σει· ἄρα $\vartheta = \eta$· ἄρα ϗ τὸ τόξον ΑΕ = ΕΓ· τῦτ' ἔςι τὸ τόξον ΑΕ = ½ ΑΓ = ½ ΒΔ.

340. ΠΟΡΙΣΜΑ ΚΓ΄. Οὐδὲν ἄρα ξένον, εἴπερ, κατόπτρυ περιαγομένυ, πάντα τὰ ἐν αὐτῷ ὁρώμενα φαίνεται περιςρεφόμενα μεγίςῳ τάχει, ϗ τοσύτῳ τάχιον ἢ τὸ κάτοπτρον, ὅσῳ μᾶλλόν εἰσι τῦ κατόπτρυ διέχοντα· τόξον γὰρ γράφυσι διπλάσιον, ὃ γράφει τὸ κάτοπτρον, ϗ τόξον περιφερείας, ἧς ἡ ἀκτὶς ἐςι τὸ αὐτῶν ἀπὸ τῦ κατόπτρυ ἀπόςημα· Διὰ τῦτο δὲ, ϗ ὅταν ἄγγος ὕδατος πλῆρες, ᾧ ἐνορᾶται τὸ τῦ ἡλίυ ἢ τῆς σελήνης εἴδωλον, κἂν βραχὺ κινήσωμεν, τὸ εἴδωλον φαίνεται μέγα διατρέχον διάςημα.

341. ΠΟΡΙΣΜΑ ΚΔ΄. Ἔςιν ἰδεῖν διὰ δύω ἐπιπέδων κατόπτρων τὸ εἴδωλον τῦ ὁρωμένυ φερόμενον ἅμα φορὰς ἐναντίας· περιεχέσθω γὰρ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων κατόπτρων ΑΔ, ΑΒ (σχ. 75) γωνία ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ, ϗ τὸ ἐπὶ τῆς ΓΕ ὁρατὸν Ζ τῆς πρὸς ὀρθὰς τῷ ΑΔ φερέσθω ἐπὶ τὰ Ε· ἐπεὶ ὖν κινύμενον, ἀπὸ μὲν τῦ ΑΔ κατόπτρυ ἀφίςαται, ἀπὸ δὲ τῦ ΑΒ ἴσον ἀπέχει· ϗ τὸ εἴδωσον ἄρα αὐτῦ, ἀφίςαται μὲν τῦ κατόπτρυ ΑΔ, φέρεται δὲ ἐπὶ τὰ Β τῦ ΑΒ κατόπτρυ· ὐκῦν φανήσεται φερόμενον ἅμα φορὰς ἐναντίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ κοίλων ϗ κυρτῶν ἐνόπτρων.

342. Ἐξ ὧν φθάσαντες εἰρήκαμεν, εὐμαρῶς ἄντις κατίδοι τῶν ἐπενεχθησομένων τὸν λόγον.

343. α΄. Εἴρηται ἤδη περὶ τῶν κοίλων παραβολικῶν, ἐλλειπτικῶν, καὶ ὑπερβολικῶν ἐνόπτρων, ὅσον ἥκει εἰς τὴν θέσιν τῆς ἑστίας αὐτῶν, καὶ εἰς τὴν καυστικὴν ἰδιότητα (Τ. ψ. Γεωμ. 34. κτ. 136, κτλ., 231. Τόμ. Γ΄.)· περὶ δὲ τῶν ἄλλων αὐτῶν λόγων, καθ᾽ οὓς ἀμέλει τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου ἐξαλλοιοῦται κτλ. δυνατὸν ἀναλόγως αὐτοῖς ἐφαρμόσαι τὰ εἰρημένα περὶ τῶν κοίλων σφαιρικῶν ὑέλων.

344. β΄. Ἐμφαινέτω γὰρ τὸ ΟΙν σχῆμα (σχ. 50) κάτοπτρον κοῖλον σφαιρικὸν, ὡς τὴν ΟΙν καμπύλην τόξον ὑπάρχειν κενῆς, εἴτ᾽ οὖν ἀερίου σφαίρας, ἧς κέντρον τὸ Κ· αἱ τοίνυν ἀκτῖνες Κα, Κδ, κτλ. αἱ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐπιφανείᾳ ἱστάμεναι (Γεωμ. 152. Τόμ. Β΄.), κάθετοι τῆς προσπτώσεως ἀκούουσιν (321)· ἡ δὲ ἀκτὶς ΚΙ, ἡ δίχα τέμνουσα τὸ τόξον Ον, ἡμιάξων, ὃς ἑκατέρωθεν ἀορίστως προεκβληθεὶς, ἄξων ὀνομάζεται τοῦ κατόπτρου.

345. Ἐπινοηθήτωσαν δύο παράλληλοι ἀκτῖνες Αα, Δδ ἐπιπίπτουσαι τοῖς σημείοις α, δ, τοῖς ἴσον ἀπέχουσι τοῦ ἄξονος· ἐπεὶ οὖν αὗται τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ἴσην ποιοῦσι τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, συμπεσοῦνται ἐν τῷ αὐτῷ τοῦ ἄξονος σημείῳ Ε· συναθροισθήσονται ἄρα ἐν τῷ σημείῳ τούτῳ· ἐὰν δὲ τὸ τόξον αδ λίαν ὑποτεθῇ μικρὸν, καὶ ἐπινοηθῇ κύλινδρος σύνθετος ἐκ τούτων τῶν παραλλήλων φωτοφόρων ἀκτίνων τῶν τῷ κατόπτρῳ ἐπιπεσουσῶν, οὗ τὸ μικρὸν τόξον αδ εἴη τῆς βάσεως διάμετρος, πᾶσαι αἱ παράλληλοι αὗται ἀκτῖνες γωνίαν ποιήσουσιν, ἐκλαμβανομένην ὡς πρὸς αἴσθησιν ἴσην τῇ ἐπὶ τοῦ μικροῦ τόξου συνισταμένῃ· δυνατὸν γὰρ τὸ τόξον ὡς εὐθεῖαν γραμμὴν ἐκδέξασθαι, καὶ τοσούτῳ μᾶλλον, ὅσῳ ἔλαττον εἴη τὸ τόξον· ἅπασαι ἄρα αἱ παράλληλοι αὗται ἀκτῖνες συμπεσοῦν-

ται, εἴτ' οὖν συναφθήσονται ὡς πρὸς αἴσθησιν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

346. Ἐὰν ἡ πρὸς τὸ κοῖλον κάτοπτρον ΖΒΙ ἐπιπεσοῦσα ἀκτὶς ΓΙ (σχ. 76) παράλληλος ᾖ τῷ ἄξονι ΑΒ, ἡ δὲ κλίσις τῆς ἐπιπεσούσης ΓΙΚ = 60°, ἡ ἀνακλασθεῖσα συμπεσεῖται αὐτῷ ἐπὶ τὸν τοῦ κατόπτρου πόλον Β· ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ΚΙΒ, ΙΚΒ ἴση τῇ ΚΙΓ, ἡ μὲν διὰ τὴν ἀνάκλασιν, ἡ δὲ διὰ τὰς παραλλήλους ΓΙ, ΑΒ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΙΒ, ΙΚΒ ἴση 60°· οὐκοῦν καὶ ἡ ΚΒΙ = 60°· ἡ ἄρα ΚΒ ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΚΙ· ὥστε τὸ σημεῖον Β, ἐφ' ὃ ἡ ἀνακλασθεῖσα συμπίπτει τῷ ἄξονι, ὁ πόλος ἐστὶ τοῦ κατόπτρου.

347. Ἐὰν δὲ ἡ μὲν ἐπιπεσοῦσα ΗΖ παράλληλος ᾖ τῷ ἄξονι ΑΒ, ἡ δὲ κλίσις τῆς ἐπιπεσούσης ΗΖΚ < 60°, ἡ τῆς ἀνακλασθείσης, καὶ τοῦ ἄξονος σύμπτωσις Ε ἔλαττον τεταρτημορίου αὐτοῦ τοῦ ἄξονος ἀπέχει ἀπὸ τῆς περιφερείας· ἀνακεκλάσθω γὰρ ἡ ΗΖ ἐπὶ τὸ Ε, καθάπερ ἡ ΖΕ· οὐκοῦν ἡ ὑπὸ ΗΖΚ = ΚΖΕ· ἀλλ' ἡ ΗΖΚ = ΖΚΒ· ἄρα καὶ ἡ ΚΖΕ = ΖΚΒ· διόπερ καὶ ΖΕ = ΚΕ· ἀλλὰ ΚΕ + ΕΖ > ΚΖ, καὶ ΚΒ = ΚΖ· ἄρα ΚΕ + ΕΖ > ΚΒ, εἴτ' οὖν ΚΕ + ΕΖ > ΚΕ + ΕΒ· ἀφαιρεθείσης οὖν τῆς ΚΕ, ἔσεται ΕΖ > ΕΒ, εἴτ' οὖν ΚΕ > ΕΒ· ὥστε ἡ ΕΒ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΒ, τοῦτ' ἔστιν ἐλάσσων τεταρτημορίου τῆς ὅλης ΑΒ· ἄρα κτλ.

