ματος ἐποπτείᾳ κατάδηλον γίνεται α΄. ὅτι δύω ἀποκλί-
νουσαι ἀκτῖνες ἐλαττοῦσι μὲν τὴν αὐτῶν ἀπόκλισιν εἰσιοῦ-
σαι, μεγεθύνουσι δ' ἐξιοῦσαι· ἀλλὰ β΄. φθείρουσί τι τῆς
αὐτῶν ἀποκλίσεως, καὶ τείνουσι μᾶλλον εἰς παραλληλίαν
μετὰ τὸ διελθεῖν τὴν ὕελον.

145. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Αἱ φωτοφυεῖς ἀκτῖνες διὰ σφαι-
ρικῆς ὑέλου διερχόμεναι, ἵν', ὃ συμβαίνει, εἴπωμεν, ἔν τε τῷ
εἰσιέναι καὶ ἐν τῷ ἐξιέναι ἀλλήλαις προσπελάζουσιν· ἐμπι-
πτέτωσαν γὰρ δύω ἀποκλίνουσαι ἀκτῖνες αἱ ΑΓ, ΑΕ (σχ.
33) εἰς τὴν σφαιρικὴν ὕελον ΔΒΝ· ἡ μὲν οὖν ΑΓ, ἐμπίπτουσα
κατὰ τὸ Β πλαγίως τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ ΒΔ, θραύεται
πρὸς τῇ ἀκτῖνι ΒΖ, ἥτις ἐστὶ κάθετος τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ
ΒΔ κατὰ τὸ σημεῖον Β, (Γεωμ. 152. Τόμ. Β΄.) φε-
ρομένη κατὰ τὴν ΒΙ· ὡσαύτως ἡ ἀκτὶς ΑΕ, πλαγίως
ἐμπίπτουσα τῷ Δ, θραύεται πρὸς τῇ ΔΖ ἀκτῖνι, φερομέ-
νη κατὰ τὴν Δα· ἐν γένει δὲ δύω φωτοφυῆ ἄτομα, ἐμ-
πίπτοντα δυσὶ σημείοις τοῖς Β, Δ, ἅτινα ἧττον συγκλί-
νει, ἢ δύω ἀκτῖνες ΒΖ, ΔΖ, ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὰ ση-
μεῖα ταῦτα ἐπιζευγνύμεναι, θραυσθήσονται πρὸς αὐταῖς
ταῖς ἀκτῖσιν, ὥσπερ καθέτοις τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ, καὶ ἡ
μὲν ἀριστερόθεν πρὸς δεξιὰν παρεκτρέψεται προσπελάζου-
σα τῇ ΒΖ, ἡ δὲ δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰν, τῇ ΔΖ· αἱ
φοραὶ ἄρα τῶν δυεῖν φωτοφυῶν ἀκτίνων ἀλλήλαις προσ-
πελάσουσιν· ἡ τοίνυν ἀκτὶς ΑΒ, γενομένη ΒΙ, ἐξιοῦσα διὰ
τοῦ Ι ἐκ τῆς κυρτῆς ὑέλου, εἰσβάλει εἰς τὴν κοίλην ἐπιφά-
νειαν ΙΟα τοῦ ἀέρος τοῦ περιέχοντος τὴν τῆς ὑέλου κυρτὴν
ἐπιφάνειαν ΙΟα· κάθετοι δὲ τῇ κοίλῃ τοῦ ἀέρος ἐπιφα-
νείᾳ εἰσὶ προφανῶς αἱ προαγωγαὶ ΙΗ, αΘ τῶν αὐτῶν
ἀκτίνων ΖΙ, Ζα τῆς σφαιρικῆς ὑέλου· ἀλλ' ἡ φωτοφυὴς
ἀκτὶς ΒΙ, τῆς ὑέλου ἐξιοῦσα, θραύεται ἀπὸ τῆς καθέτου ΙΗ

τῆς ἐν τῷ ἀέρι· θραυθήσεται ἄρα ἀριστερόθεν πρὸς δεξιάν, προσπελάζουσα τῇ ἀκτῖνι Δα· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἡ Δα, ἀποχωροῦσα τῆς καθέτου αΘ, ἐνεχθήσεται τὴν ιτ, τῇ ΙΚ προσεγγίζουσα· ὥστε αἱ ἀκτῖνες εἰσιοῦσαί τε καὶ ἐξιοῦσαι ἀλλήλαις προσπελάσουσι.

