆς δὲ ΗΙ (ἥτις καὶ ἐντὸς τῆς Καμπύλης πίπτει) τῆς ἐπὶ τῆς πρώτης διαμέτρου Τεταγμένης $= y$, τῆς δὲ ἀπὸ τοῦ Κέντρου Ἀποτετμημένης $\Gamma H = \chi$, ἔσεται $HM = \chi - \alpha$, καὶ $HO = \chi + \alpha$. Οὐκοῦν $MH . HO = \chi\chi - \alpha\alpha$. Ἡ δ' ἐν §. 120. δειχθεῖσα ἀναλογία $HI^2 : MH . HO :: \Gamma N^2 : \Gamma M^2$ ἔσεται ἐν στοιχείοις $yy : \chi\chi - \alpha\alpha :: \beta\beta\ \alpha\alpha$ (πάντως ὡς καὶ ἐν τῇ §. 61. ἀναλογία ἐδείχθη) ἥτις ἐπίσης τῇτε Ἐλλείψει καὶ τῇ Ὑπερβολῇ ἐπανήκει, διὰ τὸ τὴν Τεταγμένην ΙΗ ἐντὸς τῆς Καμπύλης πίπτειν. Ἐξ αὐτῆς δὲ προβάλει ἡ Ἐξίσωσις $\alpha\alpha yy = \beta\beta\chi\chi - \beta\beta\alpha\alpha$, καὶ $\beta\beta\chi\chi = (yy + \beta\beta)\alpha\alpha$, ἐξ ἧς ἡ ἀναλογία $\chi\chi : yy + \beta\beta :: \alpha\alpha : \beta\beta$, ἥτις ἐν γραμμαῖς ἐστι $I\eta^2\ (= \Gamma H^2) : \Gamma\eta^2 + \Gamma\Delta^2\ (= HI^2 + \Gamma\Delta^2) :: \Gamma M^2 : \Gamma\Delta^2$. Ἔστιν ἄρα (καθὰ καὶ ἐν §. 94, διὰ τὸ πίπτειν τὴν Ιη ἐκτὸς τῆς καμπύλης) „Τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ἐπὶ „τῆς δευτέρας Διαμέτρου Τετράγωνον ($I\eta^2$) πρὸς „τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγόνων τοῦτε ἀπὸ τῆς αὐ„τῇ συστοιχούσης Ἀποτετμημένης, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμι„δευτέρας Διαμέτρου ($\Gamma\eta^2 + \Gamma\Delta^2$), ὡς τὸ ἀπὸ τῆς

„πρώτης Ἡμιδιαμέτρου Τετράγωνον· ($ΓΜ^2$) πρὸς „τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Ἡμιδιαμέτρου ($ΓΔ^2$).

Πᾶσαι μὲν οὖν αἱ τοῖς Συζυγέσιν Ἄξοσιν ἐπανήκειν ἀποδειχθεῖσαι ἀναλογίαι τε καὶ ἐξισώσεις, καὶ ταῖς συζυγέσι τῶν Διαμέτρων ἀποδειχθήσονται. Ἐπινοηθήσονται δ' ἐν ἑκάστῃ Συζυγεῖ Διαμέτρῳ καὶ οἰκεῖαι Παράμετροι, ἐὰν προσδιορισθῇ ἡ τρίτη συνεχὴς ἀνάλογος (ὡς ἐν §. 57, 87.) προόδου γεωμετρικῆς, ἧς πρῶτος μὲν ὅρος αὐτὴ ἡ Διάμετρος, δεύτερος δὲ ἡ Συζυγὴς αὐτῇ, ἤ, ὃ δὴ ταὐτὸν, ἡ τρίτη ἀνάλογος προόδου, ἧσπερ πρῶτος μὲν ὅρος ἡ πρώτη Διάμετρος, δεύτερος δὲ, ἡ δευτέρα, οἷον $\div$ ΟΜ : ΝΔ : π (π, ῥηθήσεται ἡ τῆς ΟΜ Διαμέτρου Παράμετρος) ἢ $\div$ ΝΔ : ΟΜ : π (π, νῦν ἐστιν ἡ τῆς ΝΔ Διαμέτρου Παράμετρος).

