Λαμβάνει λοιπὸν καθεὶς 1290 γρόσια.

Παράδειγμα ἄλλο. Ἕνας θέλει νὰ πληρώσῃ 10060 γρόσια μὲ πεντάγροσα· πόσα πεντάγροσα πρέπει νὰ δώσῃ; διαίρεσε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν μὲ 5 καὶ θέλεις εὑρεῖν τὸ ζητούμενον.

Διαιρέτης	Διαιρετέος	Πηλίκον
5	10060	2012
	10	
	06	
	5	
	10	
	10	
	0	

Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ διαιρετέου δὲν περιέχει τὸν 5 διαιρέτην, λάβε καὶ τὸν δεύτερον 0 (καν. γ')· ὁ 5 εἰς τὸν 10 περιέχεται δίς· γράψε πηλίκον 2· δὶς 5 δέκα, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἀπὸ 10 καταλείπουν μηδέν· καταβίβασε τὸν ἐγγὺς χαρακτῆρα 0· καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸν δὲν περιέχεται ὁ διαιρέτης, γράψε πηλίκον 0 (καν. ζ). Καταβίβασε τὸν ἐφεξῆς χαρακτῆρα 6· εἰς αὐτὸν ἐμπεριέχεται ἅπαξ· καὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ 1 καὶ 5, ὁ 5, ἀφαιρούμενος ἀπὸ 6 καταλείπει 1· πλησίον τῆς 1 γράψε τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 0· ὁ 5 εἰς τὸν 10 περιέχεται δὶς κτλ.

Οἱ γυμνασμένοι εἰς τοὺς λογαριασμοὺς συνηθίζουν νὰ κάμνουν τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου χωρὶς νὰ γράφουν τὸ γινόμενον. Ἰδοὺ τὰ δύω παραδείγματά μας γραμμένα μὲ τοιοῦτον τρόπον.

2	2580	1290	5	10060	2012
	5			06	
	18			10	
	0			0	

§. 30. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, 100, 1000 κτλ. ἤγουν εἶναι ἡ μονὰς μὲ ἓν ἢ πλειότερα μηδενικά, κάμνομεν εὐθὺς τὴν διαίρεσιν, ἀποκόπτοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσους χαρακτῆρας, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ἡ μονάς· καὶ εἰ μὲν οἱ κοπτόμενοι χαρακτῆρες εἶναι μηδενικά· ἡ διαίρεσις εἶναι ἀκριβής· εἰ δ' εἶναι ἀριθμῶν χαρακτῆρες· μένει κατάλοιπον, τὸ ὁποῖον συνιςᾷ κλάσμα, περὶ τοῦ ὁποίου θέλομεν ὁμιλήσειν ὕςερα.

Παράδειγμα. Ἐὰν δέκα πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 90 γρόσια, πόσον τιμᾶται ἡ πῆχυς; διαίρεσε τὸν 90 μὲ 10, ἤγουν ἀπόκοψε ἓν μηδενικὸν ἀπὸ αὐτόν· πηλίκον εἶναι ὁ 9, καὶ τόσον τιμᾶται ἡ πῆχυς.

Παράδειγμα ἄλλο. Ἐὰν 100 ὀκάδες σάκχαρου τιμῶνται 383 γρόσια, πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ; 3 γρόσια καὶ $\frac{83}{100}$· τοῦτο τὸ τελευταῖον λέγεται κλάσμα, καὶ θέλομεν τὸ ἐξετάσειν ἄλλοῦ, ὡς εἴπαμεν.

§. 31. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ἕνα χαρακτῆρα παρὰ τὴν μονάδα ἄλλον, καὶ εἰς τὰ δεξιά του ἓν ἢ πλειότερα μηδενικὰ, ἀκολούθει τὸν ἐφεξῆς κανόνα.

Κόψε τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ ἰσαρίθμους χαρακτῆρας ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου· καὶ διαίρεσε μὲ τὸν ἕνα χαρακτῆρα τοῦ διαιρέτου τοὺς ἐπιλοίπους χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου· εἰ μὲν οἱ κοπέντες χαρακτῆρες εἶναι μηδενικὰ, καὶ ἐκ τῆς διαιρέσεως δὲν μείνῃ κατάλοιπον, τὸ πηλίκον εἶναι ἀκριβές· εἰ δὲ εἶναι ἀριθμῶν χαρακτῆρες, καὶ μείνῃ καί τι κατάλοιπον, μετὰ τοῦ καταλοίπου θέλουν συςήσειν κλάσμα.

$$
\begin{array}{r|l|l}
4(0 & \underline{189(4} & 47\frac{14}{40} \\
 & \underline{29} & \\
 & 14 &
\end{array}
$$

Παράδειγμα. 1894 νὰ διαιρεθῶσι μὲ τὸν 40 Τὶ πηλίκον δίδουσι; 47 καὶ $\frac{14}{40}$.

§. 32. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ πολλοὺς ἀριθμητικοὺς χαρακτῆρας, ἀκολούθει πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α' Εἰ μὲν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος ἢ μικρότερος ἀπὸ ἰσαρίθμους χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου κειμένους εἰς τἀριςερά· παρατήρησε Πόσαις φοραῖς περιέχεται ὁ διαιρέτης εἰς τούτους τοὺς χαρακτῆρας· εἰ δὲ εἶναι μεγαλήτερος, λάβε ἀκόμη ἕνα χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, καὶ σημείωσέ τον μὲ ςίγμα, διὰ νὰ ἐξεύρῃς ὡς ποῦ ἔφθασες.

β′ Διὰ νὰ καταλάβῃς ποσάκις περιέχεται ὁ διαιρέτης εἰς τοὺς ἀντιςίχους τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρας, παρατήρησε ποσάκις περιέχεται ὁ πρῶτός του χαρακτὴρ εἰς τὸν πρῶτον ἢ εἰς τοὺς δύω πρώτους ἐκείνου· καὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅςτις φανερόνει τὸ Ποσάκις, γράψε πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου.