146. Ἔφην δὲ, ἵν᾽, ὃ συμβαίνει, εἴπωμεν· ὅτι ὡς τὰ πολλὰ αἱ κυρτῇ ὑέλῳ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες εἰσὶν, ἤτοι ἀποκλίνουσαι, οἷαι αἱ λαμπάδος ὡς φωτοβόλου σημείου ἐκλαμβανομένης προϊέμεναι, ἢ παράλληλοι, οἷαι αἱ ἡλιακαὶ, ἢ συγκλίνουσαι, οἷαι αἱ ἐκπεμπόμεναι ἐκ δυεῖν λαμπάδων, κειμένων ἐν τοῖς φοραῖς Βρ, ΔΥ τῶν δυεῖν ἀκτίνων, ἢ καθέτων ΖΒ, ΖΔ· ὥστε ἐν ταῖς ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον συγκυρούσαις περιστάσεσιν αἱ κυρταὶ ὕελοι ἐγγὺς γίνεσθαι ἀλλήλων ποιοῦσι τὰς φωτοφυεῖς ἀκτῖνας ἔν τε τῇ εἰσελεύσει καὶ τῇ ἐξελεύσει αὐτῶν.

147. Ἀλλὰ γὰρ, κυρίως εἰπεῖν, ἓν συμπεσεῖν ἐνδέχεται τῶν τριῶν δὴ τούτων· ἤτοι γὰρ δύω φωτοφυεῖς ἀκτῖνες Βρ, ΔΥ, ἐκπεμπόμεναι δυοῖν φωτοφυῶν σημείων ρ, Υ, εἰσβάλλουσι τῇ κυρτῇ ὑέλῳ, τὴν αὐτὴν τηροῦσαι σύγκλισιν, ἣν καὶ αἱ ἀκτῖνες ΒΖ, ΔΖ, εἴτ᾽ οὖν πρὸς ὀρθάς· καὶ τηνικαῦτα οὐδεμίαν ὑφίστανται θραῦσιν, οὐδ᾽ εἰσιοῦσαι οὐδ᾽ ἐξιοῦσαι· ἢ μᾶλλον συγκλίνουσιν, ἢ αἱ ἀκτῖνες ΒΖ, ΔΖ, αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνύμεναι, οἷαι αἱ ξΒΠ, πΔΠ· καὶ τηνικαῦτα, ἡ μὲν φωτοφυὴς ἀκτὶς ξΒΠ προσπελάσει τῇ καθέτῳ, εἴτ᾽ οὖν τῇ ἀκτῖνι ΒΖ, ἡ δὲ πΔΠ, τῇ ΔΖ· καὶ τοίνυν αἱ φωτοφυεῖς ἀκτῖνες ΒΠ, πΠ οὐ προσπελάσουσιν, ἀλλ᾽ ἀποστήσονται ἀλλήλων διὰ τῆς θραύσεως· ἢ τελευταῖον, αἱ δύω φωτοφυεῖς ἀκτῖνες ἧττόν εἰσι συγκλίνουσαι, ἢ αἱ τῆς σφαιρικῆς ὑέλου ἀκτῖνες· ὃ δὴ θαμινώτερον ἐπισυμβαίνει. Τοῦτ᾽ ἔστιν οὖν, ὃ φθάν-

τες ἐνοήσαμεν, καθ' ἕνα μέντοι τῶν ἐφεξῆς τριῶν τρόπων συμπεσεῖν δυνάμενον· α΄. ὅταν, παράλληλοι μὴ οὖσαι, ἧττον συγκλίνωσιν, ἢ αἱ τῆς σφαιρικῆς ὑέλου· β΄. ὅταν ὦσι παράλληλοι· γ΄. ὅταν ὦσιν ἀποκλίνουσαι, ϗ ἐφ' ἑκάστης τῶν τριῶν τούτων περιπτώσεων ἀλλήλαις προσπελάζωσιν ἐν τῷ εἰσιέναι, ἀείποτε ϗ ἐξιοῦσαι προσπελάσουσιν, εἰ μόνον μετὰ τὸ ἐν τῷ εἰσιέναι θραυσθῆναι μὴ διατέμνοιντο ἀλλήλαις, πρὶν ἐξελθεῖν τῆς ὑέλου.

148. Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων δῆλον καθίσταται, ὅτι αἱ σφαιρικαὶ ὕελοι ἰδιότητα ἔχουσιν ἀξιόλογον τοῦ συλλέγειν τὰς ἡλιακὰς ἀκτῖνας· ἐπεὶ δὲ θερμότητί εἰσι συνημμέναι τοῦ φωσῆρος αἱ ἀκτῖνες, ϗ ταύτην σὺν ἐκείναις ἀγείρουσιν ἐν τόπῳ, ὃς παρὰ τοῦτο Ἑστία ἤκουσεν· ἐν δὲ ταύτῃ ἐὰν σώματα τῶν ἐμπρησίμων τεθῶσιν, ἐμπρησθήσονται· ἀνθ' ὅτου δὴ ϗ Καυστικαὶ προσαπεκλήθησαν αἱ ὕελοι· ἀλλὰ ϗ Φακοὶ διὰ τὸ σχῆμα, ὅτι φακῶπως εἰσὶν ἐνάμιλλοι.

Ἡ δὲ συλλεκτικὴ τοῦτε φωτὸς ϗ τοῦ πυρὸς ἰδιότης οὐ μόνον ταῖς σφαιροειδέσι προσανήκει ὑέλοις, ἀλλὰ ϗ ταῖς ὑπερβολικαῖς ϗ ταῖς ἐλλειπτικαῖς, ὡς εἴρηται, περὶ τῶν τοῦ Κώνου τομῶν ποιουμένοις τὸν λόγον, ϗ ἐν γένει πᾶσι τοῖς κυρτοῖς σώμασι κατὰ τὸ μᾶλλον ϗ ἧττον· αἱ μὲν γὰρ ἁπάσῃ τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ ἐσωτερικαὶ κάθετοι, ἐξ ἀνάγκης εἰσὶ συγκλίνουσαι, αἱ δ' ἐξωτερικαὶ ὑπὲρ τοῦ ἐξιόντος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας φωτὸς, ἀποκλίνουσαι· τοιγαροῦν, εἰσιοῦσαι μὲν ἐν τῷ σώματι, θραύονται πρὸς ταῖς ἐσωτερικαῖς καθέτοις· συγκλινοῦσιν ἄρα, εἰ πρὶν εἶεν παράλληλοι, οἷαι αἱ ἡλιακαί· ἐξιοῦσαι δὲ, θραύονται ἀπὸ τῶν ἐξωτερικῶν καθέτων, αἵ εἰσιν ἀποκλίνουσαι· ἄρα ϗ πάλιν συγκλινοῦσιν ἀλλήλαις.

149. ΣΧΟΛΙΟΝ. Οὐ μόνον δὲ τῇ ὑέλῳ τὸ συλλέγειν τὸ φῶς καὶ τὴν θερμότητα προσιδιάζει, ἀλλ᾽ ἐν γένει παντὶ κυρτῷ σώματι, ὅπερ ἡ ἐφελκυστικὴ ἰσχὺς μείζων εἴη τῆς τοῦ μέσου, ἀφ᾽ οὗ τὸ φῶς μεθίσταται· σφαῖρα γὰρ φέρ᾽ εἰπεῖν ὕδατος τὰ αὐτὰ ἀποτελοίη ἄν, ἃ καὶ ὑέλου· σφαῖρα γὰρ ὑελίνη κοίλη πληρωθήτω ὕδατος· καίτοι οὖν τὸ πρὶν τὴν τοῦ συλλέγειν τὸ πῦρ καὶ τὸ φῶς οὐκ εἶχεν ἰδιότητα, πληρωθεῖσα μέντοι ὕδατος τὰ τοῦ καυστικοῦ φακοῦ ἀπεργάσεται· καὶ ἀκτῖνες αἱ ἡλιακαὶ τὸ ὕδωρ διελθοῦσαι, συλλεχθήσονταί που, καὶ ὕλην εὔπρηστον ἐκεῖσε τεθεῖσαν κατακαύσουσιν· ἀλλὰ καὶ παγετοῦ λίαν διαφανοῦς καὶ ὁμαλοῦ σφαῖρα, εἰ πρὸς πόσον χρόνον τὸ σχῆμα διατηρήσειε, τὰ καυστικοῦ φακοῦ ἐπιδείξεται ἰδιώματα, πιμπραμένων καὶ δι᾽ αὐτῆς τῶν εὐπρήστων ὑλῶν.