348. Τὸ ΚΕ, τὸ μεταξὺ τοῦ κέντρου Κ καὶ τῆς συμπτώσεως Ε, πρὸς τὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἥμισυ ΚΔ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὅλον ἡμίτονον πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς κλίσεως τῆς ἐπιπεσούσης ΗΖΚ· ἡ γὰρ ΕΔ, ἀπὸ τοῦ Ε ἀχθεῖσα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΚ, δίχα ταύτην τέμνει· ληφθείσης δὲ τῆς ΚΕ ὡς ὅλου ἡμιτόνου, ἔσεται ἡ ΚΔ τὸ ὀρθὸν ἡμί-

τονον τῆς ΔΕΚ, τοῦτ' ἔστι τὸ συνημίτονον τῆς ΔΚΕ ἴσης τῇ ΗΖΚ· οὐκοῦν τὸ διάστημα ΚΕ πρὸς τὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἥμισυ ΚΔ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὅλον ἡμίτονον πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς κλίσεως ΗΖΚ.

349. Δῆλον μὲν οὖν, ὅτι πᾶσαι αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ κοῖλον κάτοπτρον ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες, καὶ τῷ ἄξονι αὐτοῦ παράλληλοι, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν οὐκ ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀλλήλαις συμπίπτουσιν· ἔνεστι δὲ, δοθείσης τῆς κλίσεως τῆς ἐπιπεσούσης, εὑρεῖν τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀπολαμβανόμενον τῆς ἡμιδιαμέτρου μέρος· ἔστω γὰρ ἡ ὑπὸ ΗΖΚ = 3°· οὐκοῦν καὶ ἡ ὑπὸ ΖΚΕ = 3°· διόπερ ἡ ὑπὸ ΔΕΚ = 87°· ὅθεν ἡ μὲν ΔΚ, ἡμίτονον οὖσα τῆς ὑπὸ ΔΕΚ, ἐστὶν = 9986295, ἡ δὲ ΚΕ, ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς ΚΔΕ, = 10000000· καὶ δὴ ΚΕ — ΚΔ = ΟΕ = 13705, ὅ ἐστι τὸ μέρος τῆς ἡμιδιαμέτρου τὸ ὑπὸ πασῶν τῶν ἀνακλασθεισῶν ἀκτίνων ἀπολαμβανόμενον· πᾶσαι γὰρ αἱ τῷ ἄξονι παράλληλοι ἀνακλασθεῖσαι, ἐπὶ τὸ μεταξὺ τοῦ Ε, καὶ Ο σημεῖα συμπεσοῦνται, ὡς ἐκ τοῦ (347) συνάγεται· ὥστε ΟΕ : ΚΒ :: 13705 : 19972590 (ἡ γὰρ ΚΒ ἴση τῇ ΚΖ τῇ διπλασίᾳ τῆς ΚΔ), τοῦτ' ἔστιν ΟΕ = $\frac{1}{1457}$ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΚΒ· ὅταν ἄρα ἡ τῆς ἐπιπεσούσης κλίσις ᾖ = 3°, τὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου μέρος τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ πασῶν τῶν ἀνακλασθεισῶν ἐστὶν = $\frac{1}{1457}$.

350. Ὅσῳ μείζων ἡ τῆς ἐπιπεσούσης ἀκτῖνος κλίσις ΗΖΚ, τοσούτῳ τὸ σημεῖον Ε ἔγγιον τῆς τοῦ κατόπτρου περιφερείας, ὡς δῆλον ἐκ τῶν δεδειγμένων (346, 347)· διόπερ τὸ μέρος τῆς ἡμιδιαμέτρου ΕΟ, τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ἀνακλασθεισῶν ἀκτίνων, τοσούτῳ μὲν γίνεται μεῖζον, ὅσῳ μείζων ἡ ὑπὸ ΗΖΚ, τοσούτῳ δ' ἔλασσον, ὅσῳ ἐλάσσων· ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΚ = ΖΚΒ· τῆς δὲ ΖΚΒ

μέτρον ἢ τοῦ κατόπτρου περιφέρεια ΖΒ· διὰ ταῦτα, ὅσῳ ἐλάσσων ἡ τοῦ κατόπτρου περιφέρεια, τοσούτῳ ἔλασσον τὸ μέρος ΟΕ, ὅσῳ δὲ μείζων, μεῖζον.

351. Ἐπεὶ οὖν πᾶσαι αἱ κατόπτρῳ, οὗ ἡ περιφέρεια $= 6^{\circ}$, ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες, καὶ παράλληλοι οὖσαι τῷ ἄξονι αὐτοῦ, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν τοσοῦτον συνενοῦνται, ὡς τέττ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἀπολαμβάνειν· διὰ τοῦτο, ὅπου συμπίπτουσι, πολλοῦ καὶ φλογιστικοῦ πυρὸς ἀποτελέσματα γίνεται.

352. Ἑστία καλεῖται ὁ τόπος, ἔνθα συνάπτονται ἢ συμπίπτουσιν αἱ ἀκτῖνες, δι᾽ ὧν ὁρᾶται σημεῖόν τι φωτοβόλον· καὶ πρὸς τοῦτο τὸ σημεῖον τὸ τοῦ ὁρατοῦ φαίνεται εἴδωλον· ὥστε α΄. ὁ ὀφθαλμὸς ὄψεται τὸ φωτοβόλον σημεῖον, καθ᾽ ὃ μέρος τοῦ ἄξονος συμπίπτουσιν αἱ παράλληλοι ἀκτῖνες, αἱ τὸν εἰρημένον φωτοφυῆ κύλινδρον συντιθεῖσαι (345)· β΄. εἴπερ αἱ φωτοφυεῖς καὶ πυρώδεις ἀκτῖνες πολλαὶ εἶεν· οὕτω κατὰ σημεῖον συμπυκνούμεναι, καίουσιν ἐμπρησίμους ὕλας, χωνεύουσι μέταλλα, ἀποτιτανοῦσι λίθους κτλ.· καὶ τηνικαῦτα ἡ κοίλη ἐπιφάνεια καυστικὸν ἀκούει κάτοπτρον.

353. Πεῖρα δ᾽ ἀμετάτρεπτος ἔδειξεν, ὅτι εἰς τὴν τοιαύτην συνεπίπτωσιν τῶν ἀκτίνων, ὅταν τὸ ἀνακλῶν τὰς παραλλήλους ἀκτῖνας κάτοπτρον ἐνίων ᾖ μοιρῶν, οἷον ὀκτὼ, ἢ δέκα, ἡ ἑστία κεῖται σχεδόν τι κατὰ τὸ μέσον τοῦ ἡμιάξονος, καὶ ἑπομένως ἐν τεταρτημορίῳ τοῦ ὅλου ἄξονος τῆς ἀερίου σφαίρας.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες, ὡς πρὸς αἴσθησιν, εἰσὶ παράλληλοι, δῆλον ὡς, εἴπερ πρὸς τὸν ἥλιον ἀπευθυνθείη ὁ ἄξων ΙΚΜ (σχ. 50) κοίλου κατόπτρου τοῦ ΟΙν· α΄. ὁ ἥλιος ὁραθήσεται ἐν τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ τῆς κοιλότητος ἄξονος, εἴτ' ἂν κατὰ τὸ Ε· β΄. αἱ ἐκεῖθι συμπεσῦμεναι ἀκτῖνες ἀποτελέσωσι πάνθ' ὅσα προείρηται (338) (*).

Ἐντεῦθεν ἄρα, τῶν αὐτῶν κειμένων, α΄. τὸ ὁρατὸν τοσύτῳ τῆς τῦ κατόπτρυ ἐπιφανείας ἀπωτέρω ὀφθήσεται, ὅσῳ ἧττον ἡ ἐπιφάνεια κοιλῦται· καὶ ἑπομένως ὅσῳ μείζων ἡ τῆς κενῆς σφαίρας διάμετρος· β΄. τὸ κάτοπτρον πῦρ ἐξάψει εἰς μεῖζον ἀπόσημα, εἴγε ὀφθῆναι ὀφείλει τὸ ὁρατὸν διὰ τῶν παραλλήλων ἀκτίνων· αἱ δὲ πῦρ ἐξάψυσιν, ἔνθα γίνεται ἑσία, ἥτις κεῖται ἐν ἀποσήματι, ὅ ἐσι τὸ τεταρτημόριον περίπυ τῦ ἄξονος.