γ′ Πολλαπλασίασε τὸν διαιρέτην μὲ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον· καὶ τὸ γινόμενον ἀφαίρεσε ἀπὸ τὸ διαιρεθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου· εἰ μὲν τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ μέρος τοῦτο, τὸ πηλίκον ἐβάλθη μεγαλήτερον ἀπ' ὅ,τι ἔπρεπε, καὶ πρέπει νὰ τὸ μικρύνῃς μίαν ἢ δύω μονάδας· εἰ δὲ εἶναι ἡ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν διαφορὰ μεγαλητέρα ἀπὸ τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον ἀπ' ὅ,τι ἔπρεπε, καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ τὸ μεγαλύνῃς.

δ′ Εἰς τὸ κατάλοιπον πρόσθεσε τὸν ἐφεξῆς τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρα, καὶ ἐπανάλαβε τὴν διαίρεσιν, ἕως οὗ νὰ μὴ μείνῃ κανεῖς χαρακτήρ.

Παράδειγμα Α′. Ἐὰν πήχεις ὑφάσματος 25 τιμῶνται γρόσια 425, Πόσα τιμᾶται ἡ πῆχυς; διαιρέσας τὸν 425 μὲ 25 εὑρίσκεις πηλίκον 17, ὅςτις εἶναι ἡ τιμὴ τῆς πήχεως.

25	425	17
	25	
	175	
	175	
	000	

Παράδειγμα Β′. Ἠγόρασεν ἕνας 786 καντάρια καφὲ διὰ γρόσια 150650, πόσα γρόσια τιμᾶται τὸ καντάριον; διαίρεσε τὸν ἀριθμὸν τῶν γροσίων μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κανταρίων, καὶ θέλεις εὑρεῖν πη-

786	150650	191 $\frac{524}{786}$
	786	
	7205	
	7074	
	1310	
	787	
	524	

λίκον 191, καὶ κατάλοιπον 524, τὸ ὁποῖον συνιςᾷ κλάσμα τὸ $\frac{524}{786}$.

Παράδειγμα Γ'. Ἐὰν 320 καντάρια παμβακίου τιμῶνται γρόσια 89600, πόσον ἀξίζει τὸ καντάριον· διαίρεσε τὸν ἀριθμὸν τῶν γροσίων μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κανταρίων, ἐφαρμόζων ἐδῶ καὶ τὸ εἰρημένο περὶ μηδενικῶν τοῦ διαιρέτου (§. 30), καὶ θέλεις εὑρεῖν γρόσια 280.

```
32(0 | 8960(0 | 280
       64
       256
       256
       000
```

§. 33. Ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θεμελιόνεται εἰς τὴν ἀλήθειαν ταύτην. Ἐὰν ὁ προκύπτων διαιρεθῇ δι' ἑνὸς ποιητοῦ, δίδει πηλίκον τὸν ἄλλον ποιητήν· ὁ πολλαπλασιασμὸς λοιπὸν δοκιμάζεται διὰ τῆς διαιρέσεως· καθὼς φαίνεται εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

```
Πολλαπλασιασμὸς             δοκιμὴ αὐτοῦ
 380                  24 | 9120 | 380 ὁ ἄλλος
  24                       190        ποιητὴς
1520                       ...  ἢ
 76                 38(0 | 912(0 | 24 ὁ ἄλλος
9120                       152        ποιητὴς
                            ..
```

§. 34. Ἡ δὲ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως γίνεται, ἐὰν πολλαπλασιάσαντες τὸ πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτην λάβωμεν προκύπτοντα τὸν διαιρετέον, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι ἀκριβής· ἂν δὲν εἶναι ἀκριβὴς, συνάπτομεν εἰς τὸν προκύπτοντα καὶ τὸ κατάλοιπον· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, ἡ διαίρεσις ἔγεινεν ἄσφαλτος· εἰ δὲ μὴ, εἶναι ἐσφαλμένη.

Διαίρεσις	Δοκιμὴ
7 | 3420 | 488 $\frac{4}{7}$	488
62	7
60	3416
4	4
	3420

§. 35. Ἐμπορεῖς νὰ μεταβάλῃς τοὺς παράδας εἰς γρόσια, καὶ τὰ δράμια εἰς ὀκάδας, καὶ ὅλα τὰ μικρότερα εἰς τὰ μεγαλήτερα, εἰς τὰ ὁποῖα περιέχονται, διὰ τῆς διαιρέσεως· ἂν θέλῃς π. χ. νὰ μεταβάλῃς 1280 παράδες εἰς γρόσια, διαίρεσε τὸν ἀριθμὸν τῶν παράδων μὲ 40, καὶ τὸ πηλίκον 32, φανερώνει, ὅτι οἱ εἰρημένοι παράδες κάμνουν 32 γρόσια· εἰ δὲ θέλεις νὰ μεταβάλῃς 14000 δράμια εἰς ὀκάδας, διαίρεσε τὰ δράμια μὲ 400, καὶ θέλεις εὑρεῖν ὀκάδας 35.

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§. 36. Συμμιγεῖς ἀριθμοὶ λέγονται, ὅταν αἱ μονάδες των δὲν εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀλλὰ διάφοροι, μεγαλήτεραι καὶ μικρότεραι· αἱ μικρότεραι ὅμως νὰ περιέχωνται εἰς τὰς μεγαλητέρας· π. χ. 32 γρ. 15 παρ. καὶ 13 ὀκ. 51 δρ. Ἐμποροῦν δὲ τὰ μικρότερα εἴδη νὰ διακρίνωνται ἀπὸ τὰ μεγαλήτερα μὲ ἓν σίγμα γραφόμενον μεταξύ· π. χ. γρ. 32. 15. καὶ ὀκ. 13. 51.

§. 37. Εἰς τὴν σύναψιν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν πρέπει νὰ φυλάξῃς πρὸς τοῖς ἄλλους καὶ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α΄ Γράψε τοὺς ἀριθμοὺς ὑπαλλήλους, ὥστε τὰ μικρότερα εἴδη ν᾽ ἀντιστιχοῦν μὲ τὰ μικρότερα, καὶ τὰ μεγαλήτερα μὲ τὰ μεγαλήτερα· οἱ παράδες π. χ. μὲ τοὺς παράδες, καὶ τὰ γρόσια μὲ τὰ γρόσια. Τὰ μικρότερα νὰ εἶναι πάντοτε εἰς τὰ δεξιὰ τῶν μεγαλητέρων.

