ΣΤΕΡΕΩΜΕΤΡΙΑ.

§. 192.

Ἀπὸ σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, μία μόνον κάθετος ἐμπορεῖ νὰ ἀχθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον.

§. 193. Καὶ ἀπὸ σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον, μία μόνον κάθετος ἐμπορεῖ νὰ ἐγερθῇ.

§. 194. Δύω εὐθεῖαι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι παράλληλοι, καὶ ἐὰν ἡ μία παράλληλος εἶναι γραμμένη εἰς ἓν ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη εἰς ἄλλο, εἶναι καὶ τὰ ἐπίπεδα παράλληλα.

§. 195. Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς δύω ἐπίπεδα, τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

§. 196. Σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς διαςάσεις μῆκος, πλάτος, βάθος ἢ ὕψος, λέγεται σῶμα μαθηματικὸν ἢ ςερεόν.

§. 197. Ἐὰν τρίγωνον, τετράγωνον, ἢ πολύγωνον κάτωθεν πρὸς τὰ ἄνω κινηθῇ παραλλήλως μὲ τὸν ἑαυτόν του, καὶ ἀναβαῖνον ἀφίνῃ ἐπιφανείας ςερεουμένας ἴσας μὲ τὸν ἑαυτόν του, γεννᾶται ςερεὸν τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται πρίσμα· καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν τοῦ κινηθέντος σχήματος ὀνομάζεται τριγωνικὸν, τετραγωνικὸν, πολυγωνικὸν πρίσμα· τὸ κινηθὲν σχῆμα λέγεται βάσις τοῦ ςερεοῦ.

§. 198. Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι παραλληλόγραμμον, τὸ πρίσμα λέγεται παραλληλεπίπεδον· ἐὰν δὲ εἶναι τετράγωνον, καὶ ἀναβῇ εἰς ὕψος ἴσον μὲ τὴν πλευράν του, τὸ πρίσμα λέγεται κύβος.

§. 199. Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι κύκλος (Σχ. 75.), τὸ πρίσμα λέγεται κύλινδρος· οἱ δύω κύκλοι του, βάσεις τοῦ κυλίνδρου· εὐθεῖα δὲ ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἡ αβ, ἄξων τοῦ κυλίνδρου, καὶ ὕψος του.

§. 200. Ἐὰν ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ μεσαίτατα σημεῖα τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος εἶναι κάθετος εἰς αὐτὰς, τὸ πρίσμα λέγεται ὀρθόν· ἐὰν δὲ πλαγία, πλάγιον· ὕψος δὲ λέγεται τὸ απόςημα τῶν δύω βάσεων· εἶναι δὲ φανερὸν, ὅτι τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἄξων καὶ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ (§. 199), τοῦ δὲ πλαγίου, ὁ ἄξων, εἶναι διάφορος παρὰ τὸ ὕψος.

§. 201. Ἐὰν εἰς τὸ μέσον ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓΔ (Σχ. 76.) ςαθῇ κάθετος ἡ βα, καὶ ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπιζευχθῶσιν εἰς τὰς γωνίας τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαι αἱ Αα, Βα, Γα, Δα, θέλει γεννηθῆν Πυραμίς· τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀνομάζεται βάσις τῆς Πυραμίδος, τὸ δὲ σημεῖον α κορυφή· τὸ δὲ ἀπόςημα τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς βάσεως, ὕψος· ἐὰν δὲ ἡ εὐθεῖα βα ςαθῇ πλαγία εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἡ πυραμὶς λέγεται πλαγία, ἐνῷ ἡ πρώτη λέγεται ὀρθή· καὶ ἐὰν ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον, πολύγωνον, ἡ πυραμὶς λέγεται τριγωνικὴ, τετραγωνικὴ, πολυγωνική.

§. 202. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ βα (Σχ. 77.) ἵςαται κάθετος εἰς τὸ κέντρον κύκλου, καὶ περὶ τὴν περιφέρειάν του περιαχθῇ ἡ αΓ εὐθεῖα, ἕως οὗ νὰ ἐπιςρέψῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, θέλει γεννηθῆν κῶνος· καὶ ὁ μὲν κύκλος λέγεται βάσις τοῦ κώνου, τὸ δὲ α κορυφή του, τὸ δὲ ἀπόςημά της ἀπὸ τὴν βάσιν, ὕψος· ἡ δὲ εὐθεῖα αβ, ἄξων· ἐὰν ὁ ἄξων εἶναι κάθετος εἰς τὸν κύκλον, ὁ κῶνος λέγεται ὀρθός· εἰ δὲ μὴ, πλάγιος.

