§. 82. Ἐὰν λοιπὸν ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι, εἶναι καὶ $\mu = \nu$, καὶ $\rho = \nu$· διότι εἶναι $\nu + \varphi = 2O$ (§. 81.) $= \mu + \varphi$ (§. 14)· ἄρα $\nu = \mu$· εἶναι δὲ καὶ $\mu = \rho$ (§. 17)· ἄρα καὶ $\nu = \rho$.

§. 83. Αἱ παράλληλοι λοιπὸν τέμνονται ὑπ' εὐθείας εἰς ἴσας γωνίας.

§. 84. Εὐθεῖα ἡ ΚΛ (Σχ. 25.) τέμνουσα μίαν ἀπὸ τὰς παραλλήλους, τὴν ΓΘ, προαγομένη θέλει τέμειν καὶ τὴν ἄλλην, ΑΒ· διότι εἶναι $\nu + \varphi = 2O$ (§. 81)· ἄρα $\nu + \Xi\mu\Lambda < 2O$, καὶ ἑπομένως ἡ ΑΒ θέλει κοπὴν ἀπὸ τὴν ΚΛ (§. 43).

§. 85. Δύω εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ (Σχ. 26.) τρίτης τῆς ΕΖ παράλληλοι, εἶναι καὶ αὐταὶ παράλληλοι· διότι ἐὰν ΑΒ, ΓΔ δὲν ἦσαν παράλληλοι, ἡ ΓΔ καὶ ἑπομένως ἡ ΕΖ ἐτέμνετο ἀπὸ τὴν ΑΒ· καὶ ἑπομένως ἡ ΑΒ δὲν ἦτο παράλληλος τῆς ΕΖ.

§. 86. Παραλληλόγραμμον ὀνομάζεται τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου πᾶσα πλευρὰ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ἀπεναντίον της (Σχ. 27. 28. 29. 30)· ἐὰν εἶναι μόνον δύω πλευραί του παράλληλοι, τὸ σχῆμα λέγεται τραπεζοειδὲς (Σχ. 31)· καὶ ἐὰν δὲν ἔχῃ καμμίαν παράλληλον μὲ ἄλλην, τραπέζιον (Σχ. 32).

§. 87, Ἐμπορεῖ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ διαιρεθῇ διὰ τῆς ΒΔ διαγωνίου (Σχ. 33.) εἰς δύω τρίγωνα· ὅλαι αἱ ἓξ γωνίας τῶν δύω τριγώνων συνάμα λαμβανόμεναι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τέσσαρας γωνίας τοῦ τετραπλεύρου συνάμα λαμβανομένας· λοιπὸν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς.

§. 88. Ἐὰν ΑΔ, ΒΓ εἶναι παράλληλοι ἴσαι, καὶ ἐπιζευχθοῦν τὰ ἄκρα των μὲ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ, θέλει γενῇ παραλληλόγραμμον τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ· διότι, ἐὰν ἀγάγῃς τὴν

ΒΔ, τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ θέλουν ἔχειν μίαν γωνίαν ἴσην μὲ μίαν, ἤγουν ΑΔΒ = ΔΒΓ (§. 82), καὶ δύω ἀντισίχους πλευρὰς, ΑΔ = ΒΓ, ΒΔ = ΒΔ· εἶναι λοιπὸν καὶ ΑΒΔ = ΒΔΓ (§. 49.), καὶ ΑΒ παράλληλος μὲ τὴν ΓΔ (§. 80).

§. 89. Ἐὰν εὐθείας τῆς ΑΒ (Σχ. 34.) τὰ ἀπ' ἄλλης τῆς ΓΔ δύω ἀποσήματα ΕΖ, ΘΗ εἶναι ἴσα, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι· διότι ΕΖ, ΘΗ εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ (§. 64, 80)· ἄρα καὶ ΑΒ, ΓΔ (§. 88).

§. 90. Ἐὰν δύω ἀποσήματα ΕΖ, ΗΚ εὐθείας τῆς ΛΜ ἀπ' ἄλλην τὴν ΓΔ εἶναι ἄνισα (Σχ. 35.)· αἱ εὐθεῖαι θέλουν συμπέσειν πρὸς τὰ μέρη, ὅπου εἶναι τὸ μικρότερον ἀπόσημα.

§. 91. Παράλληλοι εὐθεῖαι ἀπέχουν δι' ὅλου τοῦ μήκους των ἐπίσης ἀπ' ἀλλήλων· διότι ἐὰν μόνον δύω ἀποσήματά των ἦσαν ἄνισα, αἱ εὐθεῖαι δὲν ἦσαν παράλληλοι (§. 90)..

§. 92. Ὅλα τὰ σημεῖα Ε, Θ, Ν (Σχ. 36), τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐπίσης ἀπὸ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς εὐθεῖαν.

§. 93. Πᾶν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 37.) διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΒΔ εἰς δύω ἴσα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας· διότι ἡ γωνία ΑΔΒ = ΔΒΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΔ = ΒΔΓ, εἶναι δὲ καὶ ΑΔ = ΒΓ, καὶ ΔΒ = ΔΒ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ σκεπάζουσιν ἄλληλα (§. 12.).

§. 94. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ, καὶ αἱ κατὰ διαγώνιον γωνίαι εἶναι ἴσαι.

§. 95. Ἐὰν παραλληλογράμμου δύω πλευραὶ, γωνίαν περιέχουσαι, εἶναι ἴσαι, εἶναι ἴσαι πᾶσαι αἱ τέσσαρες· καὶ ἐὰν μία γωνία εἶναι ὀρθὴ, εἶναι καὶ πᾶσα μία ἀπὸ τὰς λοιπὰς ὀρθή.

§. 96. Τετράγωνον ὀνομάζεται τὸ ἰσόπλευρον καὶ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (Σχ. 27.)· ῥόμβος δὲ, τὸ ἰσόπλευρον καὶ πλαγιογώνιον παραλληλόγραμμον (Σχ. 29.)· ἀνισόπλευρον δὲ καὶ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ὀνομάζεται κατ᾽ ἐξοχὴν ὀρθογώνιον (Σχ. 28.)· εἰδὲ εἶναι ἀνισόπλευρον καὶ πλαγιογώνιον, ὀνομάζεται ῥομβοειδὲς (Σχ. 30.).