β΄ Σύναψε πρῶτον τὸ μικρὸν εἶδος· καὶ εἰ μὲν αἱ μονάδες τοῦ κεφαλαίου κάμνουν ὀλιγώτερον παρὰ μίαν μονάδα τοῦ μεγαλητέρου εἴδους, γράψε το ὑποκάτω τῆς γραμμῆς· εἰ δὲ μὴ, μετάβαλέ το εἰς τὸ μεγαλήτερον (§. 35)· καὶ ἀφήσας τὸ κατάλοιπον, ἂν εἶναι, σύναψε τὸ μεγαλήτερον εἶδος, τὸ ὁποῖον ἔγινεν ἀπὸ τὸ μικρότερον, μὲ τὰς μονάδας τοῦ μεγαλητέρου. Τὸ ἐφεξῆς παράδειγμα σαφηνίζει τὰ εἰρημένα.

Ἕνας ἔλαβεν εἰς τρεῖς μῆνας τὰ ἐφεξῆς χρήματα, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸ κεφάλαιον.

γρόσ.	732	. 35
	512	. 18
	370	. 12
ἔλαβε λοιπὸν γρ.	1615	. 25

§. 38. Διὰ νὰ ἀφαιρέσῃς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἀπὸ συμμιγῆ, ἀκολούθει τοὺς ἐφεξῆς κανόνας.

α΄ γράψε τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω εἰς τὸν μειωτέον, ὡς εἴπαμιν ἀνωτέρω (§. 37. α΄).

β΄ ἀφαίρεσε τὸ μικρότερον εἶδος ἀπὸ τὸ ἀντιστιχόν του καὶ ἔπειτα τὸ μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ ἀντίστιχόν του· ἂν τὸ μειωτέον μικρὸν εἶδος εἶναι μικρότερον παρὰ τὸ ἀντίστιχόν του ἀφαιρετέον· δανείσου μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ μεγαλήτερον εἶδος, καὶ μετάβαλέ την εἰς τὰς μονάδας τοῦ μικροῦ, καὶ σύναψέ την μὲ αὐτό· τὸν ἀριθμὸν, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἐδανείσθης τὴν μονάδα, πρέπει νὰ τὸν ἐκλάβῃς ἔπειτα ὀλιγώτερον μίαν μονάδα.

Ἕνας ἰχρέωσει γροσ. 32 . 15, καὶ ἔδωκε γρόσ. 12 . 18 Πόσα χρεωστεῖ ἀκόμη; ἡ διαφορὰ μᾶς λέγει γρ. 19 . 37.

γρ.	32	. 15
	12	. 18
	19	. 37

§. 39. Ἐὰν θέλῃς νὰ πολλαπλασιάσῃς μὲ ἀριθμὸν τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς, ἀκολούθει τὰ ἐφεξῆς.

Πολλαπλασίασε πρῶτον τὸ μικρότερον εἶδος, καὶ ἔπειτα τὸ μεγαλήτερον· ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ μικροῦ εἴδους φανερόνει πλῆθος μονάδων, αἱ ὁποῖαι ἐμποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εἰς τὸ μεγαλήτερον, ἀνάγαγετας εἰς τὸ τέλος τῆς πράξεως, καὶ σύναψέ τας μὲ αὐτό.

Τέσσαρα παιδία ἐμοίρασαν ἐπίσης τὴν πατρικὴν των περιουσίαν, καὶ ἐπῆρε καθὲν γροσ. 428 . 32· Πόση λοιπὸν ἦτο ὅλη ἡ περιουσία;

γρ.	428 . 32
	4
γρ.	1715 . 8

§. 40. Διὰ νὰ διαιρέσῃς συμμιγῆ ἀριθμὸν, ἀκολούθει τὰ ἑξῆς.

Διαίρεσε πρῶτον τὸ μεγαλήτερον εἶδος, καὶ ἔπειτα τὸ μικρότερον· ἐὰν εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ πρώτου μείνῃ τι κατάλοιπον, μετάβαλέ το εἰς τὸ μικρότερον εἶδος, σύναψέ το μ᾽ αὐτὸ, καὶ κάμε τὴν διαίρεσιν.

Τέσσαρα παιδία θέλουν νὰ μοιράσουν γροσ. 1715 . 8· Πόσα θέλει λάβει καθέν; τὸ πηλίκον μᾶς λέγει γρ. 428 . 32.

4 |	1715 . 8	| 428, 32
	11	
	35	
	κατ. 3	
	40	
4 |	128	

§. 41. Αἱ δοκιμαὶ τούτων τῶν πράξεων γίνονται ὡσαύτως, καθὼς καὶ αἱ δοκιμαὶ τῶν ἀμιγῶν ἀριθμῶν.

Περὶ Κλασμάτων.

§. 42. Ἐὰν ὅλον τι, π. χ. τὸ γρόσιον διαιρέσῃς εἰς δύω ἢ τρία, ἢ πλειότερα ἴσα μέρη, καὶ λάβῃς ἓν ἢ πλειότερα ἀπ᾽ αὐτὰ τὰ μέρη, τὰ μέρη ταῦτα τοῦ ὅλου λέγονται κλάσμα.

§. 43. Πᾶν κλάσμα γράφεται μὲ δύω ἀριθμούς· ὁ εἷς φανερόνει εἰς πόσα μέρη ἐδιαιρέσαμεν τὸ ὅλον, καὶ ὀνομάζεται παρονομαςής· ὁ δεύτερος Πόσα μέρη ελάβαμεν, καὶ ὀνομάζεται ἀριθμητής· πρῶτον ἐκφράζομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἔπειτα τὸν παρονομαςὴν, καὶ γράφομεν ἐκεῖνον ἐπάνω, καὶ τοῦτον ὑποκάτω, καὶ μεταξύ των μίαν γραμμήν· π. χ. $\frac{3}{4}$ γρ. θέλει νὰ εἴπῃ τρία τέταρτα ἢ τεταρτημόρια τοῦ γροσίου· $\frac{4}{5}$ ὀκ. τέσσαρα πέμπτα ἢ πεμπτημόρια τῆς ὀκᾶς κτλ.

