ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Ἐπιπεδομετρία.

§. 1.

Σῶμα γεωμετρικὸν ἢ ςερεὸν ὀνομάζεται Πᾶν ὅ,τι ἐκτείνεται κατὰ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, καὶ περικλείεται εἰς ὅριά τινα. Τὰ ὅριά του ταῦτα ὀνομάζονται ἐπιφάνεια.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἔκτασιν, τὴν ὁποίαν πιάνει τὸ οἴκημά μας κατὰ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἢ ὕψος, θεωροῦμεν σῶμα γεωμετρικὸν ἢ ςερεόν· οἱ δὲ τοῖχοι τοῦ οἰκήματος εἶναι αἱ ἐπιφάνειαί του.

§. 2. Ἐπιφάνεια εἶναι διάςημα, τὸ ὁποῖον ἐκτείνεται κατὰ μῆκος καὶ πλάτος· ὁ τοῖχος, π. χ. τοῦ οἰκήματος εἶναι ἐπιφάνεια· τὸ ἐπάνω μέρος τῆς τραπέζης εἶναι ἐπιφάνεια· τὸ χαρτίον, ἐπάνω εἰς τὸ ὁποῖον γράφομεν, θεωρούμενον κατὰ μῆκος καὶ πλάτος μόνον, εἶναι ἐπιφάνεια κτλ.

§. 3. Διάςημα κατὰ μῆκος μόνον ἐκτεινόμενον ὀνομάζεται γραμμή· τὰ δὲ πέρατά της ὀνομάζονται σημεῖα.

Ἂν σύρῃς τὸ κονδύλιον εἰς τὸ χαρτίον, θέλεις γράψειν γραμμήν· καὶ ἐὰν μόνον ἐγγίξῃς τὴν μύτιν τοῦ κονδυλίου εἰς τὸ χαρτίον, θέλεις γράψειν σημεῖον.

§. 4. Εὐθεῖα γραμμὴ, ἢ εὐθεῖα ἁπλῶς ὀνομάζεται, τὴν ὁποῖαν ἐννοεῖται ὅτι γράφει τὸ κονδύλιον χωρὶς νὰ γυρίσῃ εἰς τὰ δεξιὰ ἢ εἰς τὰ ἀριςερὰ, ἀλλὰ πάντοτε τρέχει κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν εἰς τὰ ἔμπροσθεν. Καμπύλη δὲ γραμμὴ εἶναι, τὴν ὁποίαν ἔταν γράφῃ τὸ κονδύλιον ἐκβαίνει πάντοτε ἀπὸ τὸν εἰς τὰ ἔμπροσθεν δρόμον του.

Ἀξίωμα. Ἀπὸ πᾶν σημεῖον εἰς πᾶν σημεῖον ἔχομεν τὴν ἄδειαν νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν. καὶ τὴν γραμμένην νὰ ἐκτείνωμεν, ὅσον θέλομεν, καὶ ἀπὸ τὰ δύω ἄκρα της.

§. 5. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν γράφομεν ἐπάνω εἰς μίαν ἐπιφάνειαν μεταξὺ δύω συμείων της, πίπτῃ ὅλη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ὀνομάζεται ἐπίπεδος, ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον· τοιαύτη εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς τραπέζης, τοῦ καθρέπτου, τοῦ ἀκινήτου ὕδατος· κτλ. Κυρτὴ δὲ ἐπιφάνεια εἶναι, ἥτις δὲν ἔχει κἀνὲν μέρος ἐπίπεδον· τοιαύτη εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ποτηρίου, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐγοῦ κτλ.

§. 6. Ἐὰν διὰ δύω σημείων Α καὶ Β (Σχ. 1.) γραφῇ εὐθεῖα ἡ ΑΒ, δὲν ἐμπορεῖ νὰ γραφῇ ἄλλη εὐθεῖα διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, ἥτις νὰ ἔχῃ διάφορον θέσιν ἀπὸ τὴν ΑΒ· διότι, ἂν θελήσῃς διὰ τῶν αὐτῶν σημείων νὰ γράψῃς ἄλλην, αὕτη θέλει πέσειν ἐπάνω εἰς τὴν πρώτην.

§. 7. Δύω εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 2.), καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ Ο τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων, καὶ ὄχι κατὰ πλειότερα· διότι καθὼς ἔχουν δύω ἢ πλειότερα σημεῖα κοινά, ἡ μία εὐθεῖα πίπτει ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην (§. 6.).

§. 8. Δύω εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΒ, (Σχ. 3.) ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ, καὶ χωροῦσαι κατὰ διαφόρους φοράς, κάμνουν εὐθύγραμμον γωνίαν· καὶ αἱ μὲν εὐθεῖαι ΑΓ, ΑΒ ὀνομάζονται πλευραὶ τῆς γωνίας· τὸ δὲ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Γ, κορυφὴ τῆς γωνίας.

Ἡ γωνία σημαίνεται μὲ τρία γράμματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ μέσον εἶναι κυρίως τὸ σημαντικόν της· π. χ. ΑΓΒ, καὶ ΒΓΑ σημαίνουν τὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας πλευραὶ εἶναι ἡ ΑΓ καὶ ἡ

ΒΓ. Σημαίνεται δὲ καὶ μὲ ἓν γράμμα, τὸ ὁποῖον βάλλεται μεταξὺ τῶν δύω πλευρῶν τῆς γωνίας.