§. 97. **Πρόβλημα.** Γωνίας δοθείσης τῆς Α, καὶ δύω πλευρῶν, αἵτινες τὴν περιέχουν, νὰ παραπληρώσῃς τὸ παραλληλόγραμμον (Σχ. 37.).

Ἂς περιέχουν τὴν γωνίαν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΔ· μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ γράψε τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ Γ· καὶ ἀφ᾽ οὗ ἐπιζεύξῃς τὰς ΔΓ, ΒΓ, θέλει γενῆ τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Διότι, ἀφ᾽ οὗ ἀχθῇ ἡ ΒΔ, θέλουν ἔχειν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΓΒΔ ἴσας τὰς πλευρὰς πᾶσαν μίαν μὲ πᾶσαν μίαν ἀντίςιχον· θέλουν εἶσθαι δὲ ἡ μὲν γωνία ΑΒΔ = ΒΔΓ, ἡ δὲ ΑΔΒ = ΔΒΓ (§. 65)· ἄρα ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ, καὶ ΑΔ τῆς ΒΓ (§. 80).

§. 98. Ἐὰν Α εἶναι ὀρθὴ γωνία (Σχ. 27), καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ ἴσαι, τὸ σχῆμα εἶναι τετράγωνον· ἐὰν δὲ Α εἶναι μὴ ὀρθὴ, καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ ἴσαι, τὸ σχῆμα εἶναι ῥόμβος (Σχ. 29)· ὀρθογώνιον δὲ, ἐὰν ἡ Α εἶναι ὀρθὴ, καὶ αἱ πλευραί της ἄνισοι (Σχ. 28).

§. 99. Τὰ τετράγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν αἱ πλευραί των εἶναι ἴσαι· ἄνισα δὲ, ἐὰν αἱ πλευραί των εἶναι ἄνισοι.

§. 100. Τὰ ἴσα τετράγωνα ἔχουν ἴσας πλευράς· τὸ μεγαλήτερον τετράγωνον ἔχει πλευρὰν μεγαλητέραν παρὰ τὸ μικρότερον.

§. 101. Ἐὰν τριγώνου τοῦ ΑΒΔ (Σχ. 37.) μία πλευρὰ ἡ ΑΒ ληφθῇ ὡς βάσις, ὕψος αὐτοῦ λέγεται εὐθεῖα ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὴν βάσιν ἀπὸ τὴν ὑπ᾽ αὐτῆς ὑποτεινομένην γωνίαν. Ἐὰν δὲ μία ἀπὸ τὰς παρακειμένας εἰς τὴν βάσιν γωνίας εἶναι ἀμβλεῖα, πρέπει νὰ προαχθῇ ἡ βάσις, διὰ νὰ πέσῃ ἐπάνω της ἡ κάθετος· ἐὰν δὲ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ (Σχ. 37.) ληφθῇ βάσις ἡ ΑΒ, ὕψος αὐτοῦ τὸ ΔΕ εἶναι τὸ τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπεναντίον της πλευρὰν απόςημα.

§. 102. Παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα· διότι ἂς ςαθοῦν δύω τοιαῦτα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ (Σχ. 38.) εἰς μίαν κοινὴν βάσιν τὴν ΑΒ· θέλουν εὑρεθῆν λοιπὸν αἱ ἀπεναντίον των πλευραὶ ΓΔ, ΕΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (§. 92)· εἶναι δὲ καὶ ΓΔ = ΑΒ = ΕΖ (§. 94)· ἄρα ΓΔ + ΓΖ = ΕΖ + ΓΖ, ἢ ΔΖ = ΓΕ. Εἶναι δὲ καὶ ΑΔ = ΒΓ, ΑΖ = ΒΕ (§. 94). Εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΔΖ = τῷ τριγώνῳ ΒΓΕ (§. 65). Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ δύω ἀφαιρεθῇ κοινῶς τὸ τρίγωνον ΓΘΖ, θέλει μείνειν τὸ τετράπλευρον ΑΔΓΘ = ΒΘΖΕ· καὶ ἐὰν εἰς καθὲν ἀπ' αὐτὰ προσθεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΘ, θέλει γενῆν ΑΒΓΔ = ΑΒΕΖ.

§. 103. Τρίγωνα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΔ, ΑΒΖ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ἱςάμενα, εἶναι ἴσα· διότι μὲ τὴν γωνίαν ΒΑΔ καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ ἐμπορεῖ νὰ παραπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, καὶ μὲ τὴν γωνίαν ΒΑΖ καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΖ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΖ (§. 97)· ἀλλὰ τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα εἶναι ἴσα (§. 102)· ἄρα καὶ τὰ τούτων ἡμίση, τὰ τρίγωνα (§. 93).

§. 104. Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τριγώνου τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος.

§. 105. Δύω ἢ πλειότερα ἰσοϋψῆ τρίγωνα συνάμα λαμβανόμενα εἶναι ἴσα μὲ ἓν τρίγωνον ἰσοϋψὲς, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ἐκείνων.

§. 106. Τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μία ὀργυιὰ, ἢ ἕνας ποῦς, ἢ ἕνας δάκτυλος, ὀνομάζεται τετραγωνικὴ ὀργυιὰ, ἢ τετραγωνικὸς ποῦς, ἢ τετραγωνικὸς δάκτυλος· εἶναι δὲ ταῦτα μέτρα, διὰ τῶν ὁποίων μετροῦνται αἱ ἐπιφάνειαι.

§. 107. Ἐὰν ὀρθογωνίου ὑποθέσωμεν τὴν μὲν βάσιν ΑΒ (Σχ. 39.) 6 ὀργυιὰς, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ ὀργυιὰς 5· καὶ διὰ μὲν τῶν σημείων τῶν μερῶν τῆς βάσεως ἀγάγωμεν παραλλήλους μὲ τὸ ὕψος, διὰ δὲ τῶν σημείων τῶν μερῶν τοῦ ὕψους παραλλήλους μὲ τὴν βάσιν, θέλει περιέχειν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ τετραγωνικὰς ὀργυιὰς $6 \times 5 = 30$, τὰς ὁποίας εὐκόλως ἐμποροῦμεν ν' ἀριθμήσωμεν εἰς τὸ σχῆμα.