§. 203. Ἐὰν ὁ κῶνος τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ ἄξονος ἕως τὴν βάσιν, ἡ τομὴ εἶναι τρίγωνον.

6*

§. 204. Κῶνοι καὶ πυραμίδες, τεμνόμενοι μὲ ἐπίπεδα παράλληλα τῶν βάσεών των, γίνονται κόλουροι ἢ κολοβοί.

§. 205. Αἱ πλευραὶ τοῦ μὲν πρίσματος εἶναι τετράπλευροι, τῆς δὲ πυραμίδος τρίπλευροι· τοῦ δὲ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου εἶναι μία καμπύλη ἐπιφάνεια.

§. 206. Ἐὰν ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΚΔ (Σχ. 78.) περιενεχθῇ περὶ τὴν μένουσαν ἀκίνητον διάμετρον ΑΒ, ἕως οὗ νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ αὐτὸ, θέλει γεννηθῆν σφαῖρα· ἡ ΑΒ διάμετρος ὀνομάζεται ἄξων τῆς σφαίρας· κέντρον της, τὸ Κ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου· τὰ σημεῖα Α, Β, πόλοι τῆς σφαίρας.

§. 207. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ Α πόλου ἕως τοῦ Β τμηθῇ ἡ σφαῖρα μὲ ἐπίπεδα κάθετα εἰς τὸν ἄξονα, θέλουν γεννηθῆν κύκλοι, οἵτινες μεγαλύνονται ἕως τοῦ κέντρου, καὶ ἐντεῦθεν πάλιν μικρύνονται ἕως τὸν ἄλλον πόλον· ὁ κύκλος, ὅς τις διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύω ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμισφαίρια, εἶναι μέγιςος τῆς σφαίρας κύκλος· καὶ ἐπειδὴ πολλοὶ κύκλοι ἐμποροῦν νὰ τὴν διαιρέσουν εἰς ἴσα μέρη· εἶναι λοιπὸν καὶ πολλοὶ οἱ μέγιςοι κύκλοι εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

§. 208. Εἰς τὰ ςερεὰ σώματα ζητεῖται νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐξωτερικήν των ἐπιφάνειαν, διὰ νὰ μάθωμεν πόσα τετραγωνικὰ μέρη περιέχει· καὶ ἔπειτα νὰ μετρήσωμεν καὶ τὴν ςερεότητά των· λέγομεν λοιπὸν συντόμως τὸ πρῶτον, καὶ ἔπειτα τὸ δεύτερον.

§. 209. Διὰ νὰ μετρήσῃς τὴν ἐπιφάνειαν πρίσματος, μέτρησε πρῶτον τὴν βάσιν του, ὡς ἐπίπεδον σχῆμα, καθὼς ἐδείξαμεν εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν· τὸ διπλοῦν αὐτῆς κάμνει τὴν ἄνω καὶ κάτω βάσιν της· ἔπειτα μέτρησε καθὲν παραλληλόγραμμον ἀπὸ τὰ περικυκλοῦντα τὸ πρίσμα· τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν βάσεων καὶ τῶν παραλληλογράμμων τούτων θέλει σὲ δώσειν τὴν ζητουμένην ἐπιφάνειαν.

§. 210. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου, μέτρησε μόνον μίαν βάσιν, καὶ δύω ἐφεξῆς κειμένας πλευρὰς, καὶ διπλασίασε τὸ ἄθροισμά των.

§. 211. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κυλίνδρου, μέτρησε πρῶτον μίαν του βάσιν (§. 185.)· καὶ διπλασίασέ την· ἔπειτα πολλαπλασίασε τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του· σύναψε τὸ διπλοῦν τῆς βάσεως μὲ τὸ γινόμενον τοῦτο· τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια.

§. 212. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν ἐπιφάνειαν πυραμίδος, μέτρησε χωριςὰ τὴν βάσιν της, καὶ πᾶσαν μίαν πλευράν της· καὶ συνάψας αὐτὰς ἔχεις τὸ ζητούμενον.

§. 213. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κώνου, μέτρησε πρῶτον τὴν βάσιν του (§. 185.), καὶ μ' αὐτὴν σύναψε τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως, καὶ τῆς ἡμισείας πλευρᾶς αΓ (Σχ. 77.).