§. 9. Ἐὰν ἡ τῆς ΑΓΒ γωνίας πλευρὰ ΑΓ προαχθῇ ἕως τὸ Δ, θέλει γείνειν ἄλλη γωνία ΒΓΔ, ἥτις ὀνομάζεται ἐφεξῆς τῆς ΑΓΒ. Γωνία δὲ ἡ ΑΟΓ (Σχ. 4.), ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐφεξῆς της ΓΟΒ, ὀνομάζεται ὀρθή· ἡ δὲ εὐθεῖα ΓΟ, ὅταν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὀνομάζεται κάθετος· ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι ἄνισοι (Σχ. 3.), ἡ εὐθεῖα ΒΓ λέγεται πλαγία εἰς τὴν ΑΔ.

§. 10. Ἐπειδὴ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ ἴση μὲ τὴν ἐφεξῆς της (§. 9)· λοιπὸν καὶ ἡ ἐφεξῆς εἶναι ὀρθή· ἡ κάθετος λοιπὸν κάμνει δύω ὀρθάς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κάθετος θέσις τῆς εὐθείας εἶναι μία· διότι εὐθὺς ἀποῦ παραλλαχθῇ παύει νὰ εἶναι κάθετος, καὶ γίνεται πλαγία· πᾶσαι λοιπὸν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἰσάλληλοι.

§. 11. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΔ (Σχ. 5.) ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι, δὲν ἐμποροῦν νὰ ἐγερθοῦν δύω διάφοροι κάθετοι ΙΖ, ΙΓ.

§. 12. Ἐκτεταμένα μεγέθη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν σκεπάζει τὸ ἄλλο· καθὼς δύω χαρτία, ὅταν βαλθῇ τὸ ἓν ἐπάνω τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ πρῶτον σκεπάζει ἀκριβῶς τὸ δεύτερον· εἶναι ἐξ ἅπαντος ἴσα. Καὶ δύω εὐθεῖαι ἴσαι ἐμποροῦν νὰ σκεπάσουν ἡ μία τὴν ἄλλην· ὡσαύτως καὶ δύω γωνίαι ἴσαι.

§. 13. Ἀξιώματα. α'. Δύω μεγέθη ἴσα μὲ τρίτον τι εἶναι καὶ ἀλλήλων ἴσα.

β'. Ἐὰν εἰς ἴσα προςεθοῦν ἴσα, τὰ ὅλα θέλουν εἶσθαι ἴσα.

γ'. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθοῦν ἴσα, τὰ κατάλοιπα θέλουν εἶσθαι ἴσα.

§. 14. Τὸ κεφάλαιον δύω ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΙΖ+ΖΙΔ (Σχ. 6.) εἶναι ἴσον μὲ δύω ὀρθάς· διότι ἐμπορεῖ διὰ τοῦ Ι νὰ νοηθῇ κάθετος ἰσαμένη εἰς τὴν ΑΔ ἢ ΙΓ. Λοιπὸν ΑΙΓ + ΓΙΔ = 2Ο· ἄρα καὶ ΑΙΖ + ΖΙΓ + ΓΙΔ, ἢ ΑΙΖ + ΖΙΔ = 2Ο.

§. 15. Ἐὰν δύω γωνίαι ΑΙΖ, ΖΙΔ (Σχ. 6.) ἔχουσαι κοινὴν τὴν κορυφὴν Ι, καὶ μίαν κοινὴν πλευρὴν τὴν ΙΖ, εἶναι ἴσαι μὲ δύω ὀρθὰς· αἱ ἐξωτερικαὶ αὐτῶν πλευραὶ ΑΙ, ΙΔ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· διότι, ἂν δὲν εἶναι τοῦτο ἀληθινὸν, ἂς εἶναι ἡ ΙΘ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΑΙ. Εἶναι λοιπὸν ΑΙΖ + ΖΙΘ = 2Ο (§. 14), καὶ ΑΙΖ + ΖΙΔ = 2Ο, κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας· ἄρα ΑΙΖ + ΖΙΘ = ΑΙΖ + ΖΙΔ (§. 13.) καὶ ΖΙΘ = ΖΙΔ (§. 13, γ'.), ἤγουν τὸ μέρος ἴσον μὲ τὸ ὅλον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

§. 16. Πᾶσα μὴ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἢ μικροτέρα ἢ μεγαλητέρα ἀπὸ ὀρθήν· ἡ μικροτέρα ὀνομάζεται ὀ ξ ε ῖ α· ἡ μεγαλητέρα, ἀ μ β λ ε ῖ α. Γωνία δὲ ἡ ΑΙΖ, ἥτις μετὰ τῆς ὀξείας γωνίας ΖΙΓ (Σχ. 6.) ὁμοῦ λαμβανόμεναι κάμνουν μίαν ὀρθὴν, ὀνομάζεται ἡ πρώτη τῆς δευτέρας π α ρ α π λ ή ρ ω μ α· ὡσαύτως καὶ ἡ δευτέρα τῆς πρώτης· ἀπὸ δύω δὲ ἐφεξῆς γωνίας ΑΙΖ, ΖΙΔ ἡ μία λέγεται τῆς ἄλλης ἀ ν α π λ ή ρ ω μ α εἰς δύω ὀρθάς.

§. 17. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ (Σχ. 7.) τέμνωσιν ἀλλήλας, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίας α, γ εἶναι ἴσαι· διότι $\alpha + \beta = 2O$, καὶ $\beta + \gamma = 2O$ (§. 14.)· ἄρα καὶ $\alpha + \beta = \beta + \gamma$ (§. 13.)· καὶ ἑπομένως $\alpha = \gamma$ (§. 13, γ').

§. 18. Ἐπίπεδον κλεισμένον πανταχόθεν μὲ γραμμὰς, λέγεται σ χ ῆ μ α· ἐὰν αἱ γραμμαὶ εἶναι εὐθεῖαι, τὸ σχῆμα λέγεται ε ὐ θ ύ γ ρ α μ μ ο ν· ἂν εἶναι καμπύλαι, κ α μ π υ λ ό γ ρ α μ μ ο ν· ἢ μ ι κ τ ὸ ν, ἂν εἶναι μέρος εὐθεῖαι, καὶ μέρος καμπύλαι.