§. 108. Ἐὰν ὀνομάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον Ο, καὶ τὴν βάσιν του β, καὶ τὸ ὕψος του υ, θέλει εἶσθαι $Ο = βυ$, ἤγουν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του.

§. 109. Ἐὰν τὸ Τ σημαίνη τετράγωνον (Σχ. 40), καὶ μίαν του πλευρὰν τὸ Π, θέλει εἶσθαι $Τ = π \times π$ (§. 108), ἢ συντομώτερα $Τ = π^2$ · ἤγουν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς πλευρᾶς του πολλαπλασιαζομένης ἐφ' ἑαυτήν· ἐὰν εἶναι $Π = 30$, θέλει εἶσθαι $Τ = 30 \times 30 = 900$ τετραγωνικὰς ὀργυιάς.

§. 110. Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου (Σχ. 41.) μία κάθετος κ εἶναι $= 3$ ὀργυιὰς, ἡ δὲ ἄλλη $Κ = 4$, καὶ μετρηθῇ ἡ ὑποτείνουσα, θέλει εὑρεθῆν 5 ὀργυιάς· καὶ ἐπειδὴ $3^2 = 9$, καὶ $4^2 = 16$, καὶ $5^2 = 25$ · ἄρα $5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, καὶ, ἐὰν βάλωμεν τὰ γράμματα Υ, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὑποτείνουσαν, καὶ Κ, κ, τὰ ὁποῖα σημαίνουν καθέτους, θέλει εἶσθαι $Υ^2 = Κ^2 + κ^2$, ἤγουν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἴσον μὲ τὰ δύω τετράγωνα τῶν καθέτων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

§. 111. Ἐπειδὴ εἶναι $\Upsilon^2 = K^2 + \varkappa^2$ (110)· ἄρα $\Upsilon = \sqrt{K^2 + \varkappa^2}$, ἤγουν εὑρίσκομεν τὴν ὑποτείνουσαν, ἐὰν ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων ἐκβάλωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν· ἐὰν π. χ. εἶναι $K = 6$, καὶ $\varkappa = 8$, θέλει εἶσθαι $K^2 + \varkappa^2 = 36 + 64$, καὶ $\sqrt{K^2 + \varkappa^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$· ἄρα $\Upsilon = \sqrt{100} = 10$.

§. 112. Ἐπειδὴ ἡ μὲν ὀργυιὰ περιέχει ἓξ πόδας· ὁ δὲ ποῦς 12 δακτύλους· ὁ δὲ δάκτυλος, 12 γραμμάς· διὰ τοῦτο μία τετραγωνικὴ ὀργυιὰ περιέχει τετραγωνικοὺς πόδας $6 \times 6 = 36$· εἷς δὲ τετραγωνικὸς ποῦς, δακτύλους $12 \times 12 = 144$· εἷς δὲ τετραγωνικὸς δάκτυλος, γραμμὰς τετραγωνικὰς $12 \times 12 = 144$.

§. 113. Ἐπειδὴ πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσον μὲ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (§. 102.), διὰ τοῦτο, ἐὰν π σημάνῃ παραλληλόγραμμον, καὶ β βάσιν, καὶ υ ὕψος, εἶναι $\pi = \beta\upsilon$ (108.), ἤγουν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του.

§. 114. Ἐπειδὴ πᾶν τρίγωνον ἐμπορεῖ νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐὰν Δ μὲν ὀνομασθῇ τὸ τρίγωνον· β δὲ ἡ βάσις, υ δὲ τὸ ὕψος του, θέλει εἶσθαι $\Delta = \upsilon \times \frac{\beta}{2} = \upsilon\,\frac{\beta}{2} = \frac{\upsilon\beta}{2} = \beta\frac{\upsilon}{2}$, ἤγουν, Πὰν τρίγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του, ἢ ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμισείας βάσεως, καὶ τοῦ ὕψους του, ἢ ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος ὕψους καὶ τῆς βάσεώς του· διότι καὶ αἱ τρεῖς ἐκφράσεις ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν.

§. 115. Ἐὰν διαιρέσῃς τὸ τραπεζοειδὲς ΑΗ ΓΕ (Σχ. 42.) διὰ τῆς διαγωνίου ΓΗ εἰς δύο τρίγωνα, $ΑΓΗ = \delta$, καὶ $ΗΒΕ = \Delta$, καὶ ἀπὸ Η, Γ ἀγάγῃς ἐπὶ τῶν παραλλήλων πλευρῶν $AH = \beta$, καὶ $\Gamma E = B$ τὰς καθέτους HZ, ΓI, θέλουν εἶσθαι HZ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου Δ, καὶ ΓI τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου δ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μεταξὺ δύω παραλλήλων κάθετοι εἶναι ἴσαι, εἶναι καὶ $HZ = \Gamma I$. Τῶν τριγώνον λοιπὸν δ, Δ τὰ ὕψη εἶναι ἴσα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν μὲ ἓν γράμμα υ· ἄρα εἶναι $\delta = \beta\frac{\upsilon}{2}$ καὶ $\Delta = B\frac{\upsilon}{2}$ (§. 114.)· καὶ ἐπομένως τὸ τραπεζοειδὲς $Z = \delta + \Delta = \frac{\beta\upsilon + B\upsilon}{2} = \left(\frac{\beta + B}{2}\right) \times \upsilon$, ἤγουν Πᾶν τραπεζοειδὲς εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ὕψους του καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν παραλλήλων πλευρῶν του.

§. 116. Ἐὰν Τραπεζίου τοῦ $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 43.) ἡ διαγώνιος ΔB ἐκληφθῇ ὡς βάσις τῶν τριγώνων $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$, καὶ ἀχθοῦν εἰς αὐτὴν τὰ ὕψη Ao, $\Gamma\epsilon$, καὶ ὑποτεθῇ $\Delta B = \beta$, $Ao = \upsilon$, $\Gamma\epsilon = \Upsilon$, θέλει εἶσθαι τὸ τρίγωνον $AB\Delta = \beta\frac{\upsilon}{2}$ (§. 114.), καὶ τὸ τρίγωνον $B\Gamma\Delta = \beta\frac{\Upsilon}{2}$, καὶ ἐπομένως τὸ τραπέζιον $AB\Gamma\Delta = \frac{\beta\Upsilon + \beta\upsilon}{2} = \beta\frac{\Upsilon + \upsilon}{2}$· ἤγουν πᾶν τραπέζιον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ γινόμενον ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου του, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται διὰ τῆς διαγωνίου.