150. Ἐκ τῶν εἰρημένων κατανοῆσαι δυνάμεθα, ὅτι καὶ ἡ ἀτμοσφαῖρα τὰ τοῦ φακοῦ ἐκπληροῖ, εἴτ᾽ οὖν καυστικῆς ὑέλου, ὅτι πρὸς κέντρον σφαιρικόν, ὅ ἐστι τῆς γῆς, συνάπτει πάσας τὰς πλαγίως εἰσβαλλούσας ἡλιακὰς ἀκτῖνας· δεδυκότος γὰρ ἄρτι τοῦ ἡλίου, πᾶσαι αἱ τῇ ἀνωτάτῃ μοίρᾳ τῆς ἀτμοσφαίρας εἰσβάλλουσαι ἀκτῖνες, θραυόμεναι ἐν αὐτῇ, τῷ τῆς γῆς κέντρῳ προσπελάζουσι (114. β΄.). παρὰ δὲ ταῦτα, ἐὰν ἐπινοήσωμεν σειρὰν θεατῶν ἑστώτων περὶ πᾶσαν τὴν γῆν, καὶ ὑπὸ τῷ αὐτῷ μεσημβρινῷ, καὶ ὀπτανομένων τὸν ἥλιον δύοντα, καθὰ καὶ ἡμεῖς, ἡ θραῦσις κατεισάξει αὐτῶν τοῖς ὀφθαλμοῖς τὰς ἡλιακὰς ἀκτῖνας, καθὰ καὶ τοῖς ἡμετέροις, τάς, εἰ μὴ θραύοιντο, διελθούσας ἂν ὑπὲρ τὴν κεφαλὴν αὐτῶν· καὶ δὴ τὸν ἥλιον, καίπερ δεδυκότα, ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἔτι κατόψονται· δῆλον δέ, ὅτι ἡ ἀερώδης σφαῖρα, ἣν ὀνομάζομεν ἀτμοσφαῖραν, συνεχῶς πρὸς τὴν γῆν συμπλαγιάζει, καὶ συγ-

νοῖ τὰς πλαγίως οἱ εἰσβαλλέσας ἀκτῖνας· ἡ ἄρα ἀτμοσφαῖρα ἐχ ὅπως τὴν διάρκειαν τῆς φυσικῆς ἡμέρας μεγεθύνει, ὡς εἴδομεν, ἀλλὰ δὴ ϗ τὴν θερμότητα· τὰ γὰρ πυροφυῆ ἄτομα, ἃ, εἰ μὴ θραύοιτο, ὕπερθεν τῦ ὁρίζοντος διελθεῖν ὤφειλον, διὰ τῆς θραύσεως καταφέρεται, ϗ ἐπιψαύει ἔτι τῶν γηΐνων σωμάτων, τῶν κειμένων πρὸς τῷ ὁρίζοντι.

151. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐὰν, ὡς συμβαίνει, σκοπήσωμεν, αἱ κοῖλαι ὕελοι ἀποδιϊςῶσιν ἀλλήλων τὰς φωτοφυεῖς ἀκτῖνας· ἔςω γὰρ ὕελος ἡ ΑΒΓΔ (σχ. 34) κοίλη κατά τε τὰ Ε, ϗ τὰ Ζ· ϗ δύω παράλληλοι ἀκτῖνες ΘΗ, ΙΚ ἐπιπιπτέτωσαν τοῖς σημείοις Η, Κ τῆς κοίλης ἐπιφανείας· ἑκατέρα ἄρα θραυσθήσεται πρὸς τῇ καθέτῳ τῇ ἐπιφανείᾳ· ἀλλαμὴν κάθετος τῇ ΑΖΔ ἐπιφανείᾳ κατὰ τὸ Η ἐςὶν ἡ ΗΒ προαγωγὴ τῆς ΤΗ ἀκτῖνος τῆς κενῆς, ἢ ἀερίυ σφαίρας ΤΑΗΖΔ, ἧς ἐςι τόξον ἡ κοίλη γραμμὴ ΑΖΔ· ἡ ΘΗ ἄρα ἀκτὶς δεξιόθεν πρὸς ἀριςερὰν παρεκτρέψεται, ϗ ἀντὶ τῦ ἐλθεῖν εἰς τὸ Λ διὰ τῆς φορᾶς ΘΗΛ, οἰσθήσεται τὴν Ητ· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΙΚ οἰσθήσεται τὴν ΚΝ· ἀποςήσονται ἄρα ἀλλήλων τῇ ὑέλῳ εἰσβάλλυσαι αἱ ἀκτῖνες. Ἀλλὰ ϗ ἐξιῦσαι ἔτι ἀποςήσονται· θραυσθήσονται γὰρ τηνικαῦτα ἀπὸ τῶν καθέτων τῇ κοίλῃ ἐπιφανείᾳ ΒΕΓ· αἱ δὲ κάθετοι αἱ ἀκτῖνές εἰσι ΠΟ, Πτ κτλ. τῆς ἀερίυ σφαίρας, ἧς τόξον ἐςὶν ἡ ΒΕΓ καμπύλη: ἡ μὲν ἄρα ἀκτὶς Ητ, ἐξιῦσα τῆς ὑέλυ, παρεκτρέψεται πάλιν πρὸς ἀριςερὰν, ἀποχωρῦσα τῆς ἀκτῖνος Πτ, ϗ ὐ τὴν τχ, ἀλλὰ καινὴν οἰσθήσεται φορὰν τὴν τρ· ἡ δὲ ΚΟ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἰσθήσεται τὴν ΟΥ.

