§. 156. Ἐὰν εἶναι βα : ΒΑ : : βδ : ΒΔ : : αδ : ΑΔ, ἀφ' οὗ ληφθῇ ΒΖ = αβ, καὶ ἡ ΖΕ ἀχθῇ παράλληλος μὲ τὴν ΑΔ, θέλει εἶσθαι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον ΖΒΕ, καὶ ἐπομένως ΒΖ : ΒΑ : : ΒΕ : ΒΔ : : ΕΖ : ΑΔ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΒΖ = βα, θέλει εἶσθαι καὶ ΒΕ = βδ, καὶ ΕΖ = αδ· ἐμποροῦν λοιπὸν νὰ σκεπασθῶσι τὰ τρίγωνα αβδ, ΖΒΕ, καὶ ἐπομένως τὸ ΑΒΔ τρίγωνον νὰ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ αβδ· διὰ τοῦτο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν πάσας τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

§. 157. Ἐὰν εἶναι ἡ γωνία Β = β (Σχ. 67.), καὶ ΒΑ : ΑΓ : : βα : αγ, καὶ προσέτι ΑΓ > ΑΒ, καὶ ἐπομένως αγ > αβ, ἀφ' οὗ ληφθῇ ΒΖ = βα, καὶ ἡ ΖΕ ἀχθῇ παράλληλος μὲ τὴν ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΒΖΕ θέλει εἶσθαι ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ, καὶ ἐπομένως ΒΑ : ΑΓ : : ΒΖ : ΖΕ : : βα : αγ· ἐπειδὴ ἐλήφθη ΒΖ = βα, θέλει εἶσθαι καὶ ΖΕ = αγ· καὶ τὰ τρίγωνα ΒΖΕ, αβγ ἐμποροῦν νὰ σκεπασθῶσι· διὰ τοῦτο εἶναι ὅμοιον καὶ τὸ τρίγωνον αβγ μὲ τὸ ΑΒΓ. Τρίγωνα λοιπὸν, ἔχοντα ἴσας μίαν γωνίαν μὲ μίαν, καὶ ἀναλόγους δύω πλευρὰς, αἵτινες δὲν περιέχουν τὰς ἴσας γωνίας, εἶναι ὅμοια, ἐὰν αἱ ὑποτείνουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι μεγαλήτεραι ἀπὸ τὰς εἰς αὐτὰς παρακειμένας.

§. 158. Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου (Σχ. 68.) ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΔ ἀχθῇ εἰς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΔ κάθετος ἡ ΑΕ, ἡ γωνία Β τριγώνου τοῦ ΒΕΑ θέλει εἶσθαι ἡ αὐτὴ καὶ γωνία τοῦ ΒΑΔ τριγώνου, καὶ ἡ γωνία ΒΕΑ = Ο = ΒΑΔ, καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΒΕΑ ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ· ὡσαύτως εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΑ ὅμοιον μὲ τὸ ΒΑΔ, καὶ ἐπομένως καὶ τὰ τρίγωνα ΒΕΑ, ΔΕΑ ὅμοια. Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας τριγώνου ὀρθογωνίου ἀχθῇ κάθετος εἰς τὴν ὑποτείνουσαν, θέλει τὸ διαιρέσειν εἰς δύω τρίγωνα ὅμοια καὶ μετ' ἀλλήλων καὶ μετὰ τοῦ ὅλου.

§. 159. Ἡ κάθετος ΑΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τῆς ὑποτεινούσης τμημάτων ΒΕ, καὶ ΔΕ.

§. 160. Ἡ ἀπὸ παντὸς σημείου Α τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΔ ἀγομένη κάθετος ΑΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τῆς διαμέτρου τμημάτων ΒΕ, ΕΔ· καὶ πᾶσα μία ἀπὸ τὰς δύω χορδὰς ΑΔ, ἢ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς διαμέτρου ΒΔ καὶ τοῦ εἰς τὴν χορδὴν παρακειμένου τμήματος ΔΕ ἢ ΒΕ.