§. 44. Εἰς τὰ κλάσματα παρατηροῦμεν τὰ ἑφεξῆς.

α' Κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαςὴν, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὅλον. π. χ. $\frac{4}{4}$ γ. εἶναι ἴσον μὲ ἓν γρόσιον.

β' Κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαςὴν, εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ὅλον. π. χ. $\frac{3}{4}$ γρ. τοῦτο ὀνομάζεται καὶ γνήσιον κλάσμα.

γ' Κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς ὑπερέχει τὸν παρονομαςὴν, εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ ὅλον, καὶ ὀνομάζεται νόθον κλάσμα· π. χ. $\frac{6}{4}$ γρ. ἀξίζει πλέον παρὰ ἓν γρόσιον.

δ' Ἐὰν εἶναι ἀριθμὸς ὁλόκληρος καὶ κλάσμα ὁμοῦ, λέγεται συμμιγὲς κλάσμα ἢ συμμιγὴς ἀριθμὸς (§. 35.)· π. χ. $3\frac{1}{4}$ γρ. $5\frac{1}{2}$ οκάδες, ἤγουν 3 ὁλόκληρα γρόσια καὶ $\frac{1}{4}$ γροσίου, 5 ὁλόκληροι ὀκάδες καὶ $\frac{1}{2}$ ὀκᾶς.

§. 45. Τὸ κλάσμα δὲν εἶναι ἄλλο τίποτε, εἰμὴ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαςοῦ· π. χ. $\frac{12}{6}$ γρ. σημαίνει, ὅτι δώδεκα γρόσια πρέπει νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἓξ ἴσας μοίρας· τὰ νόθα κλάσματα διαιροῦνται πραγματικῶς, καὶ ἐὰν μείνῃ τι, γίνεται ἀριθμητὴς κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ πηλίκον, π. χ. $\frac{12}{6}$ γρ. κάμνουν 2 γρόσια· $\frac{13}{4}$ γρ. κάμνουν γρ. $3\frac{1}{4}$.

§. 46. Ἐὰν θέλεις ὁλόκληρον ἀριθμὸν νὰ τὸν παραςήσῃς εἰς σχῆμα κλάσματος μὲ ὁποιονδήποτε παρονομαςήν· πολλαπλασίασε τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸν παρονομαςὴν, καὶ κάμε τὸ γινόμενον ἀριθμητὴν, εἰς τὸν ὁποῖον ὑπόγραψε τὸν παρονομαςήν· π. χ. 2 γρόσια νὰ τὰ κάμῃς τρίτα, πολλαπλασίασε 2 μὲ 3, καὶ εἰς τὸν 6 ὑπόγραψε τὸν 3, καὶ θέλεις λάβειν $\frac{6}{3}$.

§. 47. Ἐὰν συμμιγὲς κλάσμα (§. 44. δ') θέλεις νὰ τὸ γράψῃς ὡς ἓν νόθον κλάσμα, πολλαπλασίασε τὸν ὁλόκληρον ἀριθμὸν μὲ τὸν παρονομαςὴν τοῦ κλάσματος, τὸ δὲ γινόμενον σύναψε μὲ τὸν ἀριθμητὴν, εἰς τὸν ὁποῖον ὑπόγραψε τὸν παρονομαςὴν τοῦ κλάσματος· $2\frac{1}{2}$ γρόσια, π. χ. γίνονται μ' αὐτὸν τὸν τρόπον $\frac{5}{2}$; καὶ $6\frac{3}{4}$ γίνονται $\frac{27}{4}$.

§. 48. Πολλάκις τὸ κλάσμα τοῦ μεγαλητέρου εἴδους ἀξίζει μονάδας τινὰς τοῦ μικροτέρου· $\frac{1}{5}$ γρ. π. χ. ἀξίζει 8 παράδες, $\frac{1}{8}$, 5 κτλ. Εἰς τοιαύτας λοιπὸν περιςάσεις, ὅταν θέλῃς νὰ μάθῃς. Τί ἀξίζει τὸ κλάσμα, πολλαπλασίασε τὸν ἀριθμητὴν μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ μεγαλήτερον εἶδος, καὶ διαίρεσε τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαςοῦ.

Παράδειγμα. Πόσους παράδας κάμνουν $\frac{3}{5}$ γροσίου; πολλαπλασίασε τὸν ἀριθμητὴν 3 μὲ τὸν 40, καὶ τὸ γινόμενον 120 διαιρέσας μὲ τὸν 5 λαμβάνεις 24 παράδες.

§. 49. Ὅταν εἰς τὴν διαίρεσιν ἀπομένῃ τι κατάλοιπον (§. 30), ἐμποροῦμεν νὰ τὸ παραςήσωμεν ὡς κλάσμα· καὶ ὅταν ἐπιδέχεται ἀναγωγὴν εἰς μικρότερον εἶδος, νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν. Ἐὰν π. χ. μοιρασθῶσι 5 ἄνθρωποι 22 γρόσια, θέλουν λάβειν 4. γρόσια καθεὶς, καὶ $\frac{2}{5}$, ἤγουν $\frac{80}{5}$ παράδες, τὸ ὁποῖον εἶναι 16 Παράδες.

§. 50. Παντὸς κλάσματος, ὅταν καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαςὴς πολλαπλασιασθῶσι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ τιμὴ δὲν μεταβάλλεται· $\frac{2}{5}$ γρ. π. χ. ἐὰν πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ 2 καὶ ὁ 5 μὲ τὸν 2 γίνεται κλάσμα $\frac{4}{10}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{5}$ γροσίου· διότι ἓν πέμπτον γροσίου εἶναι 8 παράδες, καὶ 2 πέμπτα εἶναι 16· ἀλλ᾽ ὡσαύτως 16 παράδες εἶναι καὶ τέσσαρα δεκατημόρια τοῦ γροσίου.