Τὰ δ' ἐκ τῶν ἐνόπτρων ἐξαισίως ἀποτελύμενα ὐδὲ τοῖς πάλαι ἠγνοεῖτο· ἱσορεῖται γὰρ Ἀρχιμήδης τὰς τῶν Ῥωμαίων ναῦς, 500 ποσὶν ἀπὸ τῶν Συρακυσσῶν σαλευύσας, διὰ κατόπτρων ἐμπρῆσαι· ἐπεὶ μέντοι, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων κατάδηλον γίνεται, ὁ ἄξων τῶν κατόπτρων τύτων ὤφειλεν εἶναι ἴσος ποσὶ 2000· τὰ δὲ, δυσχερῶς, ἵνα μὴ

(*) Οὐκ ἄπο τῦ προκειμένυ γένοιτ' ἂν σκοπῦ, ἐσὶν ἃ παραθεῖναι τῶν ἐν τοῖς καυσικοῖς ἀποτελυμένων κατόπτροις, ὧν ἐχόντων μέγεθος ἀξιόλογον ἀπευθύνοιτ' ἂν ὁ ἄξων πρὸς Ἥλιον· πάντα μὲν τὰ ἐν τῇ ἑσίᾳ τιθέμενα μέταλλα ἐν ἀκαρεῖ χωνεύεται· χρυσῦ δὲ, τὸ μὲν τι εἰς καπνὸν μεταβάλλει, τὸ δὲ λειπόμενον εἰς ὕελον· κασσίτερος δὲ, σιδήρῳ μὲν ἀνάμικτος, εἰς παχὺν καπνὸν διασκίδναται· καθαρεύων δὲ ἀντέχει ἐπὶ πολὺ, τελευτῶν μέντοι εἰς ὕελον τρέπεται· πάντα δὲ, ὧν εὐμαρῶς ἅπτεται πῦρ, ἅμα τίθεται καὶ ἀναφλέγεται· ἄργιλλος δὲ καὶ πυρίτις καὶ μάρμαρον καὶ οἱ σκληρότατοι λίθοι, οἱ μὲν αὐτῶν ἐξυελῦνται, οἱ δ' ἀποτιτανῦνται ἐν λεπτῦ δευτέρυ ἐλάσσονι χρόνῳ· τῶν δὲ ἀδαμάντων, οἱ μὲν σκιεροὶ καὶ ἀφεγγεῖς ἀποκαθίσανται, πολὺ τῦ διαφανῦς ἀποτιθέμενοι· οἱ δὲ τῦ βάρυς τι ἀποβάλλοντες συμπυκνῦνται, καὶ μᾶλλον σκληρύνονται· οἱ δὲ τέλος εἰς ἀτμὺς διαλύονται.

εἴπω πάντῃ ἀδύνατον, ἄνθρωποι ἂν κατασκευάσειαν, ἐντεῦθεν ἐπῆλθε Καρτεσίῳ διϛάζειν περὶ τῦ πράγματος· ἀλλὰ γὰρ εἰκὸς ἧττον ἀπέχειν τὰς ναῦς, ἢ ὅσον ἡ ἱϛορία παρέδωκε· τῶν γὰρ πυροβολικῶν ὅπλων ἀγνοεμένων ἔτι, τί ἂν ἐκώλυε τὲς Ῥωμαίες μὴ ἐγγυτέρω Συρακεσσῶν γενέσθαι, ἢ ὅσον ἐϛὶ τὸ 500 ποδῶν ἀπόϛημα;

354. Νοεῖν δὲ δεῖ τὴν καυϛικῦ κατόπτρε ἑϛίαν, ὡς μικρὸν κύκλον, ἒ κέντρον ἐϛὶ τὸ Ε σημεῖον τῦ ἄξονος, τὰ δὲ πέρατα τῶν ἐκ τῶν σημείων α, δ, κτλ. ἀνακλωμένων ἀκτίνων, τῶν μᾶλλον ἀπεχεσῶν τῦ κατὰ τὸν ἄξονα σημείε Ι, συγκροτῦσι τὴν περιφέρειαν· ὅσῳ δ' ἐλάττων τῦ κύκλε τέτε ἡ διάμετρος, τοσέτῳ μᾶλλον, τῶν αὐτῶν κειμένων, τὸ πῦρ ἐϛὶ δραϛικώτερον ἐν τῇ ἑϛίᾳ· ὥϛε, φασὶν, εἴπερ τὸ ἡλιακὸν φῶς, ἀνακλώμενον ὑπὸ κοίλε κατόπτρε, ἐπιπίπτοι ἑτέρῳ καυϛικῷ κατόπτρῳ, ἐπεὶ συϛέλλεται λίαν ἡ τῆς ἑϛίας διάμετρος, ἐξαισιώτερα ἔϛαι τὰ ἀποτελέσματα.

355. Ἐὰν φῶς τεθῇ ἐν τῷ Ε, αἱ φωτοφυεῖς ἀκτῖνες, ποιῦσαι τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ἴσην τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, γενήσονται αΑ, δΔ παράλληλοι διὰ τῦτο, ὅτι, ὡς εἴδομεν, αἱ παράλληλοι Αα, Δδ, ποιῦσαι τὴν τῆς ἀνακλάσεως γωνίαν ἴσην τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, συνηθροίσθησαν ἐν τῷ Ε· δυνατὸν ἄρα χρήσασθαι τοῖς τοιετώδεσι κατόπτροις εἰς τὸ προεπεκτεῖναι τὸ φῶς εἰς μέγα διάϛημα, ὡς περὶ τῶν παραβολικῶν κατόπτρων εἴρηται, τιθεμένης τῆς λαμπάδος ἐν τῇ τῆς παραβολῆς ἑϛίᾳ (Ὑψ. Γεωμ. 36. Τόμ. Β΄.).

356. Ἐὰν τὸ φωτοβόλον ὁρατὸν κέηται ἐν τῷ τῆς κοιλότητος κέντρῳ Κ, πᾶσαι αἱ πρὸς ὀρθὰς τῷ κοίλῳ κατόπτρῳ προσβάλλεσαι ἀκτῖνες ἐπανακλῶνται εἰς τὸ

κέντρον· τὸ δ' αὐτοῦ εἴδωλον, ὃ ὀφείλει εἶναι ἐν τῇ ἑστίᾳ, ἥτις συμπίπτει τῷ κέντρῳ, ἔσται ἐπ' αὐτοῦ τοῦ φωστοφυοῦς σημείου· διὰ τοῦτο, εἴπερ τὸ τοῦ θεατοῦ ὄμμα εἴη ἐν τῷ κέντρῳ Κ, μόλις μὲν ὀφθήσεται ἐν ἅπασι τοῖς ἐπαισθητοῖς τοῦ κατόπτρου σημείοις, λίαν μέντοι συγκεχυμένως· ἐὰν δὲ τὸ φωτοβόλον ὁρατὸν ᾖ ἐν τόπῳ τῷ Μ, τοῦ ἄξονος μᾶλλον ἢ τὸ κέντρον ἀπέχοντι τοῦ κατόπτρου, τὸ αὐτοῦ εἴδωλον, ἢ ἡ ἑστία, παρεμπεσεῖται μεταξὺ τοῦ κέντρου Κ καὶ τοῦ κατόπτρου· καὶ ἢν ὁ ὀφθαλμὸς ᾖ ἐν τῇ ἑστίᾳ χ, ὄψεται, ὡς εἴπερ εἴη ἐν τῷ Κ, τὸ ὁρατὸν ἐν ἅπασι τοῖς ἐπαισθητοῖς σημείοις τοῦ κατόπτρου, καὶ δὴ συγκεχυμένως· ἀλλὰ γὰρ περὶ τῶν διαφόρων τόπων τῆς ἑστίας, ἐν οἷς ἂν κέοιτο κατὰ διαφόρους θέσεις τοῦ ὁρωμένου, γεωμετρικώτερον σκοπήσωμεν.

657. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἐν κοίλῳ ἐνόπτρῳ, δοθέντων τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ κατὰ τὸ ὁρατὸν ἀποστήματος, εὑρεῖν τὴν ἑστίαν καὶ τὸν τόπον τοῦ εἰδώλου.*

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΒ (Σχ. 77) ἔνοπτρον κοῖλον, καὶ ΚΑ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, καὶ Ο τὸ ὁρώμενον· καὶ ἐπιπιπτέτω ἀκτὶς ἔγγιστα τοῦ Α κατὰ τὸ Μ· ἡ μὲν οὖν ΟΜ ἐστὶν ἀκτὶς προσπίπτουσα, ἡ δὲ ΚΜ κάθετος τῆς προσπτώσεως, καὶ χ γωνία τῆς προσπτώσεως, ἰσουμένη τῇ ο γωνίᾳ τῆς ἀνακλάσεως· ἡ δὲ ἀνακλασθεῖσα, συμπίπτουσα τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Ε, γράψει αὐτόθι τὸ εἴδωλον τοῦ ὁρατοῦ Ο, καὶ ἡ ΕΑ ἔσται τὸ τῆς ἑστίας ἀπόστημα· ἵνα δ' εὑρεθῇ ἡ ΑΕ, ἐπεὶ τὸ ΑΜ τόξον ἐστὶν ἀπειροστόν, δυνατὸν ἐκληφθῆναι ΕΜ = ΑΕ, τοῦ δὲ τριγώνου ΕΜΟ, ἐπεὶ ἡ γωνία ο = χ· ἄρα ΟΚ : ΟΜ :: ΚΕ : ΕΜ (*)· ἐπεὶ

(*) Τὴν γεωμετρικὴν ταύτην ἀλήθειαν, ἣν ὁ Στοιχειδὲ ΟΜ = ΟΑ, καὶ ΕΜ = ΑΕ· ἄρα ΟΚ : ΟΔ :: ΚΕ : ΑΕ.

Κληθήτω τὸ τȣ̃ ὁρωμένȣ ἀπόςημα ΟΑ = δ, ᾗ ἀκτὶς ἡ ΚΑ = η, ᾗ τὸ τῆς ἑςίας ἀπόςημα ΕΑ = ε· ἐκεῖν ἔςαι ΟΚ = ΟΑ — ΚΑ = δ — η, ᾗ ΕΚ = ΚΑ — ΕΑ = η — ε· τȣ́των τοίνυν τῶν δυνάμεων ἀντικαταςαθεισῶν, ἔςαι δ — η : δ :: η — ε : ε· ἄρα εδ — ηε = δη — δε, ᾗ εδ + εδ — ηε = δη, εἴτ' ȣ̃ν 2εδ — ηε = δη· ὅθεν $ε = \frac{δη}{2δ — η}$, τύπος γενικὸς ἐπὶ παντὸς κοίλȣ ἐνόπτρȣ.

κτὴς ἐν Προτ. Γ'. τȣ̃ ς'. Βιβλίȣ ἐκτίθησιν, ἐν τοῖς καθ' ἡμᾶς γεωμετρικοῖς ςοιχείοις παραλειφθεῖσαν, ἐνταῦθα παραθέσθαι ἐπάναγκες, ȣ̓χ' ὅτι οἱ τὰ μέχρι τȣ̃δε μετελθόντες ἀδυνάτως ἔχȣσι συνιδεῖν τὴν τȣ̃ πράγματος ἀλήθειαν, ἀλλ' ὅπερ ὁ τῆς τάξεως λόγος ἀπῄτει, ἡμᾶς δὲ τό τε διέλαθε, κἀνταῦθα παρεῖν, ἀδιορθώτȣ τρόπȣ τεκμήριον. Ἐὰν τριγώνȣ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνȣσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ ᾗ τὴς βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τȣ̃ τριγώνȣ πλευραῖς· ἔςω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (χ. Ζ), ᾗ τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία ὑπὸ τῆς ΓΔ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐςὶ ΒΓ : ΑΓ :: ΒΔ : ΑΔ· προσεκβεβλήσθω γὰρ ἡ πλευρὰ ΒΓ πέρματος ἄνευ, ᾗ ἐκ τȣ̃ Α ἤχθω τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΑ· ȣ̓κȣ̃ν ἐςὶ ΒΓ : ΓΕ :: ΒΔ : ΑΔ (Γεωμ. 318. Τόμ. Β'.)· ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως χ = υ, ᾗ υ = μ (Γεωμ. 132. Τόμ. Β'.), ᾗ χ = ν, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ· ȣ̓κȣ̃ν ᾗ μ = ν, ᾗ τὸ ΓΔΕ τρίγωνόν ἐςιν ἰσοσκελές, εἴτ' ȣ̃ν ἐςὶ ΓΕ = ΓΑ· ἐν ἄρα τῇ ἀναλογίᾳ ἀντικαταςαθείσης ἀντὶ ΓΕ τῆς ΑΓ ἔςαι ΒΓ : ΑΓ :: ΒΔ : ΑΔ· ἐντεῦθεν δὲ ᾗ ΒΓ : ΒΔ :: ΑΓ : ΑΔ· ἐκ δὲ τȣτȣῒ τȣ̃ θεωρήματος ἕπεται ᾗ ἡ ἐν Τόμ. Γ'. Σελ. 71. ςίχ. 12. ἀναλογία· κατὰ συναρπαγὴν γὰρ ἐλεῖθι ἀνακέκληται τῆς Γεωμετρίας ὁ 320 παράγραφος, ὡς ἤδημοι προχόντι τὸν νȣ̃ν καταφανὲς ἐγένετο.

358. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν τεθῇ τὸ ὁρατὸν ἐν τῷ Ε, ἡ ἐντεῦθεν τῷ Μ προσπίπτουσα ἀκτὶς κατὰ τὸ Ο τῷ ἄξονι συμπεσεῖται ἀνακλασθεῖσα· ἡ ἄρα ἑστία ἔσται κατὰ τὸ Ο· ϗ τηνικαῦτα ἔσται $ΕΑ = δ$, ϗ $ΑΟ = ΜΟ = ε$, ϗ $ΑΚ = η$, ϗ $ΚΕ = η - δ$, ϗ $ΚΟ = ε - η$· κἀντεῦθεν $ΕΜ : ΜΟ :: ΕΚ : ΚΟ$, εἴτ' οὖν $δ : ε :: ε - δ : ε - η$, ὅθεν $δε - δη = εη - εδ$, ϗ $2εδ - εη = δη$, ϗ $ε = \frac{δη}{2δ - η}$.

α'. Ἔστω $δ = \frac{1}{\infty}$· οὐκοῦν ἔσται $\frac{δη}{2δ - η} = \frac{1}{\infty} : \frac{2}{\infty} - 1 = \frac{1}{\infty} : \frac{2 - η\infty}{\infty} = \frac{η}{-η\infty} = -\frac{1}{\infty}$· ἄρα $ε = -\frac{1}{\infty}$, ἑστία ἀμέλει λειπτική· τὸ δὲ εἴδωλον, ἀπειροστὸν ὅσον ἀπέχον, ἔσται ὄπισθεν τοῦ ἐνόπτρου.

β'. Ἔστω $δ < \frac{1}{2}η$, εἴτ' οὖν $2δ < η$· οὐκοῦν ἔσται, τοῦ τύπου ἀναλυθέντος εἰς ἀναλογίαν, $2δ - η : η :: δ : ε$· ἀλλὰ μὴν $2δ - η$ ποσότης ἐστὶ λειπτική· ἄρα ϗ $ε$ λειπτική· τὸ δὲ εἴδωλον κείσεται ὄπισθεν τοῦ ἐνόπτρου.

γ'. Ἔστω $δ = \frac{1}{2}η$, εἴτ' οὖν $2δ = η$· οὐκοῦν ἔσται $η - η : η :: δ : ε$, τοῦτ' ἔστι $0 : η :: δ : ε$· ἀλλὰ μὴν $0 : η$ λόγος ἐστὶν ἄπειρος· ἄρα ϗ $δ : ε$· ἡ ἄρα ἑστία ἀπείρως διαστήσεται, ϗ τὸ εἴδωλον ὡσαύτως εἴτε πρόσθεν εἴτ' ὄπισθεν τοῦ ἐνόπτρου.

δ'. Ἔστω $δ > \frac{1}{2}η$, εἴτ' οὖν $2δ > η$· οὐκοῦν ἔσται $2δ - η : η :: δ : ε$, ϗ $2δ - η$ ποσότης ὑπαρκτική, ϗ τὸ εἴδωλον πρόσθεν τοῦ ἐνόπτρου.