152. Εἶπον δὲ: ἐὰν, ὡς συμβαίνει, σκοπήσωμεν· ἐπ-

ἀληθεύει γὰρ ἀεὶ τὸ δειχθὲν ἐν ταῖς ἡλιακαῖς ἀκτῖσι,
παραλλήλοις οὔσαις· ἀλλ' οὐχ ἧττον ἀληθεύει, κἂν συγ-
κλίνοιεν αἱ ἀκτῖνες ΘΗ, ΙΚ· εἰσιοῦσαι μὲν γὰρ, θραύ-
ονται πρὸς ταῖς καθέτοις ΗΒ, ΚΜ, αἳ ἀποκλίνουσιν·
ἀλλήλων ἄρα ἀποστήσονται· ἐξιοῦσαι δὲ, ἄπο τῶν καθέ-
των ΤΠ, ΟΠ, αἳ συγκλίνουσιν, ϗ αὖθις ἄρα ἀλλήλων
ἀποχωρήσουσι. τελευταῖον δὲ, εἴπερ ἀποκλίνοιεν αἱ φω-
τοφυεῖς ἀκτῖνες, ἤτοι ἀποκλίνουσιν, ὅσον ϗ αἱ τῆς ἀερίου
σφαίρας ἀκτῖνες ΤΗ, ΤΚ, ϗ οὕτω, πρὸς ὀρθὰς εἰσιοῦσαι
τῇ ὑέλῳ, ϗ κατὰ τὰς φορὰς ΗΒ, ΚΜ, οὐδόλως θραυ-
σθήσονται· ἢ ἧττον τῶν ΤΗ, ΤΚ ἀκτίνων· ϗ προσπε-
λάζουσαι αὐταῖς, μεγεθυνοῦσιν αὐτῶν τὴν ἀπόκλισιν· κἀκ
τούτου ἀλλήλων πολλῷ ἔτι ἀποχωρήσουσιν· ἢ τελευταῖον,
αἱ φωτοφυεῖς ἀκτῖνες ἀποκλίνουσι μᾶλλον, ἢ αἱ ἀκτῖνες
ΤΗ, ΤΚ· κείσθω γὰρ σῶμα φωτοφυὲς μεταξὺ τοῦ Τ
κέντρου τῆς ἀερίου σφαίρας, ἧς ἐϛι τόξον ἡ ΑΖΔ καμπύ-
λη, ϗ αὐτοῦ τοῦ ΑΖΔ κέντρου, οἷον ἐν τῷ Ψ· δύω ἄρχ
φωτοφυεῖς ἀκτῖνες αἱ ΨΗα, ΨΚΠ, μᾶλλον ἀποκλίνουσαι,
ἢ αἱ σφαιρικαὶ ἀκτῖνες ΤΗΒ, ΤΚΜ, εἰσιοῦσαι ἐν τῇ ὑέ-
λῳ, πρὸς ταῖς καθέτοις ΗΒ, ΚΜ θραυσθήσονται· ἐ-
λαττώσουσιν ἄρα τὴν ἀπόκλισιν, ἀλλήλαις προσπελά-
ζουσαι.

153. Ἀλλ' ἔμπης, ἐπεὶ ἡ θραῦσις τὰς φωτοφυεῖς
ἀκτῖνας ταῖς καθέτοις ἀποκλινούσαις προσπελάσαι ποιεῖ,
οὐδέποτε δυνήσεται συνάψαι ἀλλήλαις ἀκτῖνας δύω. Ἐντεῦ-
θεν ἄρα συνάγεται τὰς κοίλας ὑέλους ἐϛίας ἀμοιρεῖν ἐν τῇ
θραύσει, ὅ ἐϛιν οὐδέποτε διὰ τῆς θραύσεως καυϛικὰς φακὰς
ἀποκαθίϛασθαι· τοὐναντίον μὲν οὖν ἐκ τῶν εἰρημένων κατα-
φανὲς γίνεται, τὰς τοιουτώδεις ὑέλους διασκεδαννῦναι τὸ
ἡλιακὸν φῶς, δι αὐτῶν διϊόν· εἰς δ' εὕρεσιν τῆς ἐϛίας, ὅ-

των ἀφ' ὁρατῦ, ὁπωςτι ἦν ἀφεςῶτος, τοῖς φακοῖς ἐπιπίπτωσιν ἀκτῖνες, προληπτέον ταῦτα.