§. 51. Ἐὰν κλάσματος διαιρεθῇ καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἡ τιμήτου μένει ἀμετάβλητος· διότι $\frac{8}{20}$ γροσίου ἰσοδυναμοῦ μὲ 16 παράδες (§. 48)· ἐὰν δὲ διαιρέσῃς τὸν 8 μὲ 4, καὶ τὸν 20 μὲ 4, λαμβάνεις κλάσμα $\frac{2}{5}$, τὸ ὁποῖον καὶ αὐτὸ ἰσοδυναμὴ μὲ 16 παράδες.

§. 52. Πᾶν λοιπὸν κλάσμα διὰ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ μὲ τὸν αὐτον ἀριθμὸν μικρύνει τοὺς ὅρουςτου, χωρὶς νὰ μεταβάλλῃ τὴν τιμήν του· ἐμποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν τοῦτο σύντμησιν τοῦ κλάσματος. Διὰ νὰ συντέμωμεν λοιπὸν τὸ κλάσμα, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὅς τις νὰ εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, διὰ νὰ τοὺς διαιρέσωμεν μὲ αὐτὸν, καὶ νὰ συςήσωμεν νέον κλάσμα μὲ τὰ πηλίκα.

§. 53. Πολλάκις εὑρίσκομεν τὸν κοινὸν διαιρέτην μὲ μόνην τὴν παρατήρησιν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ· διότι ἐξεύρομεν ἐκ πείρας τὰ ἐφεξῆς.

α΄ Ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ὁ τελευταῖος χαρακτὴρ εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς (ἄρτιος δὲ ἀριθμὸς λέγεται ὁ διαιρούμενος εἰς δύω ἴσα μέρη, καὶ ὀνομαζόμενος κοινότερα ζυγὸς, τοῦ ὁποίου ἐναντίος εἶναι ὁ περιττὸς, ἢ μονὸς), ἤγουν, 2, 4, 6, 8, 10, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 2.

β΄ Ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ὁ τελευταῖος χαρακτὴρ εἶναι ἀριθμὸς περιττὸς, ἤγουν 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 κτ, δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 2.

γ΄ Ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου διαιρεῖται διὰ 3 τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς διὰ 3. διαιροῦνται λοιπὸν διὰ 3 οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοί· 3, 6, 9, 12, 15, 21, 42, 813, 723, κτ. ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων καθενὸς τούτων, λαμβανόμενον χωρὶς παρατήρησιν μονάδων καὶ δεκάδων κτ. τὸ ἄθροισμὸς π. χ. τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ 7 καὶ 2 καὶ 3, τὸ 12 διαιρεῖται διὰ 3.

δ' Ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου οἱ δύω τελευταῖοι χαρακτῆρες ὡς εἷς ἀριθμὸς θεωρούμενος διαιροῦνται διὰ 4, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς διὰ 4· π. χ. 124 διαιρεῖται διὰ 4, ἐπειδὴ 24 διαιρεῖται διὰ 4· τοιοῦτοι εἶναι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 48, 108, 1844, 2400.

ε' Ἀριθμὸς τελειόνων εἰς 5 ἢ 0, διαιρεῖται διὰ 5· τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 315 κτλ.

ς' Ἀριθμὸς ἄρτιος (α'), τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων διαιρεῖται διὰ 3 (γ'), διαιρεῖται διὰ 6· τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 6, 18, 432, 2162.

Οἱ διὰ τοῦ 7 διαιρετοὶ ἀριθμοὶ δὲν διακρίνονται εὔκολα· πρέπει λοιπὸν νὰ δοκιμάζομεν τὴν δὲ αὐτοῦ διαίρεσίν των.

ζ' Ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου οἱ τρεῖς τελευταῖοι χαρακτῆρες ὡς εἷς ἀριθμὸς θεωρούμενοι διαιροῦνται διὰ 8, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς διὰ 8· π. χ. 18408 εἶναι διαιρετὸς διὰ 8, ἐπειδὴ 408 διαιρεῖται διὰ 8.

η' Ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων διαιρεῖται διὰ 9, διαιρεῖται καὶ αὐτὸς διὰ 9. τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι 9, 18, 27, 3645, 7101.

θ' Ἀριθμὸς ἔχων πρὸς δεξιὰν ἓν μηδενικὸν, ἢ δύω, ἢ τρία κτλ, διαιρεῖται διὰ 10, 100, 1000 κτλ. διαιροῦνται λοιπὸν ἀκριβῶς.

40 μὲ 10
700 μὲ 10 καὶ 100
2000 μὲ 10 καὶ 100 καὶ 1000

§. 54. Μὲ ταύτας τὰς παρατηρήσεις εὑρίσκων τὸν κοινὸν διαιρέτην ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ δύνασαι νὰ συντέμῃς τὸ κλάσμα· ἔςω νὰ συντμηθῇ, π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{360}{720}$· ἐπειδὴ οἱ ὅροι του εἶναι ἄρτιοι ἀριθμοὶ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων καθενὸς διαιρεῖται διὰ 3 (ἀνωτ. ϛ'), εἶναι λοιπὸν κοινὸς διαιρέτης ὁ 6, διὰ τοῦ ὁποίου φέρεται τὸ κλάσμα εἰς $\frac{60}{120}$· καὶ τοῦτο εἰς $\frac{6}{12}$ (θ'), καὶ τοῦτο τελευταῖον εἰς $\frac{1}{2}$ (ϛ').

§. 55. Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι πολλὰ μεγάλοι, αἱ παρατηρήσεις αὗται γίνονται δυσμεταχείριςοι, καὶ τότε πρέπει νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν ἐφεξῆς μέθοδον εἰς εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ διαιρέτου.

α' Διαίρεσε τὸν παρονομαςὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ· καὶ ἐὰν δὲν μείνῃ κατάλοιπον· ὁ ἀριθμητὴς εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ ἑαυτοῦ καὶ τοῦ παρονομαςοῦ.