ε'. Ἔστω $δ = \frac{3}{4}η$· οὐκοῦν ὁ τύπος $\frac{δη}{2δ - η}$ τρέπεται εἰς τὸν $\frac{3\eta\eta}{4} : \frac{6\eta}{4}\eta$, τῦτ' ἔςι $\frac{3\eta\eta}{4} : \frac{6\eta - 4\eta}{4} = \frac{3\eta\eta}{2\eta}$ $\frac{3}{2}\eta = \varepsilon$.

ϛ'. Ἔςω $\delta = \eta$· ὑκῦν ἔσεται $\frac{\delta\eta}{2\delta - \eta} = \frac{\eta\eta}{2\eta - \eta}$ $= \frac{\eta\eta}{\eta} = \eta = \varepsilon$.

ζ'. Ἔςω $\delta = 2\eta$· ὑκῦν ἔςαι $\frac{2\eta\eta}{4\eta - \eta} = \frac{2\eta}{3} = \varepsilon$.

η'. Ἔςω $\delta = 3\eta$· ἄρα ἔςαι $\frac{3\eta\eta}{6\eta - 1} = \frac{3\eta}{5} = \varepsilon$.

ϑ'. Ἔςω $\delta = \infty$· τοιγαρῦν ἔσεται $\frac{\delta\eta}{2\delta - \eta} =$ $\frac{\infty\eta}{2.\infty - \eta}$, τῦτ' ἔςιν $\frac{\infty\eta}{2\infty}$· ἄρα $\varepsilon = \frac{1}{2}\eta$.

359. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ πάντων τύτων τῶν τύπων καταφαίνεται, ὅτι, ὅσῳ τὸ ὁρώμενον ἀποχωρεῖ τῦ ἐνόπτρυ, τοσύσῳ ἑτέρωθεν καὶ τὸ εἴδωλον ἀποχωρεῖ (α'. β')· τεθέντος δὲ τῦ ὁρατῦ ἐν τῷ μέσῳ σημείῳ τῦ ἡμιάξονος, τὸ εἴδωλον εἰς ἄπειρον ἀπόςημα οἴχεται (γ'.)· τῦ δὲ ὁρωμένυ πρὸς τὸ κέντρον χωρῦντος, τὸ εἴδωλον τῷ ἐνόπτρῳ προσπελάζειν ἄρχεται (δ'.)· ἐπὶ δὲ τὸ κέντρον τεθέντος, τὸ εἴδωλον αὐτῷ συμφύρεται καὶ συνενῦται (ϛ'.)· πέραν δὲ τῦ κέντρυ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Μ χωρῦντος τῦ ὁρωμένυ, τὸ εἴδωλον ἐκ τῦ κέντρυ πρὸς τὸ ἔνοπτρον πλησιάζει (ζ'., η'.)· ἀπείρως δ' ἀποχωρήσαντος τῦ ὁρωμένυ, τὸ εἴδωλον ἐν τῷ μέσῳ τῦ ἡμιάξονος σημείῳ συνίςαται, φέρ' εἰπεῖν κατὰ τὸ Ε (ϑ'.).

360. Τῦ ὁρωμένυ, ὡς ὑποτίθεται ἐν ταῖς β'. γ'. πε-

ριπτώσεσι, κειμένε, τὸ ὄμμα Σ (σχ. 50) ὄψεται τὸ ὁρατὸν ἐπέκεινα τῦ ἐνόπτρυ ἐν τῷ σημείῳ ξ, ὅπυ ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς, εἴτ' ὖν ὁ ὀρθὸς ὀπτικὸς κῶνος Σξ, ἐπιψαύσει τῆς καθέτυ Ηξ, τῆς ἐπιζευγνυμένης ἐκ τῦ ὁρατῦ ἐπὶ τὴν τῦ ἐνόπτρυ ἐπιφάνειαν, ἐν τῷ ἐνόπτρῳ προεκβεβλημένης, ὡς εἴρηται· ἐπιπλάσυ ἀλλ' ὖν ὔσης τηνικαῦτα τῆς ἑςίας, τὸ ἔνοπτρον παύσεται καυςικὸς ὢν φακὸς, τῦ φωτοβόλυ σώματος τιθεμένυ ἀναμέσον τῦ κατὰ τὴν ἀκτῖνα μέσυ Ε, τῦ ἐνόπτρυ Ο ν.

361. Ἐν ταῖς αὐταῖς δὲ περιπτώσεσι τὸ ὁρατὸν ὀφθήσεται μεῖζον, ἤπερ ἐςὶ φύσει· ἔςω γὰρ ὁρατὸν τὸ ΑΒ (σχ. 78), κατοπτευόμενον ὑπὸ τῦ ὄμματος ΓΔ· τῦτο τοίνυν ἕξει τὸ ἄκρον αὐτῦ Α ἐν τῷ σημείῳ α, καθ' ὃ ἡ τῷ κατόπτρῳ Ζζ κάθετος ΕΑα ἐπιψαύει τῦ ὀπτικῦ κώνυ αΓΔ, τὸ δὲ ἄκρον Β κατὰ τὸ β, καθ' ὃ ἡ ἐκ τῦ ὁρατῦ σημεῖυ Β τῷ κατόπτρῳ κάθετος ἀγομένη ΕΒβ ἐπιψαύει τῦ ὀπτικῦ κώνυ βΓΔ· ἐντεῦθεν δὲ δῆλον α. ὅτι τὸ εἴδωλον αβ, ὡς πλευρὰ τῦ μεγάλυ τριγώνυ αβΕ, ἔςι μεῖζον τῦ ὁρατῦ ΑΒ πλευρᾶς ὄντος τῦ ἐλάττονος τριγώνυ ΑΒΕ τῦ ἐκείνῳ ὁμοίυ· β'. τὸ ὁρατὸν ΑΒ, καὶ τὸ αὐτῦ εἴδωλον αβ εἰσὶν ὁμοίως κείμενα, τῶν ἀντιςοίχων σημείων Α, α ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ὔτω κειμένων, ὡς τὰ σφίσιν ἀντίςοιχα Β, β.

362. Ὅταν αἱ ἀκτῖνες αΔ, βΓ, ἐκπεμπόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων α, β τῦ ὁρατῦ, ἅπαξ συμπίπτωσι πρὶν ἢ ἀφικέσθαι εἰς τὸν ἀμφιβληςροειδῆ, εἴτ' ὖν τῇ κόρῃ, δέδεικται διότι ὐκ ἀνεςραμμένον ὁρᾶται τὸ ὁρατὸν (250), ἀλλ' ἐὰν συμπέσωσι πρὶν ἢ προσβαλεῖν τῇ κόρῃ, ἡ μὲν ἐκ τῦ ἐν δεξιοῖς α ἐρχομένη ἀκτὶς ἐπιπεσεῖται κατὰ τὰ λαιά· ἡ δ' ἐκ τῦ ἐν τοῖς λαιοῖς β, κατὰ τὰ δεξιά· ὡ-

ςε ὁ ὀφθαλμὸς, πληγεὶς ἐκ τῆς ἐκ τȣ̃ α ἡκȣ́σης ἀκτῖνος κατὰ τὴν ΒΓ φορὰν, ὄψεται τὸ α ἐν τῷ β· ϗ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ β ἐν τῷ α· τοιγαρȣ̃ν, δὶς συμπιπτȣσῶν τῶν ἀκτίνων, ὁ ὀφθαλμὸς ἀνεςραμμένον θεωρεῖ τὸ ὁρώμενον.

363. Ἐὰν δὲ αἱ ἐκ τῶν α, β ἥκȣσαι ἀκτῖνες τρὶς συμπέσωσιν, δῆλον εὐθὺς, ὅτι τὰ σημεῖα κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν θέσιν ἐντυπωθήσονται· ἐντεῦθεν ἄρα „τȣ̃ „ἀριθμȣ̃ τῶν κατὰ τὰς ἀκτῖνας συμπτώσεων, περιττȣ̃ μὲν „ὄντος, τὸ ὄμμα θεωρεῖ τὰ ὁρώμενα, ὡς εἰσὶ· ἀρτίȣ „δὲ, ἀνεςραμμένα.“

Ἐν μὲν γὰρ τῷ ἐσχάτῳ τῶν ὑποδειγμάτων τὸ τȣ̃ ὁρατȣ̃ ΑΒ εἴδωλον αβ ἑωρᾶτο, ὡς ἦν φύσει κείμενον τὸ ΑΒ, τῶν ἀκτίνων αΔ, ΒΓ μόνον ἐν τῇ κόρῃ συμπιπτȣσῶν· ἐν δὲ ταῖς ἄλλαις περιπτώσεσι τȣ̃ κοίλȣ ἐνόπτρȣ, τȣ̃τ᾽ ἔςι τȣ̃ ὁρατȣ̃ τιθεμένȣ ἀναμέσον τȣ̃ κέντρȣ, ϗ τȣ̃ κατὰ τὸν ἡμιάξονα μέσȣ ὡς ἐκ τȣ̃ ἐνόπτρȣ, ἢ ἀπέχοντος μᾶλλον, ἤπερ τὸ κέντρον, τὸ εἴδωλον ἀναςρέφεται, δὶς συμπιπτȣσῶν τῶν ἐκ τῶν ἄκρων ἐκπεμπομένων ἀκτίνων, ὡς καταφαίνεται ἐποπτείᾳ μόνῃ τῶν 50, 79 σχημάτων.