§. 161. Ἐὰν λοιπὸν θέλῃς νὰ εὕρῃς μέσην ἀνάλογον τῶν δεδομένων εὐθειῶν α, β, ἄγαγε ἀπροσδιόριστον εὐθεῖαν την ΑΧ (Σχ. 69.) καὶ λάβε ΒΕ $=$ α, καὶ ΕΔ $=$ β, καὶ διχοτόμησε τὴν ΒΔ κατὰ τὸ Κ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ γράψε κύκλον, καὶ ἐκ τοῦ Ε σῆσε κάθετον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΔ τὴν ΕΑ, ἥτις θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος.

§. 162. Πᾶν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως τινὸς ὀρθογωνίου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνον.

§. 163. Ἐὰν Β, β σημαίνωσιν ἀντιςίχους βάσεις δύω ὁμοίων τριγώνων Δ, δ, καὶ Υ, υ τὰ ὕψητων, θέλει εἶσθαι $\Upsilon : \upsilon :: \mathrm{B} : \beta$ (§. 153.), καὶ ἐπομένως $\Upsilon = \frac{\mathrm{B}\upsilon}{\beta}$· καὶ ἐπειδὴ $\delta = \frac{\beta\upsilon}{2}$, καὶ $\Delta = \frac{\mathrm{B}\Upsilon}{2}$ (§. 115.), ἐὰν βάλωμεν εἰς τὸν δεύτερον τύπον τὸ ἴσον τοῦ Υ ἤγουν τὸ $\frac{\mathrm{B}\upsilon}{\beta}$ ἀντὶ Υ, θέλει γενῆν $\Delta = \frac{\mathrm{B}^2\upsilon}{2\beta}$· ἄρα $\Delta : \delta :: \frac{\mathrm{B}^2\upsilon}{2\beta} : \frac{\beta\upsilon}{2} :: \frac{\mathrm{B}^2}{\beta} : \beta :: \mathrm{B}^2 : \beta^2$: Τὰ ὅμοια λοιπὸν τρίγωνα πρὸς ἄλληλα εἶναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀντιςίχων βάσεών των τετράγωνα.

§. 164. Καὶ ἐπειδὴ δύω ἄλλαι ἀντίςιχοι πλευραὶ ὁμοίων τριγώνων ἐμποροῦν νὰ ὑποτεθῶσι βάσεις των· ἄρα τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα εἶναι καὶ ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὁποιωνδήποτε ἀντιςίχων πλευρῶν των τετράγωνα.

§. 165. Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι καὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὑψῶν των τετράγωνα.

§. 166. Ἐὰν μία πλευρὰ ἢ τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου εἶναι διπλάσιον, τριπλάσιον κτ. παρὰ τὴν ἀντίςιχον πλευρὰν ἢ τὸ ὕψος τοῦ ὁμοίου του τριγώνου, τὸ πρῶτον τρίγωνον πρὸς τὸ δεύτερον θέλει εἶσθαι :: 1 : 4, ἢ :: 1 : 9, ἢ 1 : 16 κτλ.

§. 167. Ἐὰν σχῆμα τὸ ΑΒΓΔΕ (Σχ. 70.) διαιρέσῃς διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ εἰς τρίγωνα, καὶ ἄξῃς τὰς εὐθείας βγ, εδ, δγ παραλλήλους μὲ τὰς ΒΓ, ΕΔ, ΔΓ, θέλουν εἶσθαι τὰ τρίγωνα βΑγ, γΑδ, δΑε κατὰ τάξιν ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ. Εἶναι λοιπὸν κατὰ τάξιν αἱ γωνίαι β, γ, δ, ε, Α ἴσαι μὲ τὰς γωνίας Β, Γ, Δ, Ε, Α· καὶ προσέτι ΑΒ : ΒΓ :: Αβ : βγ, καὶ ΒΓ : ΓΔ :: βγ : γδ, καὶ ΓΔ : ΔΕ :: γδ : δε, καὶ ΔΕ : ΕΑ :: δε : εα, ἤγουν αἱ ἀντίςοιχοι πλευραὶ τῶν δύω σχημάτων εἶναι ἀνάλογοι. Σχήματα δὲ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἰσαρίθμους πλευρὰς, καὶ τὰς γωνίας κατὰ τάξιν ἴσας πᾶσαν μίαν μὲ πᾶσαν μίαν, καὶ τὰς ἀντιςίχους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