β' Ἐὰν μείνῃ τι κατάλοιπον, διαίρεσε δι' αὐτοῦ τὸν πρότερον διαιρέτην· καὶ ἐὰν καὶ εἰς αὐτὴν τὴν διαίρεσιν μείνῃ κατάλοιπον, διαίρεσε πάλιν δι' αὐτοῦ τὸν διαιρέτην τῆς δευτέρας διαιρέσεως· καὶ κάμνε τοῦτο ἐφεξῆς, ἕως οὗ νὰ εὕρῃς διαιρέτην ἀκριβῆ εἰς μίαν διαίρεσιν· μ' αὐτὸν διαιροῦνται ἀκριβῶς καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαςὴς τοῦ δοθέντος κλάσματος.

γ' Ἐὰν ἐπαναλαμβάνων τὰς διαιρέσεις καταντήσῃς εἰς κατάλοιπον τὴν μονάδα, τὸ κλάσμα δὲν συντέμνεται, ἐπειδὴ κοινὸς διαιρέτης δὲν εὑρίσκεται ἄλλος, εἰμὴ ἡ 1. Τὰ ἐφεξῆς παραδείγματα ἐξηγοῦσι σαφέςερα τὰ εἰρημένα.

Παράδειγμα Α'. Ἔςω νὰ συντμηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{663}{1105}$

Διαιρέτης Διαιρετέος

	663	1105	1			
κατάλ.	442	663	1			
	κατάλ.	221	442	2		
			000			

ἄρα διὰ 221 διαιρεθὲν τὸ κλάσμα καὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαςὴν γίνεται $\frac{3}{5}$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α Β'. Νὰ συντέμης τὸ κλάσμα $\frac{37}{101}$ γρ.

Ἐπειδὴ διὰ τῆς πράξεως λαμβάνομεν κοινὸν διαιρέτην τὴν 1, τὸ κλάσμα δὲν δύναται νὰ συντμηθῇ.

37	101	12				
	27	37	1			
		10	27	2		
			7	10	1	
				3	7	2
					1	

§. 56. Ἐὰν δὲν συντέμνεται ἀκριβῶς τὸ κλάσμα, ἐμπορεῖ νὰ συντμηθῇ περίπου, ἤγουν μὲ κάποιαν μὲν ἔλλειψιν, ἀλλ᾽ ὄχι πολλὰ μεγάλην· γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαςὴν ἀποῤῥίψωμεν ἰσαρίθμους ἀπὸ τὰ δεξιὰ χαρακτῆρας· π. χ. $\frac{2113}{4135}$ εἶναι περίπου $\frac{2}{4}$, ἢ $\frac{1}{2}$ γρ.

§. 57. Δύω κλάσματα ἐμπορεῖς νὰ φέρης εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαςὰς χωρὶς νὰ βλάψης τὴν τιμήν των· ἂς εἶναι $\frac{2}{3}$, καὶ $\frac{3}{4}$· πολλαπλασίασε λοιπὸν τοῦ πρώτου τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαςὴν μὲ τὸν παρονομαςὴν τοῦ δευτέρου, καὶ θέλει γενῇ τὸ πρῶτον $\frac{8}{12}$· πολλαπλασίασε ἔπειτα τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαςὴν τοῦ δευτέρου μὲ τὸν παρονομαςὴν τοῦ πρώτου. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον τὸ μὲν πρῶτον θέλει γενῇ $\frac{8}{12}$, τὸ δὲ δεύτερον $\frac{9}{12}$· ὅτι δὲ ἡ τιμή των μένει, εἶναι φανερόν· διότι τοῦ μὲν πρώτου ἀριθμητὴς καὶ παρονομαςὴς ἐπολλαπλασιάσθησαν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4· τοῦ δὲ δευτέρου, μὲ τὸν 3 (§. 50.).

§. 58. Ὅταν τρία κλάσματα θέλης νὰ τὰ φέρης εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαςὰς, πολλαπλασίασε ἀριθμητὴν καὶ παρονομαςὴν τοῦ πρώτου μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομαςῶν τῶν δύω ἄλλων, καὶ τοὺς τοῦ δευτέρου μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομαςῶν τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου, καὶ τοὺς τοῦ τρίτου μὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομαςῶν τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου· μὲ τοῦτον τὸν τρόπον τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ματαβάλλονται εἰς $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, χωρὶς νὰ χάσουν τὴν τιμήντων (§. 50.). Ὡσαύτως ἐμπορεῖς νὰ φέρῃς καὶ πλειότερα κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαςάς.

§. 59. Διὰ πλειοτέραν εὐκολίαν τῶν ἐκθέσεων ἐξηγοῦμεν ἐνταῦθα σύμβολά τινα, τὰ ὁποῖα παραλαμβάνονται εἰς τὰς πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς. Τὸ + σημαίνει σύναψιν τῶν ἀριθμῶν μεταξὺ τῶν ὁποίων γράφεται, καὶ ἀναγινώσκεται καί· τὸ — σημαίνει ὅτι ὁ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν εἰς τ᾽ἀριστερά· καὶ ἀναγινώσκεται πλήν· τὸ = σημαίνει ἴσον. Κατὰ τοῦτον λοιπὸν τὸν τρόπον $3 + 5 = 8$, καὶ $8 - 3 = 5$· θέλει νὰ εἴπῃ ὅτι 3 συναπτόμενα μὲ 5 εἶναι ἴσα μὲ τὸν 8, καὶ 8 πλὴν τοῦ 3 εἶναι ἴσον μὲ τὸν 5· τὸ × σημαίνει πολλαπλασιασμὸν, καὶ ἀναγινώσκεται ἐπί π. χ. $3 \times 5 = 15$· τὸ : σημαίνει διαίρεσιν, καὶ ἀναγινώσκεται διά· π. χ. $8 : 4 = 2$, ἤγουν 8 διαιρούμενος διὰ 4 δίδει πηλίκον 2· ἀλλ᾽ ἡ διαίρεσις σημαίνεται καὶ μὲ τὸ κλάσμα, οὕτω $\frac{8}{4} = 2$ (§. 45.).