364. Τὸ κυλινδρικὸν κοῖλον κάτοπτρον τȣ̃ σφαιρικȣ̃ διαφέρει, ά. ὅτι συνίςαται ἐκ πολλῶν κυκλικῶν τόξων, οἷον τὸ ΗΙ (σχ. 79), παραλλήλων ϗ ἴσων (*), ἐν τῷ σφαιρικῷ τῶν τόξων τȣ́των ἁπάντων συμπιπτόντων καθ᾽

(*) Δυνατὸν ἀεὶ ἐννοῆσαι τὸ κυλινδρικὸν κοῖλον ἔνοπτρον ὡς ἀπογεννώμενον ὑπὸ κυκλικȣ̃ τόξȣ, ἑαυτῷ παραλλήλως κινηθέντος κατ᾽ εὐθεῖαν, ἥτις ἐςὶ τὸ τȣ̃ κυλίνδρȣ μῆκος, ἓν σημεῖον τȣ̃ ἄξονος· β΄. ἐὰν κατ' ἐπίνοιαν τμηθῇ τὸ κυλινδρικὸν κοῖλον κάτοπτρον πρὸς ὀρθὰς αὐτȣ̃ τῇ βάσει, εὐθεῖα γραμμὴ ἀεὶ προελεύσεται· ἐπεὶ ἄρα τὸ ἔνοπτρον ἀεὶ ἐςὶ τόξον κυκλικὸν, κατὰ τȣ̃το, πάντα ἐκτελεῖ τὰ τȣ̃ σφαιρικȣ̃.

365. Ὥςε α΄. ὅταν τὸ ὁρώμενον τεθῇ ἀναμέσον τȣ̃ πρώτȣ τεταρτημορίȣ ΚΕ (σχ. 50) τȣ̃ ἄξονος τȣ̃ ἐν τῷ κυλίνδρῳ τόξȣ, καὶ τȣ̃ τόξȣ αὐτȣ̃, μεῖζον ἢ ἐςι φανήσεται, καὶ κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτȣ̃ θέσιν, καὶ τȣ̃ ἐνόπτρȣ ἐπέκεινα· ἐπεὶ μέντοι τὸ ἔνοπτρον, ὡς ἐκ τȣ̃ μήκȣς, εὐθεῖα γραμμή ἐςι, τὸ εἴδωλον ȣ̓δόλως μεγεθυνθήσεται κατὰ τὸ μῆκος· μεγεθυνόμενον δὲ κατὰ τὸ πλάτος δύσμορφον γενήσεται· β΄. τιθέμενον δὲ κατὰ σημεῖον τȣ̃ ἄξονος, κείμενον ἀναμέσον τȣ̃ κέντρȣ Κ καὶ τȣ̃ πρώτȣ τεταρτημορίȣ Ε τȣ̃ ἄξονος, ἐπέκεινα τȣ̃ κέντρȣ, καὶ ἀνεςραμμένον ὀφθήσεται καὶ ἀεὶ δύσμορφον.

366. Εἴδομεν ἤδη, ὅτι τὰ κυρτὰ κάτοπτρα ἐν μηδεμιᾷ περιπτώσει τείνȣσιν εἰς τὸ συναγαγεῖν τὰς ἀκτῖνας· καὶ ἐκ τȣ́τȣ ȣ̓δέποτε δύνανται ἔχειν πραγματικὰς ἑςίας, καὶ καυςικὰ καθίςασθαι κάτοπτρα· ἕξȣσιν ἄρα ἐπίπλασον ἑςίαν, εἴτ' ȣ̃ν σημεῖον ὄπισθεν τȣ̃ κατόπτρȣ κείμενον, καθ' ὃ περατȣ̃ται ὁ ὀρθὸς ὀπτικὸς κῶνος, δι' ȣ̃ ὁρᾷ ὁ ὀφθαλμὸς σημεῖόν τι φωτοβόλον.

Ὁρᾷ φέρε τὸ ὄμμα ΕΔ (σχ. 80) τὸ ὁρατὸν ΑΒ ἐν τῷ κυρτῷ ἐνόπτρῳ ΖΘ· τὸ τοίνυν σημεῖον α τὸ ἐπέκεινα τοῦ κατόπτρου ΖΘ κείμενον ἔςαι ἑςία ἐπίπλασος, καθ' ἣν συμπεσȣ̃νται αἱ ἐκ τȣ̃ Α σημείȣ προβαλλόμεναι ἀκτῖνες, αἵτινες συνιςȣ̃σι τὸν ὀπτικὸν κῶνον ΕΔα, προεκτεινόμενον μέχρι τȣ̃ συμβαλεῖν τῇ καθέτῳ ΑαΚ, τῇ ἐκ τȣ̃ ὁρατȣ̃ σημείȣ Α ἐπὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΖΘ ἀγομένῃ· ὡσαύτως τὸ σημεῖον β ἐςιν ἡ ἑπίπλασος ἐςία τῦ ὀπτικῦ κώνȣ ΕΔβ, τῦ συνιςαμένȣ ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τῶν προχεομένων ἐκ τῦ ὁρατῦ σημείȣ Β, ἢ προεκβαλλομένȣ μέχρι τῦ συναντῆσαι τῇ καθέτῳ ΒβΚ, τῇ ἀγομένῃ ἐκ τῦ ὁρατῦ σημείȣ Β ἐπὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΖΘ.

367. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐν κυρτῷ ἐνόπτρῳ δοθέντος τῦ ἡμιάξονος, ἢ τῦ κατὰ τὸ ὁρώμενον ἀποςήματος εὑρεῖν τὴν ἑςίαν ἢ τὸν τόπον τῦ εἰδώλȣ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΑΜ (σχ. 81) κυρτὸν ἔνοπτρον, ȣ̓ ἡμιάξων = ΚΑ, ἢ ὁρατὸν τὸ Ο, ȣ̓ ἀπόςημα = ΟΑ, ἢ ἄξων = ΟΑΚ, ἢ ἐπιπιπτέτω ἀκτὶς τῷ Μ, ὃ κεῖται προσεχέςατον τῷ Α, ἢ ἤχθω κάθετος τῆς ἐπιπτώσεως ἡ ΚΜ, ἢ προεκβεβλήσθω τέρματος ἄνευ, προεκβεβλήσθω δὲ ἢ ἡ ἐπιπίπτυσα ἀκτὶς ΟΜ· ȣ̓κῦν ἔςαι ΟΜΞ, εἴτ' ȣ̓ν ο γωνία τῆς ἐπιπτώσεως, ἥπερ ἴση ἡ κατ' ἀνάκλασιν γωνία ΞΜΡ, εἴτ' ȣ̓ν χ· ȣ̓κῦν ἡ ΡΜ ἔςαι ἡ ἀνακλασθεῖσα ἀκτὶς, ἥτις ἀποκλίνȣσα συμπεσεῖν τῷ ἄξονι ἐκ τῶν κυρτῶν ἀδυνάτως ἔχει· προεκβληθεῖσα μέντοι πρὸς τὰ κοῖλα συμβαλεῖ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Ε· τὸ τοίνυν Ε λειπτικὸν ἔςαι, τό,τε εἴδωλον ἐπέκεινα τῦ ἐνόπτρȣ φανήσεται· ἐν μὲν ȣ̓ν τῷ τριγώνῳ ΚΜΟ, ἔςι ΚΟ : ΟΜ :: ἡμ. ΚΜΟ : ἡμ. ΟΚΜ· ἐπεὶ δὲ ἀμβλεῖά ἐςιν ἡ ὑπὸ ΚΜΟ, τὸ αὐτῆς ἡμίτονον ἴσον ἔςαι τῷ τῦ παραπληρώματος αὐτῆς, εἴτ' ȣ̓ν τῆς ὀξείας γωνίας ο = χ = υ φ ΚΜΕ· ἄρα ΚΟ : ΟΜ :: ἡμ. ΚΜΕ : ἡμ. ΟΚΜ· ἐν δὲ τῷ τριγώνῳ ΚΜΕ ἔςι ΚΕ : ΕΜ :: ἡμ. ΚΜΕ : ἡμ. ΕΚΜ, ἢ ΟΚΜ, ὅπερ ἐςὶν ἐπιεικῶς τὸ αὐτό· τοιγαρῦν ἐκπορίζεται ἐντεῦθεν