§. 168. Σχήματα, τὰ ὁποῖα σκεπάζονται ὑπ' ἀλλήλων, εἶναι ὅμοια. Καὶ δύω σχήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια μὲ τρίτοντι, εἶναι καὶ ἀλλήλων ὅμοια.

§. 169. Ὅμοια σχήματα δι' ἀντιςίχων διαγωνίων διαιροῦνται εἰς ὅμοια τρίγωνα.

§. 170. Εἰς τὰ ὅμοια σχήματα δύω ἀντίςιχοι διαγώνιοι εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς δύω ἀντίςιχοι πλευραί.

§. 171. Ἐὰν εἰς σχῆμα τὸ ΑΒΓΔΕ (Σχ. 71.) ἀγάγῃς τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, καὶ εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν αε συςήσῃς τὰς γωνίας π, κ, ρ ἴσας μὲ τὰς γωνίας Π, Κ, Ρ, καὶ τὰς σ, τ, υ μὲ τὰς Σ, Τ, Υ, καὶ ἐπιζεύξῃς τὰς εὐθείας βγ, γδ, θέλεις κατασκευάσειν τὸ αβγδε σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ (§. 167).

§. 172. Ἐὰν κάμῃς α΄ τὰς γωνίας π, κ, ρ ἴσας μὲ τὰς Π, Κ, Ρ· β΄ τὴν αδ = μὲ τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν ΑΕ, ΑΔ, αε· γ΄ τὴν αγ = μὲ τὴν τετάρτην ἀναλόγον τῶν ΑΔ, ΑΓ, αδ, καὶ ἐπιζεύξῃς τὰς εὐθείας βγ, γδ, δε, θέλεις κατασκευάσειν πάλιν ἐπὶ τῆς εὐθείας αε σχῆμα τὸ αβγδε ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ.

§. 173. Ἐμποροῦμεν λοιπὸν ἐπὶ πάσης δεδομένης εὐθείας νὰ γράψωμεν τὸ ζητούμενον σχῆμα (§. 167, 171, 172).

§. 174. Ἐπειδὴ δύω πλευραὶ σχήματος ἔχουν πρὸς ἀλλήλας λόγον, τὸν ὁποῖον δύω ἀντίςιχοι πλευραὶ τοῦ ὁμοίου του σχήματος· διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα, ἤγουν ἡ περίμετρος τοῦ ἑνὸς πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ἄλλου ἔχει λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τὴν ἀντίςιχον τοῦ ἄλλου σχήματος.

§. 175. Δύω ὁμοίων σχημάτων, ἐὰν τοῦ ἑνὸς μία πλευρὰ εἶναι διπλασία, τριπλασία κτ. παρὰ τὴν ἀντίςιχον τοῦ ἄλλου, θέλει εἶσθαι ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου διπλασία, τριπλασία κτ. παρὰ τὴν τοῦ δευτέρου.

§. 176. Αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων σχημάτων εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διαγώνιοί των.

§. 177. Δύω κανονικῶν πολυγώνων μὲ ἰσαρίθμους πλευρὰς αἱ περίμετροι εἶναι ὡς αἱ μεγαλήτεραι ἢ αἱ μικρότεραι ἀκτῖνές των.

§. 178. Ἐπειδὴ τὰ ὅμοια σχήματα ἐμποροῦν νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἰσάριθμα ὅμοια τρίγωνα· ταῦτα δὲ εἶναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀντιςίχων πλευρῶν τετράγωνα· ἄρα κ᾿ ἐκεῖνα εἶναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀντιςίχων των πλευρῶν τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀντιςίχων των διαγωνίων τετράγωνα.