§. 117. Ἐὰν ἐννοήσῃς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν (Σχ. 44.) διῃρημένην εἰς ὁσαδήποτε ἴσα τόξα AB, $B\Gamma$, ΓE κτλ., καὶ ἐπιζεύξῃς τὰς χορδάς των AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ κτ., καὶ ἀγάγῃς τὰς ἀκτῖνας OA, OB, $O\Gamma$ κτλ., θέλεις συςήσειν τόσα ἰσάλληλα τρίγωνα, εἰς ὅσα ἴσα μέρη ἐδιαίρεσας τὴν περιφέρειαν. Τὸ δὲ οὕτως ἐγγραφόμενον σχῆμα $AB\Gamma\Delta EZA$ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

§. 118. Σχῆμα ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον ὀνομάζεται Κανονικόν· τοιοῦτον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ τὸ τετράγωνον· ἐὰν δὲ ἔχῃ πλειοτέρας πλευράς, ὀνομάζεται **Κανονικὸν Πολύγωνον**· τὸ δὲ μὴ τοιοῦτον, λέγεται **Α᾿κανόνιςον**· ἰδιαίτερα δὲ ὀνομάζεται πεντάγωνον, ἑξάγωνον, ἑπτάγωνον κτλ, ἐὰν ἔχῃ πλευρὰς 5, 6, 7 κτλ.

§. 119. Ἐπειδὴ τὸ κανονικὸν πολύγωνον σύγκειται ἀπὸ τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραί του (§. 117.), ϗ τὸ τρίγωνον εἶναι $= \beta\frac{\upsilon}{2}$, ἐὰν λάβωμεν τὰς βάσεις τῶν τριγώνων ὅλων, ἤγουν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου, καὶ τὴν πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸ ἥμισυ ὕψος ἑνὸς τριγώνου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν τὸ κανονικὸν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς περιμέτρου, καὶ τοῦ ἡμίσεος ὕψους ἑνὸς τῶν τριγώνων του· ἢ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ τοῦ ὕψους τούτου· ἢ μὲ τὸ ἥμισυ γινόμενον ὑπὸ τῆς περιμέτρου καὶ τούτου τοῦ ὕψους· ὅλαι αὗται αἱ ἐκφράσως ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν, ὡς εἶναι φανερόν.

§. 120. Πᾶν ἀκανόνιςον σχῆμα ἐμπορεῖς νὰ διαιρέσῃς εἰς παραλληλόγραμμα ἢ τραπεζοειδῆ, ἢ μέρος μὲν εἰς τὰ εἰρημένα σχήματα, μέρος δὲ εἰς τρίγωνα, ἢ μόνον εἰς τρίγωνα (Σχ. 45, 46, 47.)· τὸ τελευταῖον ἐμπορεῖ νὰ γείνῃ κατὰ διαφόρους τρόπους· διότι ἢ ἐμποροῦν ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς τοῦ σχήματος νὰ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς ὅλας τὰς γωνίας (Σχ. 45), ἢ ἀπὸ μίαν ἢ πλειοτέρας γωνίας (Σχ. 46, 47.) εἰς τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ σχήματος. Ἐὰν δὲ ταῦτα μετρηθῶσι καθὲν μὲ τοὺς ἕως τοῦδε εἰρημένους κανόνας, τὸ κεφάλαιόν των παριςάνει ἀναμφιβόλως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀκανονίςου πολυγώνου.

§. 121. **Πρόβλημα.** Διὰ τριῶν δεδομένων σημείων **Α, Β, Δ**, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, νὰ γράψῃς κύκλον (Σχ. 48).

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΔ θέλουν εἶσθαι χορδαὶ τοῦ κύκλου· Κόψε λοιπὸν τὴν πρώτην διὰ τῆς καθέτου ΕΖ, καὶ τὴν δευτέραν διὰ τῆς ΘΗ· αἱ δύω κάθετοι θέλουν συμπέσειν εἰς τὸ κέντρον (§. 59)· καὶ ἐὰν συμπέσουν εἰς τὸ Κ, τὸ Κ θέλει εἶσθαι κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου.

Διότι ἀφ' οὗ ἀγάγῃς τὰς ΚΑ, ΚΒ, ΚΔ, θέλει εἶσθαι ΚΑ = ΚΒ, καὶ ΚΔ = ΚΒ (§. 49). Κύκλος λοιπὸν γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ, θέλει περάσειν καὶ διὰ τῶν σημείων Β, Δ.

§. 122. Γωνία ΑΚΒ (Σχ. 49. 50.) ἡ εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι διπλασία γωνίας τῆς ΑΒΔ τῆς εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν καὶ αἱ δύω πατῶσιν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον· διότι ἐὰν μία πλευρὰ τῆς εἰς τὴν περιφέρειαν γωνίας, ἡ ΑΔ, εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου, θέλει εἶσθαι ἡ γωνία ΑΚΒ = 2ΑΔΒ· εἰ δὲ μὴ, ἀς ἀχθῇ διὰ τοῦ Δ καὶ τοῦ Κ κέντρου διάμετρος ἡ ΔΕ· καὶ θέλει εἶσθαι ΑΚΕ = 2ΑΔΕ, καὶ ΒΚΕ = 2ΒΔΕ· ἐκ τούτων ἕπεται α'. ΑΚΕ + ΒΚΕ = 2 (ΑΔΕ + ΒΔΕ), ἢ ΑΚΒ = 2ΑΔΒ, τὸ ὁποῖον παριςάνεται εἰς τὸ 50 σχῆμα· β' ΑΚΕ + ΒΚΕ = 2 (ΑΔΕ — ΒΔΕ), ἢ (Σχ. 51.) ΑΚΒ = 2ΑΔΒ.

§. 123. Πᾶσαι αἱ γωνίαι αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων πατοῦσαι καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν τελευτῶσαι εἶναι ἴσαι.