§. 214. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κολοβοῦ κώνου (Σχ. 79.), μέτρησε πρῶτον διὰ τῶν διαμέτρων ΑΒ, ΓΔ τὰς δύω βάσεις α, β· δεύτερον πολλαπλασίασε τὸ ἥμισυ κεφάλαιον τῶν περιφερειῶν των μὲ τὴν πλευρὰν ΑΓ· καὶ σύναψέ τα ὅλα.

§. 215. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας, εὑρὲ διὰ τῆς ἀκτῖνός της τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίςου κύκλου της· καὶ τὴν περιφέρειαν ταύτην πολλαπλασιάσας μὲ τὴν διάμετρον, εὑρίσκεις τὸ ζητούμενον.

§. 216. Καθὼς εἰς τὴν μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν ἐμεταχειρίσθημεν μέτρα τετραγωνικὰ, οὕτως εἰς τὴν μέτρησιν τῶν ςερεῶν μεταχειριζόμεσα μέτρα κυβικά.

§. 217. Εἰς εὕρεσιν τῆς ςερεότητος πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ μῆκος μὲ τὸ πλάτος (καὶ τοῦτο εἶναι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον)· καὶ τὸ τετραγωνικὸν γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα μὲ τὸ ὕψος· τὸ δεύτερον τοῦτο γινόμενον εἶναι κυβικὸν μέτρον.

§. 218. Κύβος, τοῦ ὁποίου πᾶσα πλευρὰ εἶναι μία ὀργυιὰ, εἶναι **Κυβικὴ ὀργυιά**· εἰ δὲ εἶναι ποῦς, **κυβικὸς ποῦς**· εἰ δὲ εἶναι δάκτυλος, **κυβικὸς δάκτυλος**.

§. 219. Φαντάσου μίαν τετραγωνικὴν ὀργυιὰν ΑΒΓΔ (Σχ. 80.) ὑψηλὴν ἕνα πόδα, ἢ πολλαπλασιασμένην μὲ 1· θέλει λοιπὸν γεννηθὴν σχῆμα τὸ ΖΔ τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει 36 τετραγωνικοὺς πόδας, ἀλλὰ 36 κυβικοὺς πόδας.

§. 220. Πολλαπλασίασε τώρα τοὺς 36 τετραγωνικοὺς πόδας ἢ τὴν τετραγωνικὴν ὀργυιὰν ΑΒΓΔ (Σχ. 81.), ὄχι μὲ τὴν 1, ἀλλὰ μὲ 6 πόδας, ἤγουν μὲ μίαν ὀργυιάν· θέλει γεννηθῆν κύβος ὁ ΚΒ περιέχων ἑξάκις 36, ἤγουν 216 κυβικοὺς πόδας· ὁ κύβος οὗτος ὀνομάζεται **κυβικὴ ὀργυιά**.

§. 221. Ὡσαύτως ὁ κυβικὸς ποῦς περιέχει δακτύλους κυβικοὺς $12 \times 12 \times 12 = 1728$· καὶ τόσας κυβικὰς γραμμὰς ὁ κυβικὸς δάκτυλος.

§. 222. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν ςερεότητα τοῦ πρίσματος, πολλαπλασίασε τὴν βάσιν του μὲ τὸ ὕψος του· καὶ τὸ γινόμενον θέλει σὲ δώσειν μὲ κυβικὰ μέτρα τὴν ςερεότητα τοῦ πρίσματος.

§. 223. Ἐπειδὴ δὲ παραλληλεπίπεδον καὶ κύβος καὶ κύλινδρος εἶναι πρίσματα (§. 198. 199)· ἄρα καὶ ἐκ τούτων καθὲν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του.

§. 224. Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τριτημόριον πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα· διότι φαντάσου εἰς κύβον τὸν ΑΘ (Σχ. 82.) πυραμίδα τὴν ΑΕΒΓ ἱσαμένην ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως μὲ τὸν κύβον, καὶ ἔχουσαν τὴν κορυφήν της εἰς τὸ μέσον τοῦ κύβου, καὶ θέλεις καταλάβειν εὐκόλως ὅτι ἐλλείπουν ἀκόμη 5 τοιαῦται πυραμίδες διὰ νὰ ἀναπληρώσωσι τὸν κύβον· εἶναι λοιπὸν ἡ πυραμὶς $\frac{1}{6}$ τοῦ ὅλου κύβου, καὶ $\frac{1}{3}$ του ἡμίσεως· ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ ἥμισυς κύβος εἶναι πρίσμα τὸ ΑΙΝΚΓΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα· ἄρα ἡ πυραμὶς εἶναι τριτημόριον τοῦ τοιούτου πρίσματος.