§. 179. Ὅμοια κανονικὰ σχήματα εἶναι καὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν μεγαλητέρων ἢ μικροτέρων ἀκτίνων των τετράγωνα.

§. 180. Ἐὰν περισρέψῃς τροχὸν τὸν αβεδα (Σχ. 72). τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος αε $=\overset{\pi}{1}+\overset{\delta}{9}$ ἐπάνω ἐπιπέδου κατὰ τὸν δρόμον τῆς ἁπτομένης αθ, ἕως οὗ τὸ τῆς περιφερείας σημεῖον α νὰ φθάσῃ πάλιν εἰς τὸ ἔδαφος, καὶ μετρήσῃς τὴν αθ θέλεις τὴν εὑρεῖν $=\overset{\pi}{5}+\overset{\delta}{6}$· ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα αθ εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ τροχοῦ· διὰ τοῦτο ἡ διάμετρος αε ἔχει πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν αβεδα τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει $\overset{\pi}{1}+\overset{\delta}{9} : \overset{\pi}{5}+\overset{\delta}{6}$, ἤγουν ὡς 22 : 66 : : 7 : 22 περίπου. Εὕρηκαν δὲ προσέτι, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἔχει λόγον : : 113 : 355 ἢ 100 : 314.

§. 181. Ἐὰν ἡ διάμετρος τροχοῦ τινος εἶναι διπλασία, ἢ τριπλασία κτλ. παρὰ διάμετρον ἄλλου, εὑρίσκεται ἡ περιφέρεια τοῦ πρώτου διπλασία, τριπασία κτ. τῆς διαμέτρου τοῦ δευτέρου μὲ τρόπον ὅμοιον τοῦ εἰρημένου (§. 180). Ἐὰν λοιπὸν δ, Δ σημαίνωσι τὰς διαμέτρους δύω κύκλων· π, Π τὰς περιφερείας των· α, Α τὰς ἀκτῖνας των, θέλει εἶσθαι α : Α : : δ : Δ : : π : Π, ἤγουν αἱ διάμετροι τῶν κύκλων εἶναι ὡς αἱ περιφέρειαι.

§. 182. Ὅταν μᾶς δοθῇ διάμετρος κύκλου μὲ ἀριθμοὺς, ἐμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν παριφέρειάν των δι' ἑνὸς ἀπὸ τοὺς δύω λόγους· διότι, ἂν ἡ δοθεῖσα διάμετρος εἶναι 10 π. χ. λέγομεν ἢ 7 : 22 : : 10 : χ, ἢ 113 : 355 : : 10 : χ· καὶ μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην περιφέρειαν.

§. 183. Ἐὰν τὸ μῆκος κυκλικοῦ τόξου α, τὸ ὁποῖον περιέχει μοίρας μ, σημαίνεται μὲ τὸ Τ, καὶ ὅλη ἡ περιφέρεια αγεα (Σχ. 73) μὲ τὸ Π, θέλει εἶσθαι Τ : Π : : μ° : 368° καὶ ἐπομένως $T=\frac{\mu\Pi}{360^{\circ}}$. Ἀφ' οὗ λοιπὸν δοθοῦν τὸ μῆκος περιφερείας, καὶ τὸ πλῆθος τῶν μοιρῶν τόξου ἀνήκοντος εἰς τὴν δομένην περιφέρειαν, εὑρίσκεται τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ἐὰν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ πλῆθος τῶν μοιρῶν, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 360.

§. 184. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας (§. 183.) ἐκβαίνει καὶ $\mu^{o} = \frac{360\ T}{\Pi}$. Ἀφ' οὗ λοιπὸν δοθοῦν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ τὸ μῆκος τόξου τῆς αὐτῆς, εὑρίσκεται τὸ πλῆθος τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ τόξον με 360, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας.