$KO : OM :: $ ημ. $KME :$ ημ. OKM

$KE : EM :: $ ημ. $KME :$ ημ. OKM· ἄρα

$KO : OM :: KE : EM$· ἀλλὰ $EM = AE$

διὰ τὸ ἐλάχιστον εἶναι τὸ τόξον AM, ἄρα $KO : OM :: KE : AE$· εἰρήσθω τοίνυν $AO = OM = \delta$, καὶ $AK = \eta$, καὶ $EA = \varepsilon$· ἄρα $KO = \delta + \eta$, καὶ $EK = \eta - \varepsilon$· οὐκοῦν ἀντικαταστάσει τούτων τῶν δυνάμεων, $\delta + \eta : \delta :: \eta - \varepsilon : \varepsilon$· ἄρα $\varepsilon\delta + \eta\varepsilon = \delta\eta + \delta\varepsilon$, καὶ $\varepsilon\delta + \varepsilon\delta + \eta\varepsilon = \delta\eta$, εἴτ' οὖν $2\varepsilon\delta + \eta\varepsilon = \delta\eta$, καὶ $\varepsilon = \dfrac{\delta\eta}{2\delta + \eta}$.

α'. $\delta = \dfrac{\eta}{\infty}$· ἄρα $\dfrac{\delta\eta}{2\delta + \eta} = \dfrac{\eta\eta}{\infty} : \dfrac{2\eta}{\infty} + \eta =$ $\dfrac{\eta\eta}{\infty} : \dfrac{2\eta + \infty\,\eta}{\infty} = \dfrac{\eta}{\infty}$· ἄρα $\varepsilon = \dfrac{\eta}{\infty}$ ἐστία ὑπαρκτική, καὶ ἀπειροστὸν ὅσον τοῦ ἐνόπτρου διέχουσα.

β'. $\delta < \frac{1}{2}\eta$, εἴτ' οὖν $2\delta < \eta$· τοῦ δὲ τούτου εἰς ἀναλογίαν ἀναλυθέντος, ἔσται $2\delta + \eta : \eta :: \delta : \varepsilon$.

γ'. $\delta = \frac{1}{2}\eta$, εἴτ' οὖν $2\delta = \eta$· ὅθεν $\eta + \eta : \eta :: \frac{1}{2}\eta : \varepsilon$, τοῦτ' ἔστι $2 : 1 :: \frac{1}{2} : \varepsilon$· ἄρα $\varepsilon = \frac{1}{4}\eta$.

δ'. $\delta > \frac{1}{2}\eta$, εἴτ' οὖν $2\delta > \eta$· τοιγαροῦν $2\delta + \eta : \eta :: \delta : \varepsilon$.

ε'. $\delta = \eta$ ἄρα $\dfrac{\eta\eta}{2\eta + \eta} = \dfrac{\eta\eta}{3\eta} = \dfrac{\eta}{3} = \varepsilon$.

ϛ'. $\delta = 2\eta$· ἄρα $4\eta + \eta : \eta :: 2\eta : \varepsilon$, εἴτ' οὖν $5\eta : \eta :: 2\eta : \varepsilon$· ὅθεν $\varepsilon = \dfrac{2\eta\eta}{5\eta} = \frac{2}{5}\eta$.

ζ'. $\delta = \infty$· ἄρα $\dfrac{\infty\,\eta}{2\infty + \eta} = \dfrac{\infty\,\eta}{2\infty} = \frac{1}{2}\eta = \varepsilon$.

368. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν ἀπόνως διορίζεται ἡ ὁδὸς, ἣν βαδιεῖται τὸ εἴδωλον ἐκ τῆς τῦ ὁρωμένυ κινήσεως συγκινέμενον· ὅταν μὲν γὰρ τὸ ὁρατὸν προσεχέςατα τεθῇ τῷ ἐνόπτρῳ, ἢ τὸ εἴδωλον αὐτῦ προσεχέςατα φαίνεται τῷ ἐνόπτρῳ, αὐτῦ μέντοι ἐπέκεινα (ά.)· ἀποχωρῦντος δ' ἐντεῦθεν τῦ ὁρατῦ, ἢ τὸ εἴδωλον ἐκεῖθεν συναποχωρεῖ· ὅταν δὲ τὸ ὁρατὸν τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιδιαμέτρυ ἀποςῇ, τὸ εἴδωλον ἑτέρωθεν τεταρτημόριον τῆς ἡμιδιαμέτρυ ἀποχωρῆσαν φανήσεται (γ'.)· τῦ δ' ὁρατῦ πλεῖν ἢ τὴν ἡμιδιάμετρον ἀποχωρήσαντος, τὸ εἴδωλον πλεῖν ἢ τὸ τεταρτημόριον τῆς ἡμιδιαμέτρυ ἐξίςαται· ἀλλ' ὅταν ὅλην ἐκςῇ τὴν ἡμιδιάμετρον, τὸ εἴδωλον ἐν τριτημορίῳ τῆς ἡμιδιαμέτρυ ὀφθήσεται (έ)· ἀφιςαμένῳ δ' ἐπέκεινα τῆς ἡμιδιαμέτρυ τῷ ὁρατῷ, συναποχωρεῖ ἐπὶ θάτερα ἢ τὸ εἴδωλον, ἕς τ' ἂν τὸ μὲν ἐκ τῶν κυρτῶν εἰς ἄπειρον, τὸ δ' εἴδωλον ἑτέρωθεν ἐν ἡμισείᾳ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τελευταῖον ςῶσιν ἑκάτερα (ζ).

369. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἀλλὰ γὰρ, ὅτι οἱ ἐξενεχθέντες τύποι (357, 367) ἢ τὸ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις εἴδωλον διορίσαι οἷοί τέ εἰσι, φέρε διὰ τῆς ἐφαρμόσεως ἴδωμεν· ἔνθα μὲν γὰρ ἐπιπίπτει ἡ ἀκτὶς, ἐκληφθῆναι δύναται ὁ τόπος, ὡς λίαν μικρὸς, ὡς τόξον σφαιρικῦ ἐνόπτρυ, εἴτε κυρτῦ, εἴτε κοίλυ, ὗ ἡ ἀκτὶς $=\infty$· τοῖς δὲ τύποις $\varepsilon=\dfrac{\delta\eta}{2\delta-\eta}$, ἢ $\varepsilon=\dfrac{\delta\eta}{2\delta+\eta}$ χρήσασθαι δυνάμεθα, τιθέντες $\eta=\infty$· ὁ κἂν ὁ τύπος ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις ἔςαι $\varepsilon=\dfrac{\delta\infty}{2\delta-\infty}$, ἢ $\dfrac{\delta\infty}{2\delta+\infty}$, τῦτ' ἔςιν $\varepsilon=\dfrac{\delta\infty}{-\infty}$, ἢ $\varepsilon=\dfrac{\delta\infty}{\infty}$, εἴτ' ὖν $\varepsilon=-\delta$,

ἢ ε = δ· ἐὰν μὲν ἄρα τὸ ἐπίπεδον ἔνοπτρον ὡς μέρος κοίλε ἐνόπτρε ὑποτεθῇ, ἔςαι τὸ ἀπόςημα τε̃ ὁρατε̃ ἴσον τῷ τε̃ εἰδώλου, ἐπέκεινα τε̃ ἐνόπτρου, εἴτ' ὄν ἔνδον φαινομένε, ὃ δὴ ϗ τὸ σύμβολον — ἐμφαίνει ἐν τῷ τύπῳ τῆς κοιλότητος· ἐὰν δ' ὡς κυρτε̃, ἔςαι πάλιν ε = δ, εἴτ' ὂν τὸ ἀπόςημα τε̃ εἰδώλου ἔνδον τε̃ ἐνόπτρου κατοπτανομένε (ὃ βέλεται τὸ σύμβολον + ἐν τοῖς κυρτοῖς) ἴσον τῷ τε̃ ὁρατε̃· ἑκάτερος ἄρα τῶν τύπων, ὃ γεωμετρικῶς προαποδέδεικται, (320) διὰ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδε συνεπικυροῖ.