§. 225. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ κύλινδρος εἶναι πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι κύκλος· ὡσαύτως καὶ ὁ κῶνος πυραμίς· διὰ τοῦτο καὶ ὁ κῶνος εἶναι τριτημόριον κυλίνδρου, ὅς τις ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸν κύλινδρον.

§. 226. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν ςερεότητα τῆς πυραμίδος, πολλαπλασίασε τὴν βάσιν της μὲ ὅλον τὸ ὕψος της· τὸ γινόμενον εἶναι πρίσμα (§. 222.), τοῦ ὁποίου λαβὼν τὸ τριτημόριον εὑρίσκεις τὴν ςερεότητα τῆς πυραμίδος (§. 224).

§. 227. Τὸ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ κάμωμεν καὶ εἰς τὸν κῶνον, ὅς τις εἶναι τριτημόριον τοῦ κυλίνδρου (§. 225).

§. 228. Διὰ νὰ εὕρῃς τὴν σφαίρας ςερεότητα, πολλαπλασίασε τὴν ἐπιφάνειάν της (§. 215.) μὲ $\frac{1}{6}$ τῆς διαμέτρου της, ἢ μὲ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀκτῖνος της.

§. 229. Ἐπειδὴ δὲ μὲ τὴν ἐκμέτρησιν ταύτην εὑρίσκεται, ὅτι σφαίρας ἐχούσης διάμετρον 1 πρὸς σφαίρας ἐχούσης διάμετρον 2 ἡ ςερεότης πρὸς τὴν ςερεότητα εἶναι ὡς 1 πρὸς 8· συμπεραίνεται ἐκ τούτου, ὅτι αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας εἶναι, ὡς οἱ τῶν ἀκτίνων των κύβοι, ἢ ὡς οἱ τῶν διαμέτρων των· ἐὰν λοιπὸν μία σφαῖρα ἔχῃ διάμετρον ἕνα πόδα, καὶ ἄλλη δέκα ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν ἔχει λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει 1 : 1000.

§. 230. Ἡ γωνία τοῦ κύβου, τῆς πυραμίδος, τοῦ παραλληλεπιπέδου κτ. λέγεται γωνία στερεά· ἡ στερεὰ λοιπὸν γωνία σχηματίζεται ἀπὸ ἐπιπέδους γωνίας, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ ἀποτελοῦν τὴν κορυφὴν τῆς στερεᾶς γωνίας.

§. 231. Τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι χρειάζονται τοὐλάχιστον διὰ νὰ συσταθῇ μία στερεά.

§. 232. Αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ὅμοιαι, ἐὰν αἱ περιέχουσαι αὐτὰς ἐπίπεδοι εἶναι ἰσάριθμοι, καὶ πᾶσα μία μὲ πᾶσαν μίαν ἴση κατὰ τάξιν.

§. 233. Ὅμοια στερεὰ λέγονται, τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ ἰσαρίθμων ἐπιπέδων, καὶ ὁμοίων ἑνὸς πρὸς ἄλλο κατὰ τάξιν· ὁ κύβος π. χ. εἶναι ὅμοιος μὲ ἄλλον κύβον, ἐπειδὴ καθεὶς περιέχεται ἀπὸ ἓξ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια.

§. 234. Καθὼς ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα ἔχουν ἴσας τὰς ἀντιστίχους γωνίας· οὕτω καὶ αἱ ἀντίστιχοι στερεαὶ γωνίαι τῶν ὁμοίων στερεῶν εἶναι ἴσαι.

§. 235. Αἱ ἀντίστιχοι πλευραὶ δύω ὁμοίων ἐπιπέδων σχημάτων εἶναι ἀνάλογοι· καὶ τὴν ἀναλογίαν ταύτην φυλάττουσι καὶ ὅταν τὰ ὅμοια ἐπίπεδα εἶναι πλευραὶ ὁμοίων στερεῶν.

§. 236. Στερεαὶ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἐμβαλλόμεναι μὲ τὴν φαντασίαν ἡ μία εἰς τὴν ἄλλην, ἐφαρμόζονται ἀκριβῶς, εἶναι ἴσαι.

§. 237. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι συνέρχονται εἰς ἓν σημεῖον, εἶναι 360°· ἀποτελοῦν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν (§. 36.), καὶ ὄχι στερεὰν γωνίαν.

§. 238. Ἄρα τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἵτινες συνιστῶσι γωνίαν στερεὰν, πρέπει νὰ εἶναι μικρότερον παρὰ 368°.