§. 19. Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται τ ρ ί γ ω ν ο ν, ὅταν ἔχη τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας· **Τετράπλευρον**, τὸ ἔχον τέσσαρας πλευράς· πεντάγωνον, ἑξάγωνον, καὶ ἐν γένει πολύγωνον, ἂν αἱ γωνίαι του εἶναι πέντε, ἕξ, ἢ πλειότεραι· τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δύω πλευραὶ εἶναι ἴσαι, λέγεται **ἰσοσκελές**· τοῦ ὁποίου δὲ αἱ τρεῖς εἶναι ἴσαι, **ἰσόπλευρον**. **Σκαληνὸν** δὲ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἄνισοι.

§. 20. Ἡ Εὐθεῖα εἶναι ἐλαχίςη ἀπ' ὅλας τὰς γραμμὰς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα· διότι αὕτη προπορεύεται πάντοτε εἰς τὰ ἔμπροσθεν· αἱ δὲ, ἀλλάσσουν τὸν ὀρθὸν δρόμον (§. 4.) καὶ ἑπομένως εἶναι καμπύλαι, ἢ γωνιώδεις γραμμαί.

§. 21. Ἐκ δὲ τούτου ἕπεται, ὅτι αἱ δύω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 8.) πλευραὶ ΑΓ + ΒΓ εἶναι μεγαλήτεραι παρὰ τὴν λοιπὴν ΑΒ. Καὶ ἐὰν ἡ κορυφὴ Ζ τριγώνου τοῦ ΑΖΒ κεῖται ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἄλλου τριγώνου τοῦ ΑΓΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ, ἐξ ἅπαντος εἶναι ΑΓ + ΒΓ > ΑΖ + ΒΖ (§. 20.).

§. 22. Τὸ ἀπόςημα τόπου τινὸς ἀπ' ἄλλου εἶναι ἡ ἐλαχίςετε ὁδὸς ἀπ' ὅλας, τὰς ὁποίας ἐμπορεῖ τις νὰ περιπατήσῃ ἐρχόμενος ἀπὸ τὸν πρῶτον τόπον εἰς τὸν δεύτερον.

§. 23. Τὸ ἀπόςημα λοιπὸν σημείου ἀπ' ἄλλο σημεῖον εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύω σημείων εὐθεῖα (§. 20).

§. 24. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΔΚ (Σχημ. 9.), ἀκίνητος μένουσα κατὰ τὸ Κ, περιφερθῇ ὅλη, ἕως οὗ νὰ ἐπιςρέψῃ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον ὅθεν ἤρχισα νὰ κινῆται, γεννᾶται σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **Κύκλος**.

§. 25. Ὅλη μὲν ἡ γραμμὴ ΑΔΒΖΟΕΑ, ἥτις ἐγράφη ἀπὸ τὸ τὴν εὐθείας ἄκρον Δ, ὀνομάζεται **περιφέρεια**· καὶ μέρος τι αὐτῆς τὸ ΕΟΖ, **τόξον**· ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἥτις συνάπτει τὰ τοῦ τόξου πέρατα Ε, Ζ, **Χορδὴ** τοῦ τόξου. Τὸ σημεῖον Κ ὀνομάζεται κέντρον τοῦ κύκλου. Αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΔ, ΚΒ, αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἕως τὴν περιφέρειαν, ἀκτῖνες τοῦ κύκλου καὶ ἡμιδιάμετροι. Χορδὴ δὲ διαβαίνουσα διὰ τοῦ κέντρου, ὁποία ἡ ΑΒ, ὀνομάζεται διάμετρος τοῦ κύκλου.

§. 26. Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι (§. 24, 25.), καὶ ἐπομένως καὶ αἱ διάμετροι· διότι πᾶσα διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος (§. 25.).

§. 27. Τὸ τοῦ κύκλου μέρος ΑΚΔΑ (Σχ. 9.), τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΔ καὶ τῶν ἀκτίνων ΑΚ, ΔΚ, αἵτινες τελευτῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, ὀνομάζεται τομεὺς τοῦ κύκλου· τὸ δὲ μέρος ΕΟΖΕ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς χορδῆς ΕΖ, καὶ τοῦ τόξου της ΕΟΖ, ὀνομάζεται τμῆμα τοῦ κύκλου.

§. 28. Ἡ διάμετρος ΑΒ διαιρεῖ τὸν μὲν κύκλον εἰς δύω ἴσα τμήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμικύκλια· τὴν δὲ περιφέρειαν εἰς δύω ἴσα τόξα ΑΔΒ, ΑΟΒ, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμιπεριφέρειαι.

§. 29. Αἴτημα. Μὲ σημεῖον δομένον, καὶ ἀκτῖνα ἐμποροῦμεν νὰ γράψωμεν κύκλον διὰ τοῦ ὀργάνου, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται διαβήτης.

§. 30. Ἐὰν λοιπὸν εὐθείας τῆς ΑΔ (Σχ. 10) δοθῇ σημεῖον τὸ Γ, ἐμποροῦμεν ἀπ᾽ αὐτῆς νὰ κόψωμεν διὰ τοῦ κύκλου μέρος τὸ ΓΒ ἢ τὸ ΑΒ ἴσον μὲ ἄλλην δομένην εὐθεῖαν τὴν ΔΕ.

§. 31. Κύκλοι, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, εἶναι καὶ αὐτοὶ ἴσοι, καὶ αἱ περιφέρειαί των ἴσαι· διότι, ἐὰν βαλθῇ ὁ εἷς ἐπάνω τοῦ ἄλλου κατὰ τὰ κέντρα, τὸν σκεπάζει ἀκριβῶς (§. 12).