§. 185. Ὁ Ἀρχιμήδης εὕρηκεν, ὅτι πᾶς κύκλος εἶναι ἴσος μὲ τρίγωνον τὸ αγΘ (Σχ. 72.), τοῦ ὁποίου ὕψος μὲν εἶναι ἡ ἀκτὶς αχ, καὶ βάσις ἡ περίμετρος αβδεα = αΘ· καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμισείας βάσεως καὶ τοῦ ὕψους (§. 114.)· ἄρα ὁ κύκλος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφείας καὶ τῆς ἀκτῖνος.

§. 186. Καὶ πᾶς λοιπὸν τομεὺς αβγα (Σχ. 74.) εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τόξου καὶ τῆς ἀκτῖνος.

§. 187. Διὰ νὰ εὕρῃς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αεγα τμήματος (Σχ. 74.), εὑρὲ πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως αεγβ (§. 186.), ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου αβε, καὶ ἀφ' οὗ τὸ ἀφαιρέσῃς ἀπ' ἐκείνου, ἡ διαφορὰ θέλει σὲ δώσειν τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος.

§. 188. Ἐὰν Κ, κ σημαίνωσι δύω κύκλους, Π, π τὰς περιφερείας των, Α, α τὰς ἀκτῖνας των, Δ, δ τὰς διαμέτρους των, θέλει εἶσθαι $K = \frac{\Delta\Pi}{4} = \frac{\Pi A}{2}$, καὶ $\kappa = \frac{\pi\delta}{4} = \frac{\pi\alpha}{2}$ (§. 185)· ἐὰν λοιπὸν ἀντὶ, τοῦ λόγου 7 : 22 ληφθῇ ὁ δ' : π', θέλει εἶσθαι $\Pi = \frac{\pi'\Delta}{\delta'}$, καὶ $\pi = \frac{\pi\,\delta}{\delta'}$, ἢ $\Pi = \frac{2\pi' A}{\delta'}$ καὶ $\pi = \frac{2\pi'\alpha}{\delta'}$· καὶ ἑπομένως $K = \frac{\pi' A 2}{\delta'}$, καὶ $\kappa = \frac{\pi' A 2}{\delta'}$. ἐντεῦθεν ἐκβαίνει ἡ ἀναλογία $K : x :: \frac{\pi' A^2}{\delta'} : \frac{\pi' \alpha^2}{\delta'}$, καὶ ἑπομένως $K : x :: A^2 : \alpha^2 :: \Delta^2 : \delta^2$. Δύω λοιπὸν κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων, ἢ καὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων των τετράγωνα.

§. 189. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 1, ἄλλου, δὲ 2· ὁ δεύτερος εἶναι τοῦ πρώτου τετραπλάσιος· καὶ ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5 κτ. σημαίνουν κύκλων ἀκτῖνας, αὐτοὶ οἱ κύκλοι θέλουν ἔχειν πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἤγουν 1, 4, 9, 16, 25 κτ.

§. 190. Ἐὰν τόξον τὸ Τ κύκλου τοῦ Κ ἔχῃ τόσας μοίρας ὅσας καὶ τὸ τόξον τ κύκλου τοῦ κ, ὁ τομεὺς τοῦ πρώτου τόξου εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κύκλου Κ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ὁ τομεὺς τοῦ δευτέρου τόξου τοῦ κύκλου κ· ὥςε ἂν ὁ πρῶτος τομεὺς εἶναι π. χ., τριτημόριον τοῦ Κ, εἶναι καὶ ὁ δεύτερος τομεὺς τριτημόριον τοῦ κ. Καὶ αὐτοὶ λοιπὸν οἱ τομεῖς εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων των τετράγωνα.

§. 191. Τμήματα κυκλικὰ, τῶν ὁποίων τὰ τόξα ἔχουν ἰσαρίθμους μοίρας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χορδῶν τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὕψῶν των.