370. Ἐκ τῶν εἰρημένων (366, 368) κατάδηλον α'. ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς ἀεὶ ὄψεται τὸ εἴδωλον τε̃ ὁρατε̃ ΑΒ (σχ. 80) ὄπισθεν τε̃ ἐνόπτρε· ἤ, εἰ βέλει, ἐν τῷ ἐνόπτρῳ· β'. τὸ εἴδωλον ἀεὶ ὀφθήσεται μεταξὺ τε̃ τῆς κυρτότητος κέντρε Κ, ϗ αὐτῆς τῆς τε̃ κατόπτρε ἐπιφανείας ΖΘ, ἐπεὶ αἱ κάθετοι ΑαΚ, ΒβΚ, αἷς ὀφείλεσι συμπεσεῖν οἱ ὀπτικοὶ ἄξονες, συγκλίνεσι, ϗ κατὰ τὸ κέντρον συμπίπτεσι· γ'. τὰ τοιετώδη κάτοπτρα ἀεὶ ἀπομειε̃σι τὸ εἴδωλον τε̃ ὁρατε̃· ἀεὶ γὰρ βα < ΒΑ, πλευρὰ ἥττονος τριγώνε, πλευρᾶς μείζονος τῶν βΚα, ΒΚΑ, τῶν ἀλλήλοις ὁμοίων· δ'. τὸ εἴδωλον τε̃ ὁρατε̃ ἔςαι ἀεὶ ἐν τῇ αὐτῇ θέσει, ἐν ᾗ ϗ τὸ ὁρατὸν, εἴγε τὸ ἄνω σημεῖον Α φανήσεται ἐν τῷ ἄνω χώρῳ α, ϗ τὸ κάτω Β ἐν τῷ κάτω β· ε'. ὅσῳ προσεχέςερον τῷ κατόπτρῳ ἐςὶ τὸ μέγεθος ΑΒ, τοσέτῳ μεῖζον ἔςαι αὐτε̃ τὸ εἴδωλον αβ, κἂν ὑποτεθείη τὸ τε̃ αβ εἰδώλε ἀπόςημα ἀπὸ τε̃ Κ τὸ αὐτὸ ἐν ἑκατέρᾳ περιπτώσει· ὅσῳ γὰρ προσεχέςερον τὸ ΑΒ τῇ ΖΘ, τοσέτῳ μείζων ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία, ϗ ἑπομένως ἡ αβ πλευρά· παρὰ δὲ ταῦτα, ὅσῳ

τὸ ὁρατὸν Α προσπελάζει τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ ΖΘ, ὁ ὀφθαλμὸς ΔΕ ὁρᾷ τὸ αὐτῦ εἴδωλον α προσεχέςερον τῇ ἐπιφανείᾳ ταύτῃ· δῆλον γὰρ, ὡς εἰ ἐπιψαύσειε τῆς ἐπιφανείας τὸ σημεῖον Α, ὁ ὀφθαλμὸς ΕΔ ἴδοι ἂν τὸ αὐτῦ εἴδωλον α ἐν τῇ τῦ κατόπτρυ ἐπιφανείᾳ.

371. α΄. Ἄρα ὅσῳ τὸ ὁρατὸν ΑΒ προχωρεῖ πρὸς τὸ ἔνοπτρον ΖΘ, τοσύτῳ τὸ εἴδωλον αὐτῦ προχωρεῖ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ϗ ἑπομένως καθίςαται μεῖζον ὡς δεῖν περατωθῆναι πρὸς ταῖς καθέτοις ΑΓ, ΒΓ: β΄. τὐναντίον δὲ, ὅσῳ τὸ ὁρατὸν ΑΒ ἀποχωρεῖ τῦ κατόπτρυ, τοσύτῳ τὸ εἴδωλον αὐτῦ, τῆς ἐπιφανείας ΖΘ, προσπελάζει τῷ κέντρῳ Κ, ϗ ἔλαττον ἀποκαθιςάμενον.

372. Δυνατόν ἐςιν ἔνοπτρον κατασκευάσαι, ὥςε ἐν αὐτῷ φαίνεσθαι πλείω εἴδωλα, τὰ μὲν ἴσα, τὰ δὲ μείζω, τὰ δὲ ἐλάσσω· ϗ τὰ μὲν ἐγγὺς, τὰ δὲ πόῤῥω· ἔςω γὰρ ἐπίπεδον τὸ ΜΛ (σχ. 82)· ἐκεῖν ἐν τύτῳ γένοιτο ἂν κυρτὰ μὲν ἔνοπτρα, οἷα τὰ ΑΒΓ, ΘΚΛ, κοῖλα δὲ, οἷα τὰ ΓΔΕ, ΖΗΘ, ἐπίπεδα δὲ, οἷα τὰ ΜΑ, ΕΖ· τεθέντος ὖν τῦ προσώπυ, ὅπυ τὸ Π, φαίνεται ἀπὸ μὲν τῶν ἐπιπέδων ἴσα τὰ εἴδωλα, ϗ ἴσον ἀπέχοντα (369)· ἀπὸ δὲ τῶν κυρτῶν ἐλάσσονα, ϗ ἔλασσον ἀπέχοντα (370)· ἀπὸ δὲ τῶν κοίλων, μείζονα ϗ διαφόρως (358. κτλ.).

373. Τὰ κυρτὰ κυλινδρικὰ κάτοπτρα ἀναγκαίως παραμορφάζυσι τὸ εἴδωλον τῦ ὁρατῦ, ὥσπερ ϗ τὰ κοῖλα, ἀλλ᾽ ἐναντίως· ϗ γὰρ διὰ τῦ μήκυς, καθὰ δὴ ϗ τὰ ἐπίπεδα, ὔτ᾽ αὔξυσιν ὔτ᾽ ἀπομειῦσι τὸ εἴδωλον τῦ ὁρατῦ· ἀλλ᾽ ὥσπερ τὰ κοῖλα κυλινδρικὰ κάτοπτρα διὰ τῦ πλάτυς αὔξυσι τὸ εἴδωλον, ὡς εἴδομεν, εἴγε συνάπτυσι τὰς ἀκτῖνας δεξιόθεν πρὸς ἀριςερὰν τῦ κατὰ τὸ

πρίσμα μήκους, ϗ οὕτως αὔξουσι τὴν ὀπτικὴν γωνίαν· τοὐναντίον τὰ κυρτὰ διασκεδαννύουσι πρός τε δεξιὰν ϗ πρὸς ἀριστερὰν τοῦ μήκους τὰς ἀκτῖνας· ἀποχωρίζουσαι ἄρα ταύτας ἀλλήλων, ἧττον συγκλίνειν ποιοῦσι, ϗ ἐντεῦθεν ἀπομειοῦσι τὴν ὀπτικὴν γωνίαν.

374. Ὥστε ἐν γένει αἱ κυλινδρικαὶ ὕελοι παραμορφάζουσι τὰ ὁρατά· ἀλλά, τοῦτο δὴ τὸ θαυμασιώτερον, τὰ παραμεμορφασμένα ὁρατὰ εὔμορφα ϗ εὐσχήμονα ἀποδεικνῦσι· ἤδη γὰρ ζωγράφος τις γραφήν, πολὺ τὸ γελοιῶδες φέρουσαν ἐκ τοῦ ἀκαταλλήλου μήκους, κοίλῳ κυλινδρικῷ κατόπτρῳ ὑποθέμενος, ἐθεάσατο ὡραίαν ϗ ἀναλόγως ἔχουσαν εἰκόνα· ἄλλην δ' ἐκ τοῦ πλάτους πολὺ φέρουσαν τὸ ἔκτακτον ϗ ἐκτεταμένον, ἐν κυρτῷ τοὐναντίον εἶδε μεταμορφωθεῖσαν ἐπὶ τὸ βέλτιον.

375. Ἡ τοῦ παραμορφάζειν τὰ εὔμορφα, ϗ τὰ ἄμορφα μορφοῦν, ἰδιότης ἰδιάζει μάλιστα ταῖς κωνικαῖς ϗ πυραμιδικαῖς ὑέλοις· τὰς γὰρ εὐκρινεστάτας ϗ ὡραιοτάτας γραφὰς οὕτω σφόδρα ἐξαφανίζουσι, ὡς μηδὲ τοὺς γραφεῖς αὐτοὺς διαγινώσκειν ἔχειν μήδ' ἴχνη τῆς αὐτῶν ἐργασίας· ἀλλ' ἐπεὶ τὰ τοιαῦτα ἁπλῆς περιεργίας ἕνεκα θεωροῦνται, πρὸς ἄλλο μηδὲν βιωφελὲς συμβαλλόμενα, ἅλις ἐχόντων ἐς δεῦρο.