Σχ. 13. Ἀλλὰ γὰρ ἐν τῇ Παραβολῇ ἡ ἑκάστης Διαμέτρου, οἷον τῆς Μζ Παράμετρος ἀεὶ ἐστι τὸ τετραπλάσιον τῆς Μμ διαστάσεως, ἣν διΐσταται ἡ τῆς διαμέτρου ἀρχὴ Μ ἀπὸ τῆς Διευθετούσης Αμ, ἢ ἀπὸ τῆς Ἑστίας. Ἐὰν γὰρ, ὥσπερ ἡ τοῦ Ἄξονος Παράμετρος προσδιωρίσθη, ὥστε εἶναι $ΜΠ^2 = ΣΠ \cdot π$, εἴτ' οὖν $yy = χπ$ (§. 60.) ὡσαύτως καὶ ἡ τῆς διαμέτρου Μζ Παράμετρος τεθῇ εἶναι $ΟΣ^2 = ΜΟ \cdot π$, τὸ Τετράγωνον δήπου τὸ ἀπὸ τῆς $ΟΣ^2$ ἐπὶ τῆς Διαμέτρου Μζ

Τεταγμένης ἐξισῦσθαι τῷ ὑπὸ τῆς ἰδίας Ἀποτετμημένης, ϗ τῆς ἰδίας Παραμέτρυ γινομένῳ, εὑρεθήσεται ἡ ὕτω προσδιορισθεῖσα $\pi = 4\,\mathrm{M}\mu = 4\,\mathrm{MZ}$· Ἐπειδὴ γὰρ $\mathrm{MT}^2 = 4\,\mathrm{A\Sigma}\,.\,\mathrm{\Sigma\Pi} + 4\,\mathrm{\Sigma\Pi}^2$ (§. 83.) ϗ $\mathrm{\Sigma O} = \mathrm{MT}$, ϗ ἡ Ἀποτετμημένη $\mathrm{MO} = \mathrm{\Sigma T} = \mathrm{\Sigma\Pi}$ (§. 71.) Ταύτητοι ἔσεται $\mathrm{MT}^2 = \mathrm{O\Sigma}^2 = 4\,\mathrm{A\Sigma}\,.\,\mathrm{\Sigma\Pi} + 4\,\mathrm{\Sigma\Pi}^2 = \mathrm{MO}\,.\,\pi = \mathrm{\Sigma\Pi}\,.\,\pi$, ϗ διαιρέσει διὰ $\mathrm{\Sigma\Pi}$, ἔςι $4\,\mathrm{A\Sigma} + 4\,\mathrm{\Sigma\Pi} = \pi$· ϗ $4\,\mathrm{A\Sigma} + 4\,\mathrm{\Sigma\Pi} = 4\,\mathrm{A\Pi} = 4\,\mathrm{M}\mu = 4\,\mathrm{MZ}$. Ἄρα $\pi = 4\,\mathrm{M}\mu = 4\,\mathrm{MZ}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ′.

§. 123.

Ἐὰν ἀπὸ τῦ πέρατος Μ Διαμέτρυ Σχ.
ἡςτινοσῦν ΓΜ καταχθῇ ἡ ΜΡ Κάθετος 17.
τῇ Συζυγεῖ Διαμέτρῳ ΔΝ ἔσεται ΜΡ : 18.
ΓΛ : : ΓΣ : ΓΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςι (§. 118, 119.) $\Gamma\Delta^2 \pm \Gamma\mathrm{M}^2 = \beta\beta \pm \alpha\alpha$· ἀλλ' (ἐκ τῆς δείξεως τῶν αὐτῶν §, §.) ἔςι $\Gamma\mathrm{M}^2 = \chi\chi \pm \beta\beta \mp \frac{\beta\beta\,\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἐν ἄρα τῇ Ἐλλείψει ἐςὶ $\Gamma\Delta^2$

$=\alpha\alpha-\chi\chi+\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ἐν δὲ τῇ Ὑπέρβολῇ ΓΔ²

$=-\alpha\alpha+\chi\chi+\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha}$, ὅ ἐςι ΓΔ² $=\frac{\beta\beta\chi\chi\pm}{\alpha\alpha}$