§. 124. Πᾶσα εἰς τὴν περιφέρειαν γωνία εἶναι ἴση τῆς εἰς τὸ κέντρον, ἐὰν ἐκείνη πατῇ εἰς τόξον διπλάσιον παρὰ ταύτην. Καὶ γωνία πατοῦσα εἰς τὴν διάμετρον, εἶναι ὀρθή.

§. 125. Ἀπτομένη τοῦ κύκλου ὀνομάζεται εὐθεῖα, ἥτις ἔχει ἓν σημεῖον κοινὸν μὲ τὴν περιφέρειαν, καὶ προαγομένη καὶ εἰς τὰ δύω μέρη πίπτει ὅλη ἐκτὸς αὐτῆς· ἐὰν σχήματος αἱ πλευραὶ πᾶσαι εἶναι ἀπτόμεναι τοῦ κύκλου, τὸ σχῆμα λέγεται περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

§. 126. Εὐθεῖα ἡ ΔΕ (Σχ. 52.) κάθετος ἱςαμένη εἰς τὸ ἄκρον Α ἀκτῖνος τῆς ΚΑ, εἶναι ἀπτομένη τοῦ κύκλου· διότι τὸ παντὸς σημείου Ε ταύτης τῆς γραμμῆς ἀπόςημα ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι πάντοτε μεγαλήτερον παρὰ τὴν ἀκτῖνα, ἐὰν ἐξαιρεθῇ μόνον τὸ Α. Καὶ ἐξ ἐναντίας, ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἅπτεται τὸν κύκλον κατὰ τὸ Α, ἡ ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς Α ἀκτὶς ςέκει κάθετος εἰς τὴν ἀπτομένην, ἐπειδὴ εἶναι ἡ ἐλαχίςη εὐθεῖα ἀπὸ τὰς, ὅσαι δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὴν ΔΕ.

§. 127. Διὰ σημείου Α τῆς περιφερείας ἐμπορεῖς νὰ ἄξῃς ἀπτομένην τοῦ κύκλου, ἐὰν ςήσῃς κάθετον τὴν ΔΕ εἰς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ κατὰ τὸ σημεῖον Α. Ἀλλ' ἐὰν δοθῇ ἐκτὸς τῆς περιφερείας σημεῖον τὸ Δ, ἐπίζευξον αὐτὸ καὶ τὸ Κ κέντρον μὲ τὴν εὐθεῖαν ΚΔ, καὶ διχοτόμησέ την κατὰ τὸ Η, καὶ μὲ κέντρον τὸ Η καὶ ἀκτῖνα τὴν ΗΔ γράψε κύκλον, ὅς τις τέμνει τὸν δοθέντα κύκλον κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β· καὶ ἐκ τῶν σημείων Α, Β ἄγαγε εὐθείας τὰς ΑΔ, ΒΔ, αἵτινες καὶ αἱ δύω ἅπτονται τὸν κύκλον (§. 126).

§. 128. Ἐὰν δύω κύκλου ἀπτόμεναι ΑΕ, ΒΖ (Σχ. 52.) τέμνωνται ὑπ' ἀλλήλων κατὰ τὸ Δ, εἶναι $ΑΔ = ΒΔ$· διχοτομοῦνται δὲ ἀπὸ τὴν ΚΔ αἱ γωνίαι ΑΔΒ, ΑΚΒ, καὶ τὸ τόξον ΑΘΒ. Διότι τὰ κατὰ τὰ Α, Β ὀρθογώνια τρίγωνα (§. 127.) ἔχουν ἴσας πλευρὰς, $ΑΚ = ΒΚ$, καὶ $ΚΔ = ΚΔ$· ἄρα εἶναι $ΑΔ = ΒΔ$, $ΑΚΔ = ΒΚΔ$, $ΑΔΚ = ΒΔΚ$ (§. 74)· ἄρα καὶ τὸ τόξον $ΑΘ = ΒΘ$ (§. 52).

§. 129. Ἐὰν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τμηθῇ εἰς ἴσα τόξα κατὰ τὰ σημεῖα (Σχ. 53.) Π, Ξ, Ρ, Σ, Τ, Υ, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθῶσιν ἀπτόμεναι τοῦ κύκλου, αὗται θέλουν περικλείσειν κανονικὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

Διότι πᾶσαι αἱ εἰς τὰ Α, Β, Δ κτλ. γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ εἰς τὰ τετράπλευρα ΑΥΚΠ, ΒΠΚΞ, ΞΚΡΔ κτλ. αἱ γωνίαι Υ, Π, Ξ, Ρ κτλ. εἶναι ὀρθαὶ, καὶ αἱ κατὰ τὸ Κ γωνίαι εἶναι καὶ αὐταὶ ἴσαι. Παρεκτὸς δὲ τούτων εἶναι ἡ γωνία $ΑΚΠ = ΠΚΥ$, $ΒΚΠ = \frac{ΠΚΞ}{2}$ (§. 128.), καὶ $ΠΚΥ =$

ΠΚΞ· ἄρα ΑΚΠ = ΒΚΠ. Εἶναι δὲ ὀρθαὶ καὶ αἱ κατὰ τὸ Π γωνίαι (§. 126), καὶ ΚΠ = ΚΠ, καὶ ἑπομένως ΑΠ = ΒΠ, καὶ ΒΠ = $\frac{1}{2}$ ΑΒ. Ὡσαύτως εἶναι φανερὸν, ὅτι ΒΞ = $\frac{1}{2}$ ΒΔ, καὶ ΒΠ = ΒΞ (§. 128)· ἄρα καὶ ΑΒ = ΒΔ· ἄρα διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΒΔ = ΔΕ = ΕΖ, κτλ.

§. 130. Κύκλος μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γραφόμενος διαβαίνει δὶ ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Κύκλος δὲ γραφόμενος μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΠ διαβαίνει δὶ ὅλων τῶν σημείων τῆς ἀφῆς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

§. 131. Πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου εἶναι > ΚΠ, καὶ < ΚΑ.