§. 32. Τομεῖς κυκλικοὶ ΑΚΕΑ, ΙΖΒΙ (Σχ. 11.) κύκλων μὲ ἴσας ἀκτῖνας, ἴσας γωνίας ἔχοντες εἰς τὸ κέντρον, εἶναι ἴσοι· εἶναι ἴσα δὲ καὶ τὰ τόξατων ΑΘΕ, ΙΔΒ.

§. 33. Ἐὰν ἴσων κύκλων αἱ εἰς τὸ κέντρον γωνίαι τῶν τομέων εἶναι ἄνισοι, εἶναι ἄνισοι καὶ οἱ τομεῖς αὐτοὶ καὶ τὰ τόξα των.

§. 34. Ἴσα λοιπὸν τόξα καὶ ἴσοι τομεῖς ἴσων κύκλων ἔχουσι καὶ ἴσας εἰς τὸ κέντρον γωνίας.

§. 35. Δύω διάμετροι ΑΒ, ΔΟ (Σχ. 12.), αἱ ὁποῖαι ϛέκουν κάθετοι εἰς ἀλλήλας, διαιροῦν τὸν κύκλον εἰς τέσσαρας ἴσους τομεῖς, καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τεταρτημόρια.

§. 36. Πᾶς κύκλος καὶ πᾶσα περιφέρεια διαιρεῖται ἀπὸ τοὺς Γεωμέτρας εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται μοῖραι. Πᾶσα μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 λεπτὰ, καὶ πᾶν λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα· τὸ ο σημαίνει μοίρας, τὸ ′ λεπτὰ, τὸ ″ δεύτερα κ. τ. ἄρα 23°, 28′, 32″ σημαίνει 23 μοίρας καὶ 28 λεπτὰ, καὶ 32 δεύτερα.

§. 37. Πᾶν κυκλικὸν τεταρτημόριον ΑΟ, ΟΒ, ΒΔ, ΔΑ περιέχει 90° (§. 35, 36)· καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία λοιπὸν περιέχει 90°. Καὶ εἰς ἕνα λόγον, ὅσας μοίρας καὶ λεπτὰ καὶ δεύτερα περιέχει κυκλικόν τι τόξον, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν γωνίας τινος, καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας μεταξὺ τῶν δύω πλευρῶν· τόσας μοίρας καὶ λεπτὰ καὶ δεύτερα περιέχει καὶ ἡ γωνία.

§. 38. Νὰ μετρήσωμέν τι μέγεθος θέλει νὰ εἴπῃ νὰ λάβωμεν μέτρον διωρισμένον, τὸ ὁποῖον νὰ παρατηρήσωμεν Ποσάκις ἐμπεριέχεται εἰς τὸ μετρούμενον μέγεθος. Ἐὰν τὸ μέγεθος εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ μέτρον, πρέπει τὸ μέτρον νὰ εἶναι μοιρασμένον εἰς πολλὰ μικρὰ μέρη, διὰ νὰ εὕρωμεν Πόσα ἐκ τούτων ἐμπεριέχει τὸ μετρούμενον μέγεθος. Μέτρα συνειθισμένα εἶναι ἡ ὀργυιὰ, ἥτις περιέχει 6 πόδας· ὁ ποὺς περιέχει 12 δακτύλους· ὁ δάκτυλος, 12 γραμμάς· ἡ γραμμὴ, 12 ϛίγματα· τὸ Γερμανικὸν μίλιον, ὀργυιὰς 3333.

§. 39. Μέτρον γωνίας εἶναι τόξον κύκλου γραφόμενον ὡς εἴπαμεν (37) μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, καὶ ἀκτῖνα μία πλευρὰν, καὶ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύω πλευρῶν τῆς γωνίας.

§. 40. Μέτρον λοιπὸν τῆς μὲν ὀρθῆς γωνίας εἶναι 90°, τῆς δὲ ὀξείας < 90°, τῆς δὲ ἀμβλείας > 90° (§. 16, 37, 38).

Τὸ ἡμικύκλιον, τὸ ὁποῖον παριςάνεται εἰς τὸ σχ. 13 εἶναι διῃρημένον εἰς 180°· καὶ μὲ αὐτὸ μετροῦν πᾶσαν γωνίαν· ὀνομάζεται δὲ Ἀναγωγεύς.

§. 41. Πρόβλημα. Νὰ μετρήσῃς διὰ τοῦ ἀναγωγέως γωνίαν γραμμένην εἰς τὸ χαρτίον τὴν ΒΚΕ.

Βάλε τὸ κέντρον τοῦ ἀναγωγέως εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, καὶ τὴν ἀκτῖνάτου ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΒΚ· καὶ ἴδε Πόσας μοίρας περιέχει τὸ μεταξὺ ΒΚ καὶ ΚΕ κείμενον τόξον· μὲ τοῦτον τὸν τρόπον ἐμέτρησας τὴν γωνίαν (§. 39).

§. 42. Πρόβλημα. Εὐθείας δοθείσης τῆς ΑΒ νὰ συςήσῃς ἐπ' αὐτῆς γωνίαν ζητουμένην, π. χ. 40°.

Βάλε τὸν ἀναγωγέα ἐπάνω εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ὥςε νὰ ἐφαρμόζεται ἡ ἀκτίς του εἰς αὐτὴν, καὶ τὸ κέντρον του νὰ πίπτῃ εἰς τὸ σημεῖον Κ, ὅπου θέλει εἶσθαι ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας, καὶ εἰς τὴν 40° τοῦ ἀναγωγέως γράψε ἀντιςίχως ἓν σημεῖον· καὶ δι' αὐτοῦ καὶ τοῦ Κ ἄγαγε μὲ τὸν κανόνα εὐθεῖαν γραμμήν· αὕτη μετὰ τῆς ΑΒ περίχουν τὴν ζητουμένην γωνίαν.