§. 60. Διὰ νὰ συνάψῃς κλάσματα, ἀκολούθει τὰ ἐφεξῆς.

α΄ Φέρε τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαςάς· διότι κατ᾽ ἄλλον τρόπον δὲν ἐμποροῦν νὰ συναφθοῦν.

β΄ Λάβε τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμητῶν, καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ γράψε τὸν παρονομαςὴν τὸν κοινόν.

γ΄ Σύντεμε τὸ κλάσμα.

Παράδειγμα. Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{6}$; Ταῦτα ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰ $\frac{60}{90}$, $\frac{54}{90}$, $\frac{15}{90}$· λοιπὸν $\frac{60}{90} + \frac{54}{90} + \frac{15}{90} = \frac{129}{90} = 1\,\frac{39}{40}$ (§. 44.).

§. 61. Ἐὰν εἶναι τὰ κλάσματα συμμιγῆ, (§. 44. δ΄.), σύναψε πρῶτον τὰ κλάσματα, ὡς εἴπαμεν· ἔπειτα τοὺς ὁλοκλήρους ἀριθμούς· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι νόθον κλάσμα, σύναψε τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐκβαίνοντα ὁλόκληρον ἀριθμὸν (§. 44.) μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ὁλοκλήρων.

Παράδειγμα Ἐμεταχειρίσθη ἕνας μόσχου δράμια $1\frac{1}{2}$, καὶ $2\frac{2}{3}$, καὶ $5\frac{3}{4}$· Πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιόν των· σύναψε πρῶτον τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{12}{24}+\frac{16}{24}+\frac{18}{24}=\frac{46}{24}=1\frac{22}{24}=1\frac{11}{12}$· σύναψε ἔπειτα τοὺς ὁλοκλήρους, $1+2+5=8$· καὶ $8+1\frac{11}{12}=9\frac{11}{12}$, σχεδὸν 10.

§. 62. Ὅταν ἀφαιρῇς κλάσμα ἀπὸ κλάσμα, ἀκολούθει τὰ ἑξῆς.

α΄ Φέρε τὰ κλάσματα εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

β΄. Ἀφαίρεσε τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τοῦ μειωτέου, καὶ εἰς τὴν διαφοράν των ὑπόγραψε τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἔσω νὰ ἀφαιρέσῃς $\frac{1}{2}$ ἀπὸ $\frac{3}{4}$, ἤγουν $\frac{4}{8}$ ἀπὸ $\frac{6}{8}$ (§. 56). ἄρα $\frac{6}{8}-\frac{4}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

§. 63. Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι συμμιγῆ, (§. 43 δ΄), ἀφαίρεσε πρῶτον τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα, καὶ ἔπειτα τὸ ὁλόκληρον ἀπὸ τὸ ὁλόκληρον· π. χ. Ἐχρεώστει ἕνας $12\frac{3}{4}$ γρόσια, καὶ ἔδωκεν $7\frac{1}{2}$. Πόσα χρεοστεῖ ἀκόμη; Πρῶτον $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{6}{8}-\frac{4}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$· ἔπειτα, $12-7=5$· χρεωστεῖ λοιπὸν γρόσια $5\frac{1}{4}$.

§. 64 Ὅταν ζητῇς νὰ ἀφαιρέσῃς κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον ἀριθμὸν, δανείσου μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον, καὶ μετάβαλέ την εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος (§. 45.)· καὶ ἀφαίρεσε ἀπ᾽ αὐτοῦ τὸ ἀφαιρετέον κλάσμα. Ἐὰν π. χ. ἀπὸ 5 δράμια ἀφαιρέσῃς $\frac{1}{5}$ δρ. πόσον μένει;

Δανείσου ἀπὸ τὸν 5 μίαν 1, καὶ μετάβαλέ την εἰς $\frac{5}{5}$· $\frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$· μένουν λοιπὸν $4\frac{4}{5}$ δρ.

§. 65. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$ π. χ. μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν τὸν 5· πολλαπλασίασε τὸν ἀριθμητήν του μὲ τὸν 5, καὶ ἄφες του τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· $\frac{3}{5} \times 5 = \frac{15}{5}$.

§. 66. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς συμμιγὲς κλάσμα μὲ κλάσμα, φέρε εἰς ἓν κλάσμα τὸ συμμιγὲς, καὶ πολλαπλασίασε τὰ κλάσματα ἀριθμητὴν μὲ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν μὲ παρονομαστήν. Ἐὰν π. χ. πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $1\frac{3}{4}$, πόσον τιμῶνται $\frac{3}{4}$ πήχεως; $1\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{21}{16} = 1\frac{5}{16}$.

§. 67. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς συμμιγὲς κλάσμα μὲ συμμιγὲς, φέρε καὶ τὸ ἓν εἰς ἓν κλάσμα, καὶ τὸ ἄλλο, καὶ πολλαπλασίασέ τα ἀριθμητὴν μὲ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν μὲ παρονομαστήν. Ἐὰν π. χ. ἡ ὀκὰ τοῦ ὑδραργύρου τιμᾶται $6\frac{1}{2}$ γρ. πόσον τιμῶνται $2\frac{3}{4}$ ὀκάδες; $6\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4} = \frac{13}{2} \times \frac{11}{4} = \frac{143}{8} = 17\frac{7}{8}$ γρ.