§. 132. Σημεῖον τὸ Κ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐπίσης ἀπὸ πᾶσαν γωνίαν καὶ ἀπὸ πᾶσαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, ἐμπορεῖ νὰ ὀνομάζεται κέντρον τοῦ πολυγώνου, καὶ ΚΑ μεγαλητέρα, ΚΠ δὲ μικροτέρα ἀκτὶς τοῦ πολυγώνου· καὶ πᾶσα μὲν γωνία περιεχομένη ὑπὸ δύω μεγαλητέρων ἀκτίνων, ἡ ΑΚΒ, ὀνομάζεται γωνία τοῦ κέντρου, πᾶσα δὲ ἄλλη ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας ἡ ΘΑΒ, γωνία τοῦ πολυγώνου.

§. 133. Ἐὰν αἱ 360° τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου διαιρεθοῦν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ πηλίκον φανερόνει τὴν τοῦ κέντρου γωνίαν· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τοῦ κέντρου γωνιῶν εἶναι 360°, ἤγουν τέσσαρες ὀρθαὶ, παντὸς δὲ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ δύω ὀρθὰς, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων, ἢ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου διπλασιασθῇ, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ὁ 4, τὸ κατάλοιπον θέλει φανερόνειν μὲ πόσας ὀρθὰς εἶναι ἴσαι αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου· π. χ. τοῦ ἑξαγώνου αἱ 6 εἶναι $= 2 \times 6 = 12 - 4 = 8$· καὶ πᾶσα μία του γωνία $= \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$ ὀρθῆς.

§. 134. Ἐὰν Π, π σημαίνουν παραλληλόγραμμα, Β, β τὰς βάσεις των, Υ, υ τὰ ὕψη τους· εἶναι Π = ΒΥ, καὶ

$\pi = \beta\upsilon$ (§. 116). Καὶ ἐπομένως $\Pi : \pi :: B\Upsilon : \beta\upsilon$, ἤγουν τὰ παραλληλόγραμμα εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν των.

§. 135. Ἐὰν εἶναι $\Pi = \pi$, θέλει εἶσθαι καὶ $B\Upsilon = \beta\upsilon$ (§. 134)· ἄρα $B : \beta :: \upsilon : \Upsilon$. Αἱ βάσεις λοιπὸν δύω ἴσων παραλληλογράμμων ἔχουν λόγον ἀντίςροφον τοῦ τῶν ὑψῶν· καὶ παραλληλόγραμμα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφιλοχωρεῖ τοιαύτη ἀναλογία, εἶναι ἴσα.

§. 136. Ἐὰν εἶναι $B = \beta$, θέλει εἶσθαι $\Pi : \pi :: \Upsilon : \upsilon$ (§. 134). Παραλληλόγραμμα λοιπὸν μὲ ἴσας βάσεις ἔχουν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν τὰ ὕψη των. Καὶ ἂν εἶναι $\Upsilon = \upsilon$, θέλει εἶσθαι $\Pi : \pi :: B : \beta$, ἤγουν τὰ ἰσοϋψῆ παραλληλόγραμμα εἶναι ὡς αἱ βάσεις των.

§. 137. Ἐὰν σημαίνωσι B, β τὰς βάσεις, καὶ Υ, υ τὰ ὕψη δύω τριγώνων Δ, δ, ἐπειδὴ εἶναι $\Delta = \frac{B\Upsilon}{2}$, καὶ $\delta = \frac{\beta\upsilon}{2}$ (§. 114.), ἄρα $\Delta : \delta :: \frac{B\Upsilon}{2} :: \frac{\beta\upsilon}{2} :: B\Upsilon : \beta\upsilon$· δύω λοιπὸν τρίγωνα πρὸς ἄλληλα εἶναι, ὡς τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν των. Καὶ τὰ εἰρημένα περὶ τῶν παραλληλογράμμων ἐμποροῦν νὰ ἐφαρμοσθῶσι καὶ εἰς τὰ τρίγωνα (§. 135, 136).

§. 138. Ὅμοια τρίγωνα λέγονται τὰ δ, Δ (Σχ. 54), ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας πᾶσαν μίαν μὲ πᾶσαν μίαν, ἤγουν $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = \Gamma$· αἱ πλευραὶ, αἱ ὁποῖαι ὑποτείνουν τὰς ἴσας γωνίας λέγονται ἀντίςιχοι, ἤγουν ἡ $\alpha\beta$ εἶναι ἀντίςιχος τῆς AB, καὶ ἡ $\beta\gamma$ τῆς $B\Gamma$, καὶ ἡ ΓA τῆς $\gamma\alpha$.

§. 139. Τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ ἀντίςιχοι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, ἤγουν εἶναι $\alpha\beta : AB :: \beta\gamma : B\Gamma$, καὶ $\alpha\beta : AB :: A\Gamma : \alpha\gamma$, καὶ $A\Gamma : \alpha\gamma :: \Gamma B : \gamma\beta$· διότι ἂν διαιρεθοῦν εἰς ἴσα μέρη αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων δ, Δ, θέλομεν ἰδεῖν τὰ μέρη τῆς αβ: τὰ μέρη τῆς ΑΒ :: τὰ μέρη τῆς βγ: ΒΓ κτλ.

§. 140. Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ ΑΕΖ (Σχ. 55.), ἐὰν ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΒΓ μὲ μίαν πλευράν του τὴν ΕΖ, θέλουν συςαθῆν δύω ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΖ· ἄρα ΑΒ: ΑΕ:: ΑΓ: ΑΖ, καὶ ΑΒ: ΑΓ:: ΑΕ: ΑΖ.

§. 141. Ἐὰν εἶναι ΑΒ: ΑΕ:: ΑΓ: ΑΖ, καὶ ἐπομένως ΑΒ: ΒΕ:: ΑΓ: ΓΖ, ἡ ΒΓ θέλει εἶσθαι παράλληλος τῆς ΕΖ· διότι, ἂν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ παράλληλός της ἡ Βμ· ἄρα ΑΒ: ΑΕ:: Αμ: ΑΖ (§. 140)· ἀλλ᾽ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΑΒ: ΑΕ :: ΑΓ: ΑΖ· ἄρα Αμ: ΑΖ:: ΑΓ: ΑΖ· ἄρα Αμ = ΑΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· ἄρα, ἐὰν εἶναι ΑΒ: ΑΕ:: ΑΓ: ΑΖ, ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΖ.