§. 43. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ (Σχ. 14.) μὲ τρίτην τὴν ΑΒ περιέχουν εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν δύω γωνίας α, β, αἵτινες ὁμοῦ λαμβανόμεναι εἶναι < 2O· αὗται αἱ εὐθεῖαι προαγόμεναι πρὸς τὰ μέρη ὅπου εἶναι αἱ γωνίαι α, β, θέλουν συμπέσειν εἰς ἓν σημεῖον τὸ Ε.

§. 44. Ἐὰν εἰς εὐθεῖαν τὴν ΑΒ συςήσης δύω γωνίας α, β (§. 42), αἱ ὁποῖαι ὁμοῦ λαμβανόμεναι νὰ εἶναι $< 180°$ αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΒΕ θέλουν συμπέσειν εἰς τὸ Ε, καὶ θέλουν κάμειν τρίγωνον· ἐὰν δὲ προάξης τὴν πλευρὰν ΒΕ τοῦ τριγώνου ΒΑΕ ἕως τὸ Ζ, καὶ μετρήσης τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΑΕΖ (§. 41), θέλεις τὴν εὑρεῖν $= \alpha + \beta$· καὶ εἰς ἕνα λόγον πᾶσα ἐκτὸς γωνία ΑΕΖ τριγώνου τοῦ ΒΑΕ εἶναι ἴση μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἐντὸς τοῦ τριγώνου, τῶν ἀπεναντίον τῆς ἐκτός.

§. 45. Παντὸς τριγώνου ΑΒΕ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ δύω ὀρθάς· διότι, ἂν μακρύνης τὴν πλευρὰν ΒΕ ἕως τὸ Ζ, θέλει εἶσθαι $\text{ΑΕΖ} = \alpha + \beta$ (§. 44.)· ἀλλ' εἶναι καὶ $\text{ΑΕΖ} + \gamma = 2\text{O}$ (§. 14.)· ἄρα $\alpha + \beta + \gamma = 2\text{O}$.

§. 46. Ἐὰν τριγώνου δοθῇ μὲ μοίρας μία γωνία, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ αὕτη ἀπὸ 180°, μανθάνομεν καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν δύω λοιπῶν γωνιῶν· ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ κεφάλαιον δύω γωνιῶν, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ τοῦτο ἀπὸ 180°, μανθάνομεν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν· εἶναι φανερὸν λοιπὸν, ὅτι τριγώνου τινὸς μία μόνον γωνία ἐμπορεῖ νὰ εἶναι ὀρθὴ, ἢ μία μόνον ἀμβλεῖα· αἱ δὲ λοιπαὶ δύω εἶναι τότε ἀναγκαίως ὀξεῖαι.

§. 47. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον δὲν δύνανται νὰ καταβιβασθῶσι δύω διάφοροι κάθετοι ἐπάνω εἰς τὴν αὐτὴν τρίτην εὐθεῖαν.

§. 48. Τὸ τρίγωνον ὀνομάζεται ὀρθογώνιον, ὀξυγώνιον, ἀμβλυγώνιον, ἂν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν, ἢ μίαν ἀμβλεῖαν, ἢ ὅλας ὀξείας· αἱ περιέχουσαι τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου πλευραὶ ὀνομάζονται κάθετοι· ἡ δὲ τρίτη, ὑποτείνουσα.

§. 49. Ἐὰν δύω τρίγωνα ΒΑΓ, ΔΕΖ (Σχ. 15.) ἔχωσιν ἴσας δύω γωνίας τὰς Β, Ε, ἔχωσι δὲ ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς, αἵτινες περιέχουσι τὰς γωνίας, ἤγουν $\text{ΒΑ} = \text{ΕΔ}$, ΒΓ = ΕΖ, εἶναι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι μὲ τὰς λοιπὰς πᾶσα μία μὲ πᾶσαν μίαν, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ μὲ τὴν τρίτην· καὶ ὅλον τὸ ἓν τρίγωνον ἴσον μὲ ὅλον τὸ ἄλλο· διότι, ἂν τὸ ἓν τρίγωνον βαλθῇ ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο, ὥςε τὸ Γ νὰ κεῖται ἐπάνω τοῦ Ζ, καὶ ἡ ΕΖ ἐπάνω τῆς ΒΓ, θέλει τὸ σκεπάσειν μὲ ἀκρίβειαν.

§. 50. Εὐθεῖα ἡ ΑΔ (Σχ. 16.), ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΓ, κόπτει εἰς δύω ἴσα μέρη καὶ τὴν βάσιν ΒΓ καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον, καὶ ςέκει κάθετος εἰς τὴν βάσιν.

§. 51. Ἐκ δὲ τούτου γίνεται φανερὸν, ὅτι αἱ εἰς τὴν βάσιν γωνίαι Β, Γ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἰσάλληλοι· ἐὰν δὲ εἶναι τὸ τρίγωνον ἐνταυτῷ καὶ ἰσόπλευρον, πᾶσαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι, καὶ πᾶσα μία $= \frac{2}{3}$ Ο $= 60°$.

§. 52. Ἐὰν ἀκτὶς ἡ ΚΖ (Σχ. 17.), ἢ ἡ διάμετρος ΗΖ διχοτομήσῃ τὴν γωνίαν ΑΚΘ, ἢ τὸ τόξον ΑΖΘ, θέλει διχοτομήσειν κ. τὴν χορδὴν ΑΘ, καὶ θέλει ςαθῆν κάθετος εἰς αὐτήν.