§. 68. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσῃς κλάσμα μὲ κλάσμα, πολλαπλασίασέ τα ἀριθμητὴν μὲ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν μὲ παρονομαστήν· καὶ λοιπὸν $\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{30}$. Ἐὰν π. χ. μία ὀκὰ ὀψάρια τιμῶνται $\frac{3}{4}$ γροσίου, πόσον τιμῶνται $\frac{2}{3}$ ὀκ; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

§. 69. Διὰ νὰ διαιρέσῃς κλάσμα μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν, πολλαπλασίασε δι' αὐτοῦ τὸν παρονομαστήν του. Ἐὰν π. χ. 3 μοιρασθῶσι $\frac{3}{4}$ γροσίου, πόσον θέλει λάβειν καθείς; $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4 \times 3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

§. 70. Διὰ νὰ διαιρέσῃς συμμιγὲς κλάσμα διὰ συμμιγοῦς, α' φέρε τὸν διαιρετέον εἰς ἓν κλάσμα, ὡσαύτως καὶ τὸν διαιρέτην· β' ἀντίστρεψε τοῦ διαιρέτου τοὺς ὅρους, ἤγουν κάμε τὸν ἀριθμητὴν παρονομαστὴν, καὶ τὸν παρονομαστὴν ἀριθμητήν· γ' πολλαπλασίασε τὸν διαιρετέον μὲ τὸν ἀντιστραφέντα οὕτω διαιρέτην.

Ἐὰν π. χ. $4\frac{1}{2}$ πήχεις πανίου τιμῶνται γρόσια $48\frac{3}{8}$, πόσον τιμᾶται ἡ πῆχυς; $48\frac{3}{8} : 4\frac{1}{2} = \frac{387}{8} : \frac{9}{2} = \frac{387}{8} \times \frac{2}{9} = \frac{774}{72} = 10\frac{3}{4}$.

§. 71. Ὅταν δοθῇ ἀριθμὸς μικροτέρου εἴδους συμμιγὴς, καὶ θέλεις νὰ μάθῃς Ποῖον μέρος τοῦ μεγαλητέρου εἴδους εἶναι· ἀνάγαγε τὸ μικρότερον εἶδος εἰς ἓν κλάσμα, καὶ μετάβαλε τὸ μεγαλήτερον ὅλον εἶδος εἰς ὁμώνυμα μέρη, καὶ μὲ αὐτὰ διαίρεσε ἐκεῖνα.

Παράδειγμα. Ποῖον μέρος τοῦ γροσίου εἶναι παρ. $32\frac{1}{2}$; μετάβαλε λοιπὸν τὸ $32\frac{1}{2}$ εἰς $\frac{65}{2}$, ὁμοίως μετάβαλε εἰς μισοὺς καὶ τοὺς 40 παράδες τοῦ γροσίου, καὶ κάμετους 80· καὶ διαίρεσε τοὺς 65 διὰ 80· εἶναι λοιπὸν $\frac{65}{80} = \frac{13}{16}$.

§. 72. Τῶν κλασμάτων αἱ πράξεις δοκιμάζονται, καθὼς καὶ αἱ τῶν ἀκαιρέων, ἤγουν ὁ πολλαπλασιασμὸς διὰ τῆς διαιρέσεως, καὶ ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ πολλαπλασιαμοῦ· αἱ δοκιμαὶ αὗται πρέπει νὰ ἐπέχουν τόπον ἀποδείξεως διὰ τοὺς πρωτοπείρους, καὶ πρέπει νὰ τὰς κάμνουν διὰ νὰ βεβαιόνωνται τὴν ἀλήθειαν τῶν πράξεων, καὶ μάλιστα εἰς τὰ κλάσματα.

§. 73. Πρὶν τελειώσωμεν τὸ παρὸν μέρος, κρίνομεν ἀναγκαῖον νὰ εἴπωμεν καὶ Πῶς εὑρίσκεται ἡ μέση τιμὴ πολλῶν πραγμάτων διαφόρου τιμῆς· ἢ, καθὼς συνηθίζομεν νὰ λέγωμεν, πόσον ἔρχεται ἕνα μὲ τὸ ἄλλο. Ὅταν λοιπὸν δοθῶσι τιμαὶ διαφόρων πραγμάτων, σύναψέ τας ὅλας, καὶ διαίρεσε τὸ κεφάλαιον μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πραγμάτων.

Ἐξώδευσα, π. χ. τὸν Σεπτέμβριον μῆνα γρ. 200 · 14, τὸν Ὀκτώβριον γρ. 150. 32, τὸν Νοέμβριον γρ. 130. 12, τὸν δὲ Δεκέμβριον γρ. 180. 37. Πόσον ἔρχεται ὁ μῆνας ἕνας μὲ τὸν ἄλλον; σύναψε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, καὶ τὸ κεφάλαιον διαίρεσε μὲ τὸν 4 ἀριθμὸν τῶν μηνῶν· ἔρχεται λοιπὸν καθεὶς μῆνας γρόσια 165 παρ. 22 καὶ $\frac{3}{4}$ παρᾶ.

γρ.	200	14
	150	32
	130	12
	180	37

$4 \mid 662 \quad 15 \mid 165,\ 22\frac{3}{4}$

26

22

$2 \times 40 = 80 + 15 = 95 . \frac{95}{4}$

Περὶ Λόγου καὶ Ἀναλογίας καὶ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν.

§. 74. Ὅταν συγκρίνῃς δύω ἀριθμοὺς διὰ νὰ μάθῃς πόσαις φοραῖς περιέχεται ὁ εἷς εἰς τὸν ἄλλον, τότε λέγεις, ὅτι ζητεῖς νὰ μάθῃς Τίνα λόγον ἔχει ὁ εἷς εἰς τὸν ἄλλον. Λόγος λοιπὸν ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν εἶναι τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἐκβαίνει ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ ἄλλου.

§. 75. Εἰς πάντα λόγον ἀπαιτοῦνται δύω ἀριθμοὶ, οἱ ὁ ὁποῖοι ὀνομάζονται ὅροι· εἷς ἐξ αὐτῶν γράφεται πρῶτος καὶ ὀνομάζεται ἡγούμενος ὅρος· μετ᾽ αὐτὸν γράφεται τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως (:), καὶ πρὸς δεξιὰν αὐτοῦ γράφεται ὁ ἄλλος ὅρος, ὅς τις λέγεται ἑπόμενος· ὁ λόγος λοιπὸν, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 2 πρὸς τὸν 6 γράφεται οὕτω· 2 : 6. ἐδῶ ὁ λόγος εἶναι 3, ἐπειδὴ ὁ 2 περιέχεται εἰς τὸν 6 τρίς· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται καὶ πηλίκον τοῦ λόγου.