$\frac{\alpha^4\mp\alpha\alpha\chi\chi}{}$. Ἤδη ἒν κατήχθω ἐκ τῦ Κέντρȣ Γ ἡ ΓΙ Κάθετος τῇ Ἐφαπτομένῃ, ϗ προήχθω ἡ ΓΛ ἄχρι τῦ συμβαλεῖν τῇ Ἐφαπτομένῃ κατὰ τὸ Χ. Ἐπεὶ ἒν τὰ τρίγωνα ΓΙΧ, ΜΝΠ ὅμοια ἀλλήλοις εἰσιν, εἴγε ἐςιν ἡ ὑπὸ ΜΓΧ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΓΜΠ, ἔσης ΡΧ παραλλήλȣ τῇ ΠΜ, ἐξ ὧν ἀφαιρεθεισῶν ἔνθεν μὲν τῆς ὑπὸ ΓΜΝ, ἔνθεν δὲ τῆς ὑπὸ ΙΓΜ, αἵτινές εἰσιν εἴσαι ἀλλήλαις διὰ τὸ εἶναι παραλλήλȣς τὰς ΓΙ, ΝΜ, καταλείπονται ἴσαι αἱ ὑπὸ ΙΓΧ, ΠΜΝ. Ὑπάρχει ἄρα ΓΙ : ΓΧ :: ΜΠ : ΜΝ, τȣτέςι ΡΜ : ΓΧ :: ΓV : ΝΜ. Οὐκῦν ΡΜ . ΝΜ = ΓΧ . ΓV. Ἀλλὰ (§. 74, 106.) ΓΧ. ΓV = ΓΛ² · ἄρα ϗ ΜΡ . ΝΜ = ΓΛ² · ἄρα ΝΜ: ΓΛ :: ΓΛ : ΜΡ, ϗ ΝΜ² : ΓΛ² :: ΓΛ² : ΜΡ², ϗ ἐν ὅροις ἀναλυτικοῖς (§. 103.) $\frac{\beta^4\chi\chi\pm\alpha^4\beta\beta\mp}{\alpha^4}$

$\frac{\alpha\alpha\beta\beta\chi\chi}{}:\beta\beta::\beta\beta:\text{ΜΡ}^2=\frac{\alpha^4\beta\beta}{\beta\beta\chi\chi\pm\alpha^4\mp\alpha\alpha\chi\chi}$.

Ἀλλὰ $\frac{\beta\beta\chi\chi\mp\alpha^2\chi^2\pm\alpha^2}{\alpha\alpha}\cdot\frac{\alpha^4\beta\beta}{\beta\beta\chi\chi\pm\alpha^4\mp\alpha\alpha\chi\chi}$

$= \alpha\alpha\beta\beta \cdot$ ἄρα $\Gamma\Delta^2 . \mathrm{MP}^2 = \alpha\alpha\beta\beta = \Gamma\Sigma^2 . \Gamma\Lambda^2$. ἄρα $\mathrm{MP}^2 : \Gamma\Lambda^2 :: \Gamma\Sigma^2 : \Gamma\Delta^2$, ϗ τέως $\mathrm{MP} : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Sigma : \Gamma\Delta$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 124.

Τὸ τȣ̃ Παραλληλογράμμȣ ἐμβαδὸν τὸ ὑπὸ τῶν Συζυγῶν Ἡμιδιαμέτρων ΓΜ, ΓΔ ἐξισȣ̃ται τῷ ὑπὸ τῶν Συζυγῶν Ἡμιαξόνων ΓΣ, ΓΛ Ὀρθογωνίῳ. Τὸ γάρτοι ὑπὸ τῶν ΓΜ, ΓΔ Παραλληλόγραμμον καταμετρεῖται τῷ Ὀρθογωνίῳ ΓΔ. ΜΡ, ὅπερ ἴσον ἐςὶ τῷ ΓΣ . ΓΛ. Τȣ̃τ' αὐτὸ δὴ κρατεῖ ϗ περὶ τῶν ὅλων Συζυγῶν Διαμέτρων, ϗ Ἀξόνων. Ἐν γένει ἄρα. „Τὸ ὑφ' οἱωνδήποτε Συζυγῶν „Διαμέτρων ἐμβαδὸν ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν Ἀξόνων „Ὀρθογωνίῳ, ϗ δὴ ϗ ἴσον τῷ Ἐμβαδῷ ἑτέρȣ ὁτινοσȣ̃ν Παραλληλογράμμȣ, ȣ̃τινος πλευραὶ ὁποιαιδήποτ' ἂν ὦσιν ἄλλαι Συζυγεῖς Διάμετροι."