§. 239. Κανονικὰ στερεὰ ὀνομάζονται, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσάλληλα κανονικὰ ἐπίπεδα σχήματα.

§. 240. Ἐπειδὴ λοιπὸν πᾶσα γωνία κανονικοῦ στερεοῦ σύγκειται ἀπὸ τοιαύτας ἐπιπέδους γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἰσάλληλοι καὶ κατὰ τὸν ἀριθμὸν καὶ κατὰ τὸ μέγεθος· ἀναγκαίως πᾶσαι αἱ γωνίαι τοῦ κανονικοῦ ςερεοῦ εἶναι ἰσάλληλοι.

§. 241. Κανονικὰ σώματα εἶναι πέντε, καὶ ὄχι πλειότερα.

Διότι εἰς πᾶν κανονικὸν ςερεὸν ἀπαιτοῦνται ἴσα κανονικὰ ἐπίπεδα τοῦ αὐτοῦ εἴδους (§. 239.)· καὶ ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἵτινες συνιςῶσι ςερεὰν γωνίαν, πρέπει πάντοτε νὰ εἶναι μικρότερον παρὰ 360° (§. 238.)· εἶναι φανερὸν, ὅτι εἰς γένεσιν κανονικοῦ ςερεοῦ ἐμποροῦν νὰ χρησιμεύσωσι μόνον τὰ ἐφεξῆς κανονικὰ ἐπίπεδα· ἰσόπλευρα τρίγωνα, τετράγωνα, καὶ κανονικὰ πεντάγωνα.

α΄. Τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ γωνία εἶναι=60° (§. 51)· τρεῖς λοιπὸν ἐξ αὐτῶν κάμνουν 180°· καὶ τέσσαρα τοιαυτα τρίγωνα συνιςῶσι ςερεὸν κανονικὸν, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται Τετράεδρον, ἐπειδὴ ἔχει τέσσαρας ἐπιφανείας.

β΄. Τέσσαρες γωνίαι ἰσοπλεύρων τριγώνων κάμνουν 240°· καὶ ὀκτὼ τοιαῦτα τρίγωνα ἀποτελοῦν ὀκτάεδρον, ἐπειδὴ ἔχει ὀκτὼ ἐπιφανείας.

γ΄. Πέντε τοιαῦται γωνίαι κάμνουν 300°, καὶ 20 τρίγωνα κάμνουν εἰκοσάεδρον· ἓξ δὲ γωνίαι εἶναι 360°· καὶ λοιπὸν ἄλλο ςερεὸν κανονικὸν δὲν γίνεται ἐξ ἰσοπλεύρων τριγώνων.

δ΄. Τρεῖς γωνίαι τετραγώνου κάμνουν $3 \times 90 \times 270°$· καὶ ἓξ τετράγωνα κάμνουν τὸν κύβον, ὅς τις λέγεται καὶ ἑξάεδρον· ἐπειδὴ δὲ 4 γωνίαι τετραγώνου κάμνουν 360°, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἄλλο κανονικὸν ςερεὸν δὲν δύναται νὰ συςαθῇ ἐκ τετραγώνων.

ε΄. Ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι = 108° (§. 144.)· καὶ 3 ἐξ αὐτῶν κάμνουν 324°· δώδεκα δὲ πεντάγωνα συνιςῶσι τὸ δωδεκάεδρον, ἐπειδὴ ἔχει δώδεκα πλευράς· ἐπειδὴ δὲ $4 \times 108 = 432^{\circ}$, ἄλλο λοιπὸν κανονικὸν ϛερεὸν δὲν γίνεται ἐκ κανονικῶν πενταγώνων.

Τοῦ ἑξαγώνου ἡ γωνία εἶναι $= 120^{\circ}$ (§. 144.), τρεῖς δὲ ἐξ αὐτῶν κάμνουν 360°· ἄρα ἐκ κανονικῶν ἑξαγώνων ϛερεὸν δὲν γίνεται· οὐδὲ ἐξ ἑπταγώνων, οὐδὲ ἐξ ἄλλων πολυγώνων. Τὰ κανονικὰ λοιπὸν ϛερεὰ εἶναι πέντε, καὶ ὄχι πλειότερα.

Διὰ νὰ καταλαμβάνωσιν οἱ πρωτόπειροι τὰ εἰρημένα σχήματα, πρέπει νὰ τὰ ἔχουν πρὸ ὀφθαλμῶν κατασκευασμένα ἐκ ξύλων· διότι μὲ τὸν τρόπον τοῦτον ἐμποροῦν νὰ λάβωσιν εὐκρινῆ καθενὸς τὴν ἔννοιαν.