§. 53. Ἐὰν ἓν ἀπὸ τὰ δύω ἴσα σκέλη ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ ΒΓΑ (Σχ. 16.), τὸ ΑΒ, προαχθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Α ἕως τὸ Ε, ἡ ἐκτὸς γωνία ΕΑΓ θέλει εἶσθαι διπλῆ πάσης μιᾶς ἀπὸ τὰς εἰς τὴν βάσιν ἰσαλλήλους (§. 44.).

§. 54. Εὐθεῖα ἡ ΑΔ, ἥτις ἐκ τῆς Α κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καταβιβάζεται κάθετος εἰς τὴν βάσιν ΒΓ, θέλει διχοτομήσειν τὴν γωνίαν καὶ τὴν βάσιν καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον· διότι κατ᾽ ἄλλον τρόπον δύναται ἄλλη εὐθεῖα τέμνουσα εἰς δύω ἴσα μέρη τὴν γωνίαν Α νὰ ςαθῇ κάθετος εἰς τὴν βάσιν (§. 50.), τὸ ὁποῖον ἀντιφάσκει μὲ τὸν §. 47.

§. 55. Ἡ ΗΖ διάμετρος (Σχ. 17.), ἥτις ςέκει κάθετος εἰς χορδὴν τὴν ΑΘ, διχοτομεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ τόξον της ΑΖΘ, καὶ τὴν εἰς τὸ κέντρον γωνίαν ΑΚΘ.

§. 56. Εὐθεῖα ἡ ΑΔ (Σχ. 16.), ἥτις διχοτομεῖ τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, καὶ διέρχεται διὰ τῆς γωνίας Α· αὕτη ςέκει κάθετος εἰς τὴν βάσιν, καὶ ἔχει καὶ ὅλας τὰς ἤδη εἰρημένας ἰδιότητας· διότι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθῇ κάθετος εἰς τὴν ΒΓ, θέλει διαβῆν ἀπὸ τὸ Δ (§. 54.) καὶ θέλει εἶσθαι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ΔΑ (§. 6.).

§. 57. Διάμετρος ἡ ΗΖ (Σχ. 17.), ἥτις διχοτομεῖ τὴν χορδὴν ΑΘ, ςέκει ἐνταυτῷ κάθετος ἐπάνωτης, καὶ διχοτομεῖ καὶ τὴν εἰς τὸ κέντρον γωνίαν ΑΚΘ, καὶ τὸ τόξον ΑΘ.

§. 58. Εὐθεῖα ἐγειρομένη κάθετος ἀπὸ τὸ μέσον Δ (Σχ. 16.) τῆς βάσεως ΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΑ, διαβαίνει διὰ τῆς γωνίας Α.

§. 59. Εὐθεῖα, ἡ ΗΖ (Σχ. 17.), ἥτις ςέκει κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΑΘ κατὰ τὸ ν, εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

§. 60. Ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ (Σχ. 18.) εἶναι ἄνισοι, ἡ μεγαλητέρα ὑποτείνει μεγαλητέραν γωνίαν, καὶ ἡ μικροτέρα μικροτέραν· διότι ἔςω ΑΓ > ΑΒ· θέλει εἶσθαι λοιπὸν μέρος τι τῆς ΑΓ. π. χ. τὸ ΑΔ = ΑΒ· καὶ ἀφ᾽ οὗ ἀχθῇ ἡ ΒΔ θέλει εἶσθαι ἡ γωνία ΑΒΔ = ΑΔΒ (§. 51.), καὶ ΑΒΓ > ΑΒΔ· ὅρα καὶ ΑΒΓ > ΑΔΒ. Εἶναι δὲ καὶ ΑΔΒ > ΑΓΒ (§. 44)· ἄρα καὶ ΑΒΓ > ΑΓΒ.

§. 61. Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύω γωνίας ἴσας, ἔχει ἴσας καὶ τὰς πλευράς, αἵτινες ὑποτείνουσιν εἰς τὰς ἴσας γωνίας· διότι, ἂν εἶναι αἱ πλευραὶ ἄνισοι, θέλουν εἶσθαι ἄνισοι καὶ αἱ γωνίαι (§. 60.). Τρίγωνον λοιπὸν, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας τὰς τρεῖς γωνίας, εἶναι ἰσόπλευρον.

§. 62. Τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύω γωνίαι εἶναι ἄνισοι, εἰς τὴν μεγαλητέραν γωνίαν ὑποτείνει πλευρὰ μεγαλητέρα, καὶ εἰς τὴν μικροτέραν μικροτέρα.

§. 63. Ὀρθογωνίου μὲν τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγωνίου δὲ ἡ τὴν ἀμβλεῖαν, εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ πᾶσαν μίαν ἐκ τῶν δύω λοιπῶν πλευρῶν.

§. 64. Ἀπ᾿ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἐμποροῦν νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ σημείου εἰς ἄλλην εὐθεῖαν, ἐλαχίςη εἶναι ἡ κάθετος· εἶναι λοιπὸν αὕτη τὸ τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ἀπόςημα. Καὶ ἐξ ἐναντίας, ἡ ἐλαχίςη ἀπ᾿ ὅλας τὰς εὐθείας αἱ ὁποῖαι ἐμποροῦν νὰ ἀχθῶσιν, ἀπὸ σημείου εἰς εὐθεῖαν, εἶναι κάθετος εἰς αὐτήν· καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰς δεδομένην εὐθεῖαν δύω μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἐμποροῦν νὰ ἀχθῶσιν ἡ μία ἐκ δεξιῶν, καὶ ἡ ἄλλη ἐξ ἀριςηρῶν τῆς καθέτου.

§. 65. Ἐὰν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ (Σχ. 15.) αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς τριγώνου τοῦ ΔΕΖ, τὰς ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ πᾶσα μία μὲ πᾶσαν μίαν· θέλουν εἶσθαι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι τῶν δύω τριγώνων αἱ ὑποτείνουσαι τὰς ἴσας πλευράς· διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἐμποροῦν νὰ σκεπαθοῦν (§. 12.).