§. 142. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ (Σχ. 56) κεῖνται μεταξὺ δύω παραλλήλων ΑΓ, ΒΔ, καὶ τέμνωνται ἀπὸ εὐθεῖαν τὴν ΕΖ, ἥτις καὶ αὐτὴ εἶναι παράλληλος μὲ τὰς ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἀχθῇ ἡ ΑΔ, θέλει εἶσθαι ΑΕ: ΕΒ:: ΑΘ: ΘΔ:: ΓΖ: ΖΔ, δηλονότι εἶναι ἀνάλογα τὰ μέρη τῶν μὲ τὰς παραλλήλους τμηθεισῶν εὐθειῶν· καὶ ἐὰν δύω εὐθεῖαι τμηθῶσι δι᾽ ἄλλων εὐθειῶν οὕτως, ὥςε τὰ μέρη νὰ εἶναι ἀνάλογα, αἱ τέμνουσαι εἶναι παράλληλοι.

§. 143. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τμηθῶσι δι᾽ ὁσωνδήποτε παραλλήλων ΑΓ, ΕΖ, ΗΙ κτ., θέλει εἶσθαι ΑΕ: ΕΗ:: ΑΘ: ΘΛ:: ΓΖ: ΖΙ, καὶ ΕΗ: ΗΒ:: ΘΛ: ΛΔ:: ΖΙ: ΙΔ κτλ.

§. 144. Ἂς εἶναι ὁποιοιδήποτε λόγοι Π: Ξ, Ξ: Ρ, καὶ εὐθεῖα δεδομένη ἡ ΑΒ (Σχ. 57)· ἐὰν ἀχθῇ ἐκ τοῦ πέρατος αὐτῆς Α ὑπὸ ὁποιανδήποτε γωνίαν ἡ εὐθεῖα Αχ, καὶ ληφθῇ ΑΓ = Π, ΓΔ = Ξ, ΔΕ = Ρ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΒ, καὶ διὰ τῶν Γ, Δ παράλληλοι αἱ ΓΖ, ΔΘ μὲ τὴν ΕΒ· ἡ ὁσθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ θέλει τμηθῆν εἰς τὰ Ζ, Θ κατὰ τοὺς δοθέντας λόγους Π : Ξ καὶ Ξ : Ρ..

§. 145. Ἐὰν εἶναι Π=Ξ=Ρ, καὶ ληφθῇ ὡς πρότερον ΑΕ=Π, ΕΗ=Ξ, ΗΒ=Ρ (Σχ. 58.), καὶ ἀχθῶσιν ΕΖ, ΗΙ παράλληλοι τῆς ΒΔ, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΔ θέλει τμηθῆν εὖ ἴσα μέρη κατὰ τὰ Ζ, Ι. Ἐὰν λοιπὸν τριγώνου τοῦ ΑΒΔ πλευρὰ ἡ ΑΒ τμηθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἢ κατὰ δεδομένους λόγους, καὶ ἀχθῶσι διὰ τῶν κατατομῶν Ε, Η παράλληλοι μὲ τὴν πλευρὰν ΒΔ, ἡ πλευρὰ ΑΔ θέλει τμηθῆν εἰς ἴσα μέρη, ἢ κατὰ τοὺς δεδομένους λόγους.

§. 146. Ἐὰν λοιπὸν εὐθεῖα ἡ ΑΔ ζητῆται νὰ τμηθῇ εἰς ἀριθμόν τινα μερῶν ἴσων, εἰς 3 π. χ. ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖα ἡ ΑΒ ὑπὸ τυχοῦσαν γωνίαν τὴν ΒΑΔ, καὶ ἄς ληφθοῦν ἀπ' αὐτὴν διὰ τοῦ διαβήτου τρία ἰσάλληλα μέρη ΑΕ=ΕΗ=ΗΒ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΔ καὶ διὰ τῶν κατατομῶν Ε, Η ἄς ἀχθοῦν παράλληλοι μὲ τὴν ΒΔ αἱ ΗΙ, ΕΖ· ἡ δοθεῖσα λοιπὸν εὐθεῖα ΑΔ θέλει τμηθῆν εἰς τρία ἴσα μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Ζ, Ι.

§. 147. Ἐὰν ζητῆται νὰ τμηθῇ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 57.) εἰς ἄνισα μέρη κατὰ δεδομένους λόγους Π : Ξ, καὶ Ξ : Ρ, ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖα τυχοῦσα ἡ ΑΧ ὑπὸ τυχοῦσαν γωνίαν τὴν ΒΑΧ, καὶ ἄς ληφθῇ ΑΓ=Π, ΓΔ=Ξ, ΔΕ=Ρ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΕΒ, καὶ διὰ τῶν Γ, Δ αἱ παράλληλοι ΓΖ, ΔΘ μὲ τὴν ΕΒ· ἡ δοθεῖσα λοιπὸν εὐθεῖα ΑΒ θέλει τμηθῆν εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Θ κατὰ τοὺς δεδομένους λόγους.

§. 148. Ἐὰν, ἀφ' οὗ δοθῶσι τρεῖς εὐθείας α, β, γ, θέλῃς νὰ εὕρῃς τετάρτην ἀνάλογον, σύστησε γωνίαν τυχοῦσαν τὴν ΧΑυ (Σχ. 59)· καὶ λάβε ΑΒ=α, καὶ ΑΔ=β, καὶ ΑΓ=γ, καὶ ἐπίζευξε τὴν ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἄγαγε παράλληλον τὴν ΔΕ μὲ τὴν ΒΓ· ἡ δὲ ΑΕ θέλει εἶσθαι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος.

§. 149. Ἐὰν ἀγάγῃς ἐπὶ τῆς γδ (Σχ. 60.) καθέτους τὰς αγ, βδ ἰσαλλήλους, καὶ τέμῃς, τὴν βδ εἰς 6 ἴσα μέρη, καὶ διὰ τῶν κατατομῶν ἀγάγῃς παραλλήλους μὲ τὴν αβ, καὶ τὴν διαγώνιον βγ, θέλουν γενῆν τρίγωνα τὰ β11, β22, β33 κτλ. ὅμοια καὶ ἀλλήλων καὶ τοῦ τριγώνου γβδ. Εἶναι δὲ β1 ἓν ἑκτημόριον, β2 δύω ἑκτημόρια, β3 τρία ἑκτημόρια κτλ. τῆς βδ· ἄρα καὶ 11 εἶναι ἓν ἑκτημόριον, 22 δύω ἑκτημόρια, 33 τρία ἑκτημόρια τῆς γδ. Διὰ τοῦτο ἐὰν γδ σημαίνῃ ὀργυιὰν, 11 θέλει σημαίνειν ἕνα πόδα, 22 δύω πόδας, 33 τρεῖς πόδας κτλ.