§. 66. Τὰ δύω λοιπὸν τρίγωνα ἔχουν ἴσας ἐπιφανείας. καὶ ἐὰν ςαθοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τὰ δύω καὶ ἐφαρμοσθοῦν αἱ πλευραὶ των, θέλουν συμπέσειν οὕτως, ὥςε δὲν θέλει διακρίνεσθαι τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο.

§. 67. Πρόβλημα. Ἐὰν δοθοῦν τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΘΗ, ΚΛ (Σχ. 19.), ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ δύω ὁμοῦ λαμβανόμεναι εἶναι μεγαλήτεραι ἀπὸ τὴν τρίτην· νὰ συςήσῃς τρίγωνον μὲ αὐτάς.

Βάλε μὲν ἀπ᾿ αὐτάς, τὴν ΑΒ, βάσιν, καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΘΗ, καὶ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΛ γράψε κύκλους, οἱ ὁποῖοι τέμνονται κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Δ· καὶ ἄγαγε τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΔ, ἢ ΒΓ, ΑΓ· καὶ κατὰ τοὺς δύω τρόπους θέλει συςαθῆν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

§. 68. Ὡσαύτως ἐμπορεῖς νὰ συςήσῃς ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἢ καὶ ἰσόπλευρον.

§. 69. Ἀπὸ σημείου τοῦ Γ (Σχ. 20) εὐθείας τῆς ΑΒ ἐμπορεῖς νὰ ἐγείρῃς κάθετον, ἐὰν λάβῃς ΓΔ = ΓΕ, καὶ ἐπάνω τῆς ΔΕ συςήσῃς ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἀγάγῃς εὐθεῖαν τὴν ΓΖ (§. 56.).

§. 70. Εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν ΑΒΓ (Σχ. 21.) ἐμπορεῖς νὰ διχοτομήσῃς μὲ τὴν εὐθεῖαν ΒΖ, ἐὰν λάβῃς ΒΔ = ΒΕ, καὶ συςήσῃς ἐπὶ τῆς ΔΕ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΕΖ· γίνεται λοιπὸν ΑΒΖ = ΓΒΖ (§. 65, 68).

§. 71. Εὐθεῖαν τὴν ΒΓ (Σχ. 16.) ἐμπορεῖς νὰ κόψῃς εἰς δύω ἴσα μέρη μὲ κάθετον τὴν ΑΔ, ἐὰν συςήσῃς ἐπάνω τῆς ΒΓ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ διχοτομήσῃς τὴν ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινομένην γωνίαν (§. 68, 70).

§. 72. Συμπεραίνεται ἐκ τούτων, ὅτι πᾶσαν εὐθεῖαν, καὶ πᾶσαν γωνίαν, καὶ ἑπομένως πᾶν κυκλικὸν τόξον ἐμποροῦμεν νὰ κόψωμεν εἰς 4, 8, 16, 32 κτ. ἴσα μέρη (§. 70, 71).

§. 73. Ἐὰν ἐκ σημείου Ζ (Σχ. 22.), ἐκτὸς τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ κειμένου, θέλῃς νὰ καταβιβάσῃς ἐπ' αὐτῆς κάθετον, λάβε ἐπέκεινα τῆς εὐθείας σημεῖον τὸ Ε, καὶ μὲ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΕ γράψε κύκλον· καὶ μάκρυνε, ἂν εἶναι ἀνάγκη, τὴν ΑΒ ἕως τὴν περιφέρειαν, καὶ κόψε τὴν χορδὴν ΘΗ εἰς δύω μέρη κατὰ τὸ Γ, καὶ ἄγαγε τὴ εὐθεῖαν ΖΓ. Ἀφ' οὗ λοιπὸν ἄξῃς τὰς ἀκτῖνας ΖΘ, ΖΗ, εἰ τὰ τρίγωνα ΘΓΖ, ΗΓΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας πλευρὰς ἴασαν μίαν μὲ πᾶσαν μίαν, ἡ γωνία ΘΓΖ = ΖΓΗ = Ο, αἱ ἑπομένως ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΒ.

§. 74. Ἐὰν δύω τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (Σχ. 15.) ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας Β, Ε, καὶ τὰς ἀντιςίχους πλευρὰς ΑΒ, ΔΕ ἴσας, ἴσας δὲ καὶ τὰς ὑποτεινούσας ὑποκάτω τῶν ἴσων γωνιῶν πλευρὰς ΑΓ, ΔΖ, εἶναι δὲ ΑΓ > ΑΒ, καὶ ἑπομένως ΔΖ > ΔΕ, θέλει εἶσθαι ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ πρώτου τριγώνου ἴση μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ δευτέρου τριγώνου· καὶ αἱ γωνίαι, αἵτινες ὑποτείνονται ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς, ἴσαι· διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα σκεπάζουσιν ἄλληλα. Ἐὰν λοιπὸν τριγώνων ὀρθογωνίων ἢ ἀμβλυγωνίων αἱ ὑποτείνουσαι τὴν ὀρθὴν ἢ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν εἶναι ἴσαι (εἶναι δὲ καὶ αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι ἴσαι εἰς τὰ ἀμβλυγώνια), τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

§. 75. Δύω τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (Σχ. 15.) ἐμποροῦν νὰ σκεπάσωσιν ἄλληλα, ἐὰν ἔχουν μίαν πλευρὰν μὲ μίαν πλευρὰν ἴσην, ΒΓ = ΕΖ, καὶ τὰς παρακειμένας γωνίας ἴσας, Β = Ε, Γ = Ζ· ἢ ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν μὲ μίαν γωνίαν ἴσην, Β = Ε, καὶ τὴν ὑποτεινομένην γωνίαν Α = Δ τῇ ὑποτεινομένῃ γωνίᾳ.

§. 76. Κύκλου ἢ πολλῶν κύκλων ἴσων τὰ ἴσα τόξα ἔχουν ἴσας χορδάς· καὶ ἀντιςρόφως, αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουν ἴσα τόξα (Σχ. 17)· διότι, ἐὰν ΑΖΘ, ΒΗΜ εἶναι κυκλικὰ τόξα, καὶ ΚΑ, ΚΘ, ΚΒ, ΚΜ ἀκτῖνες τελευτῶσαι εἰς τὰ ἄκρα των, εἰ μὲν τὰ τόξα εἶναι ἴσα, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ΒΚΘ, ΒΚΜ (§. 34.), καὶ ἑπομένως καὶ αἱ χορδαὶ ΑΘ, ΒΜ (§. 49). Ἐὰν δὲ ἐξ ἐναντίας ἐξεύρωμεν ὅτι εἶναι ΑΘ = ΒΜ, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ ΑΚΘ = ΒΚΜ (§. 65.), καὶ ἑπομένως καὶ τὰ τόξα ἴσα (§. 32).

§. 77. Εὐθεῖαι, αἵτινες, ὅσον καὶ ἂν προαχθοῦν, δὲν συμπίπτουν πούποτε, ὀνομάζονται παράλληλοι· ἐὰν π. χ. αἱ χορδαὶ ΒΜ, ΑΘ (Σχ. 17.) ςέκουν κάθετοι εἰς τὴν διάμετρον ΗΖ, δὲν συμπίπτουν πούποτε, ὅσον καὶ ἂν προαχθοῦν, καὶ ἑπομένος εἶναι παράλληλοι.

§. 78. Πρόβλημα. Εἰς τὴν εὐθεῖαν ΕΖ (Σχ. 23.) νὰ κατασκευάσῃς γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δεδομένην ΑΒΓ.

Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τινα γράψε τόξον τὸ ΘΗ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας· καὶ μὲ κέντρον τὸ

Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράψε τόξον τέμνον τὴν ΕΖ κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐφάρμοσε τοῦ τόξου τὴν χορδὴν ΘΗ ἀπὸ τοῦ Λ εἰς τὸ Κ, καὶ ἄγαγε τὴν ΕΚ· θέλει εἶσθαι λοιπὸν ἡ γωνία Ε = ΑΒΓ (§. 65).

§. 79. Πρόβλημα. Διὰ σημείου τοῦ Ο (Σχ. 24.) νὰ ἀγάγης εὐθεῖαν παράλληλον τῆς ΓΔ.

Ἀπὸ σημεῖόν τι τῆς ΓΔ τὸ Σ καὶ διὰ τῶν σημείων Ο, Σ ἄγαγε εὐθεῖαν τὴν ΕΖ· καὶ σύστησε τὴν γωνίαν μ ἴσην μὲ τὴν ν (§. 78)· ἡ ΑΒ λοιπὸν εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ. Διότι, ἐὰν ΑΒ καὶ ΓΔ προαγόμεναι κατὰ τὸ Β, συνέπιπταν, ἤθελε συςαθῆν τρίγωνον, ὅπου ἡ ἐκτὸς γωνία μ ἤθελεν εἶσθαι μεγαλητέρα παρὰ τὴν υ (§. 44.) ἐνῷ τὴν ἐκάμαμεν ἴσην μ' αὐτὴν, ἀλλ' ἐπειδὴ προσέτι εἶναι καὶ μ = ρ, καὶ ν = υ (§. 17)· ἄρα εἶναι καὶ ρ = υ· καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ προαγόμεναι κατὰ τὰ Α, Γ δὲν δύνανται νὰ συμπέσωσι.

§. 80. Ἐὰν αἱ ἐναλλὰξ γωνίας ρ, ν εἶναι ἴσαι, εἶναι καὶ ρ = μ, καὶ ἑπομένως μ = ν, καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ· καὶ ἐὰν αἱ δύω ἐσωτερικαὶ γωνίαι ν + φ = 2Ο, θέλει εἶσθαι καὶ μ + φ = 2Ο· ἄρα ν + φ = μ + φ, καὶ ἑπομένως ν = μ (§. 13, γ'), καὶ ἡ ΑΒ παράλληλος τῆς ΓΔ. Φανερὸν εἶναι ἐκ τούτων, ὅτι δύω εὐθεῖαι κάθετοι εἰς τρίτην τινα, εἶναι παράλληλοι.

§. 81. Ἐὰν εἰς δύω παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ ἐμπέσῃ εὐθεῖα ἡ ΕΖ, θέλει γενῆν τὸ κεφάλαιον τῶν δύω ἐσωτερικῶν γωνιῶν ν + φ ἴσον μὲ δύω ὀρθάς· διότι ἐὰν ἦτο ν + φ < 2Ο, ἤθελαν συμπέσειν ΑΒ, ΓΔ προαγόμεναι εἰς τὰ Β, Δ (§. 43)· ἄρα δὲν ἤθελαν εἶσθαι παράλληλοι· ἐὰν δ' ἦτο ν + φ > 2Ο, ἤθελεν εἶσθαι ρ + φ = 2Ο, καὶ ν + χ = 2Ο· καὶ ἑπομένως ρ + φ + ν + χ = 4Ο, καὶ ρ + χ < 2Ο. ΑΒ λοιπὸν καὶ ΓΔ προαγόμεναι εἰς τὰ Α, Γ ἤθελαν συμπέσειν, καὶ ἑπομένως δὲν ἤθελαν εἶσθαι παράλληλοι· ἄρα ν + φ = 2Ο.