Ἐὰν δὲ τέμῃς τὴν βδ (Σχ. 61.) εἰς 10 ἴσα μέρη, καὶ κάμῃς ὅλα τὰ ἤδη εἰρημένα, θέλουν εἶσθαι β1, β2, β3 κτλ. ἓν δεκατημόριον, δύω, τρία κτλ. τῆς βδ. Καὶ ἐὰν ἡ γδ σημαίνῃ 10 ὀργυιὰς, τὰ 11, 22, 33 θέλουν σημαίνειν μίαν ὀργυιὰν, δύω, τρεῖς κτλ.

Ἐὰν εὐθεῖαν τυχοῦσαν τὴν αβ (Σχ. 62 μ, 62 ν) διαιρέσῃς εἰς πολλὰ μέρη ἴσα, καὶ ἐπάνω της ςήσῃς καθέτους τὰς αγ, βδ, καὶ ἐκλάβῃς ὀργυιὰν ἓν ἀπὸ τὰ μέρη ταῦτα, καὶ διαιρέσῃς τὴν αγ εἰς 6 ἴσα μέρη· ἢ ἐὰν ἐκλάβῃς ἓν ἀπὸ τὰ τοιαῦτα μέρη ὀργυιὰν (Σχ. 62 ν)· καὶ διορίσῃς ἀπὸ τοῦ α πρὸς τὸ γ μέρη ἴσα 10, καὶ τελευταῖον ἐπιζεύξῃς τὴν Ογ, θέλεις κατασκευάσειν τὴν ὀνομαζομένην κλίμακα· ἥτις φανερόνει ὀργυιὰς καὶ πόδας (Σχ. 62 μ), καὶ ὀργυιὰς (Σχ. 62 ν).

§. 150. Ἐὰν εὐθεῖα ἐπὶ χάρτου γραμμένη περιέχῃ τόσας ὀργυιὰς καὶ πόδας ἐκ τῆς κλίμακος, ὅσους καὶ μετρημένη ἐπὶ τῆς γῆς γραμμὴ, αἱ δύω γραμμαὶ λέγονται σύμμετροι.

§. 151. Ἐὰν τριγώνου τοῦ αβγ (Σχ. 63) πλευρὰ ἡ αγ εἶναι σύμμετρος μὲ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ πλευρὰν τὴν ΑΓ, καὶ α = Α, καὶ γ = Γ, θέλει εἶσθαι καὶ β = Β, καὶ τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν εἶσθαι ὅμοια· θέλει εἶσθαι δὲ καὶ βγ σύμμετρος μὲ τὴν ΒΓ, καὶ βα μὲ τὴν ΒΑ. Ἐὰν λοιπὸν δύω τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν μὲ μίαν πλευρὰν σύμμετρον, καὶ γωνίας τὰς προσκειμένας ἴσας, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀντίςιχοι πλευραί των νἶναι σύμμετροι. Λέγονται δὲ καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα σύμμετρα ἀλλήλων.

§. 152. Ἐὰν δύω ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΓ, αβγ (Σχ. 64.) εἶναι σύμμετροι αἱ ὑποτείνουσαι ΒΓ, βγ, καὶ Β =β, θέλουν εἶσθαι σύμμετροι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ, καὶ τὰ τρίγωνα σύμμετρα.

§. 153. Ἐὰν ἀχθῶσι κάθετοι εἰς τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, αβγ (Σχ. 65.) τὰς ἀντιςίχους πλευρὰς ΑΓ, αγ αἱ ΒΘ, βθ, θέλει εἶσθαι ΒΘ : βθ : : ΑΘ : αθ : : ΘΓ : θγ· ἄρα καὶ ΒΘ : βθ : : ΑΘ+ΘΓ : αθ+θγ : : ΑΓ : αγ. Διὰ τοῦτο τῶν ὁμοίων τριγώνων τὰ ὕψη εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις.

§. 154. Ἐὰν δύω ἀντιςίχους πλευρὰς ΑΓ, αγ ἐκλάβωμεν ὡς βάσεις δύω συμμέτρων τριγώνων ΑΒΓ, αβγ, τὰ ὕψητων ΒΘ, βθ θέλουν εἶσθαι σύμμετρα, καὶ τὸ τρίγωνον αθβ σύμμετρον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΘΒ, τὸ δὲ θβγ μὲ τὸ ΘΒΓ· καὶ ὅσα τετραγωνικὰ μέρη περιέχει τὸ ἓν ἐκ τῆς κλίμακος, τόσα καὶ τὸ ἄλλο ἀληθινὰ ἐπὶ τῆς γῆς, ἐὰν εἶναι γραμμένον εἰς τὴν γῆν.

§. 155. Ἐὰν εἶναι βα : ΒΑ : : βδ : ΒΔ (Σχ. 66.), καὶ ἡ γωνία Γ=γ, ἀφ' οὗ ληφθῇ ΒΖ=αβ, καὶ ἀχθῇ ἡ ΖΕ παράλληλος μὲ τὴν ΑΔ, θέλει εἶσθαι τὸ τρίγωνον ΖΒΕ ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, καὶ ἑπομένως ΒΖ : ΒΑ : : ΒΕ : ΒΔ. Ἐπειδὴ δὲ ΒΖ=βα, πρέπει νὰ εἶναι καὶ ΒΕ=βδ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν αβδ ἐμπορεῖ νὰ σκεπάσῃ τὸ τρίγωνον ΖΒΕ, καὶ ἑπομένως εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον αβδ. Διὰ τοῦτο τρίγωνα, τῶν ὁποίων δύω πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, καὶ αἱ περιεχόμεναι ὑπ' αὐτῶν γωνίαι ἴσαι, εἶναι ὅμοια.