Τῶν φακῶν οἱ μὲν ἀμφίκυρτοι, οἱ ἑκατέρωθεν κυρτῇ ἐπιφανείᾳ περιοριζόμενοι, οἱ δ' ἀμφίκοιλοι, οἱ ἑκατέρωθεν κοίλῃ· οἱ δὲ ἐπιπεδόκυρτοι, ἢ ἐπιπεδόκοιλοι, οἱ ἔνθεν μὲν ἐπιπέδῳ ἐπιφανείᾳ, ἔνθεν δὲ, ἤτοι κυρτῇ, ἢ κοίλῃ περατούμενοι· οἱ δὲ τελευταῖον μηνίσκοι, οἱ ἔνθεν μὲν κοῖλοι, ἔνθεν δὲ κυρτοὶ τὰς ἐπιφανείας· Φακῦ δὲ ἄξων ἐςὶν εὐθεῖα, διὰ τῦ κατ' αὐτὸν κέντρυ διήκυσα· ἑςία δὲ Φακῦ ἐςὶ τῦ ἄξονος σημεῖον, καθ' ὃ ἡ τῦ φωτὸς ἀκτὶς μετὰ μίαν ἢ δευτέραν θραῦσιν συμβάλλει τῷ ἄξονι· ἐὰν δὲ αἱ ἀκτῖνες μετὰ τὸ θραυσθῆναι ἀποκλίνωσιν, τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐπὶ θάτερα προεκβληθεῖσαι συμβάλλυσι τῷ ἄξονι, ἑςία φανταςικὴ ὀνομάζεται· ἐὰν δὲ συγκλίνωσι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ ἄξονι συμπίπτωσιν, ἀληθής· τὸ δὲ εἴδωλον τῦ ὁρατῦ ἐν τῇ ἑςίᾳ κατοπτάνεται.

154. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθείσης τῆς θραυούσης κυρτῆς ἐπιφανείας ΒΑΙ, καὶ τῦ ὁρωμένυ Ο, καὶ τῦ διαςήματος ΟΑ, καὶ τῦ λόγυ π : κ, ὃν ἔχει τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν, εὑρεῖν τὴν ἑςίαν (σχ. 35).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἀπὸ τῦ Ο διὰ τῦ Κ τέρματος ἄνευ εὐθεῖα, τὸν τῆς σφαίρας ἄξονα ἐμφαίνυσα, καὶ ἔσω ΚΑ ἡ τῆς σφαίρας ἀκτὶς· καὶ ἐπιπιπτέτω ἀκτὶς ἐκ τῦ Ο προσεχέςατα τῷ Α κατὰ τὸ Ι, ὡς εἶναι τίθεσθαι τὴν ΑΙ ὡς εὐθεῖαν γραμμήν· ἀχθείσης δὲ τῆς ΚΙ ἔσεται τὸ Ι σημεῖον τῆς ἐπιπτώσεως, καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΙ ἅμα καὶ κάθετος τῆς ἐπιπτώσεως· πᾶσα γὰρ ἀκτὶς κάθετος ἐφέςηκε τῇ περιφερείᾳ· καὶ προσεκβεβλήσθω τέρματος ἄνευ αἱ ΚΙ, ΟΙ· ὑκῦν ΟΙΝ ἔςαι γωνία τῆς ἐπιπτώσεως, ἧς ἰσυμένης τῇ κατὰ κορυφὴν ΚΙΘ, ἡ ΚΙΘ ἰσωθήσεται τῇ τῆς ἐπιπτώσεως γωνίᾳ· διόπερ ἡ ἐκ τῦ κέντρυ κάθετος ΚΘ ἔςαι ἡμίτονον τῆς κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας· ἤδη δὲ γενέσθω π : κ :: ΚΘ πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ τὴν θραῦσιν γωνίας, ὃ ἔςαι ἴσον τῇ ΚΗ· τόξυ δὲ γραφέντος διὰ κέντρυ τῦ Κ, ἡ τύτυ ἐκ τῦ Ι ἁπτομένη ἀχθεῖσα ΙΠ τεμεῖ τὸν ἄξονα κατὰ τὸ Π, ἢ ἐμφανεῖ τὴν ζητυμένην ἑςίαν Π, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας ἀπόςημα = ΑΠ· ἔςαι ΚΗ ἡμίτονον τῆς ΚΙΗ γωνίας, ἥτις γίνεται ἐκ τῆς θραύσεως τῆς ἐπιπιπτύσης ἀκτῖνος ΟΙ· τύτυ δὲ ἐπικρατῦντος ἐν ἁπάσαις ταῖς εἰς ὕελον εἰσβαλλέσαις ἀκτῖσι, διὰ τὸ ἀπαράβατον τῦ λόγυ π : κ· ἐντεῦθεν ἄρα πᾶσαι θραυόμεναι τέμνυσι τὸν ἄξονα κατὰ τὸ Π, ἔνθα κεῖται ἡ ἑςία, εἴτ' ὖν τὸ τῦ ὁρατῦ εἴδωλον.

155. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Εὐχερῶς δ' ἄντις ἐντεῦθεν τύπον ἀποδοίη γενικὸν ἁπάσης ἑςίας, ἧς τὸ ἐκ τῆς ὑέλυ ἀπόςημα ἔκ τε τῆς τῦ ὁρωμένυ ἀπ' αὐτῆς ἀποςάσεως ἢ τῆς κατὰ τὴν σφαῖραν ἀκτῖνος ἤρτηται· τὸ μὲν γὰρ ἀπόςημα ΑΟ = ΑΙ (ὅτι προσεχέςαται τίθενται) εἰρήσθω δ, ἡ δὲ τῆς σφαίρας ἀκτὶς ΚΑ, η, ἢ ΑΠ = ΙΠ = ε, ἢ ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας, πρὸς τὸ τῆς κατὰ θραῦσιν, π : κ· ἐπεὶ δὲ, ἐκ τῦ ἀνωτέρυ θεωρήματος, π : κ :: ΚΘ : ΚΗ· ἄρα ΚΘ = $\frac{\pi \times KH}{\kappa}$· ἐπεὶ δὲ τὸ ΑΙ τόξον, ὡς ἀπειροςὸν, ἐκδέξασθαι δυνατὸν ὡς εὐθεῖαν, καὶ (τύτου ὑποτεθέντος) τὸ τρίγωνον ΟΑΓ ὅμοιόν ἐςι τῷ τριγώνῳ ΚΘΟ, διὰ τὴν κοινὴν γωνίαν Ο, ἢ τὰς Α, Θ ὀρθάς· ἄρα ΟΚ : ΟΙ ::

ΚΘ : ΑΙ· ἄρα $\text{ΑΙ} = \frac{\text{ΟΙ} \times \text{ΚΘ}}{\text{ΟΚ}}$· ἔςι δὲ ϗ τὸ τρίγωνον ΑΙΠ ὅμοιον τῷ ΠΚΗ τριγώνῳ, διὰ τὴν κοινὴν γωνίαν Π, ϗ τὰς Α, Η ὀρθάς· ἄρα ΚΗ : ΑΙ :: ΠΚ : ΠΑ· ἄρα $\text{ΠΑ} = \frac{\text{ΑΙ} \times \text{ΠΚ}}{\text{ΚΗ}}$· ἀντικαταςαθεισῶν δὲ ἀντὶ ΑΙ, ϗ ΚΘ, τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, ἔςαι $\text{ΠΑ} = \frac{\text{ΟΙ} \times \pi \times \text{ΚΗ} \times \text{ΠΚ}}{\kappa \times \text{ΟΚ} \times \text{ΚΗ}} = \frac{\pi \times \text{ΟΙ} \times \text{ΠΚ}}{\kappa \times \text{ΘΚ}}$· ἐπεὶ δὲ $\text{ΠΑ} = \varepsilon$, ϗ $\text{ΟΙ} = \delta$, ϗ $\text{ΚΑ} = \eta$, ἔςαι $\text{ΠΚ} = \varepsilon - \eta$, ϗ $\text{ΟΚ} = \delta + \eta$· ἐντεῦθεν τῶν δυνάμεων τούτων ἀντικαταςαθεισῶν, ἔςαι $\varepsilon = \frac{\pi \times \delta \times (\varepsilon - \eta)}{\kappa \times (\delta + \eta)} = \frac{\delta\varepsilon\pi - \pi\delta\eta}{\kappa\delta + \eta\kappa}$, τοῦτ' ἔςιν $\varepsilon\kappa\delta + \varepsilon\eta\kappa = \pi\delta\varepsilon - \pi\delta\eta$, ϗ $\pi\delta\eta = \varepsilon\pi\delta - \varepsilon\kappa\delta - \varepsilon\eta\kappa$, ϗ $\frac{\pi\delta\eta}{(\pi - \kappa)\,\delta - \eta\kappa} = \varepsilon$, ἢ $\varepsilon = \frac{\pi\delta\eta}{\pi\delta - \kappa\,(\delta + \eta)}$.

156. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν δὲ ἡ ἀκτὶς ἐπιπίπτῃ τῇ κοίλῃ ἐπιφανείᾳ (σχ. 36), ἡ τῆς σφαίρας ἀκτὶς κεῖσεται ἔνθα ϗ τὸ ὁρώμενον, ϗ δὴ, ἐναντίως ἢ πρὶν ἔχουσα, ἔςαι λειπτική· τὰ τοίνυν σύμβολα τῆς ἀκτῖνος μεταβαλεῖν χρή· ὅθεν ὁ γενικὸς τῆς ἑςίας τύπος τρέψεται εἰς τὸν $\varepsilon = \frac{\pi \times \delta\,(\varepsilon + \eta)}{\kappa \times \delta - \varepsilon} = \frac{\delta\pi\eta + \delta\pi\varepsilon}{\kappa\delta - \kappa\eta}$, $\varepsilon\kappa\delta - \varepsilon\eta\kappa = \delta\pi\eta + \delta\pi\varepsilon$, $\varepsilon\kappa\delta - \varepsilon\kappa\eta - \delta\pi\varepsilon = \delta\pi\eta$, $\varepsilon =$

$$\frac{\delta\pi\eta}{\kappa\delta - \eta\kappa - \delta\pi} = \frac{\delta\pi\eta}{(\kappa - \pi)\,\delta - \eta\kappa} = \frac{\delta\pi\eta}{\kappa\,(\delta - \eta) - \delta\pi}.$$

157. **ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.** Ἐπεὶ δὲ διὰ πειραμάτων δέδεικται ἔχειν τὸ τῆς κατ᾽ ἐπίπτωσιν γωνίας πρὸς τὸ τῆς κατὰ θραῦσιν :: 31 : 20, δυνατὸν ἄρα ἀντικαταστῆσαι, ἀντὶ μὲν π, 31, ἀντὶ δὲ κ, 20· τηνικαῦτα τοίνυν τῆς ἀκτῖνος τῇ κυρτότητι ἐπιπιπτούσης, ἔσται ε =

$$\frac{31\,\delta\eta}{31\delta - 20\delta - 20\eta} = \frac{31\,\delta\eta}{11\delta - 20\eta}$$· τῇ δὲ κοιλότητι, $$\varepsilon = \frac{31\,\delta\eta}{20\delta - 31\delta - 20\eta} = \frac{31\,\delta\eta}{-11\delta - 20\eta}.$$

158. **ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.** Ὁ δὲ τύπος τοσούτῳ ἀκριβέστερος ἔσται, ὅσῳ τοῦ Α ἔγγιον ἡ ἀκτὶς προσπίπτει, εἴτ᾽ οὖν ὅσῳ ἔλαττον τὸ ΑΙ τόξον, ὅτι τηνικαῦτα βραχύτι διαφέρει εὐθείας· ἐὰν δὲ δέῃ τὸ ΑΠ ἀκριβέστερον ἐκτιμήσασθαι, εὐθυνθήσεται ἐκ τῶν ἀναλογιῶν 7 : 22 :: 2 ΚΑ : χ (Γεωμ. 375. Τόμ. Β΄.)· ϗ 360 : χ :: ΑΙ πρὸς εὐθεῖαν γραμμήν.

159. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** Τοῦ ΑΒΓΔ (σχ. 37) μέσου ἀερίου ὄντος, ἐν ᾧ κεῖται τὸ ὁρώμενον, τοῦ δὲ ΒΔΕΖ μέσου ὑαλώδους, ϗ ἐξ ἐκείνου εἰς τοῦτο μεθισταμένου τοῦ φωτός, δοθέντων τοῦτε ἀποστήματος τοῦ ὁρωμένου, ϗ τῆς κατὰ τὴν σφαῖραν ἀκτῖνος, εὑρεῖν τὴν ἑστίαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ π = 31, ϗ κ = 20, ϗ δ κατὰ διαφόρους πρὸς τὴν ἀκτῖνα η λόγους λαμβάνεται· ἤτοι γὰρ ἔγγιςα τῆς ὑέλυ τίθεται τὸ ὁρατὸν, ἢ ἀπ᾽ αὐτῆς πλεῖον ἢ ἔλαττον ἀφέςηκεν· τῶν περιπτώσεων εἰς ἀπειρίαν προβαινυσῶν, ἁπάσαις ὁ ἀποδοθεὶς ἐξαρκέσει τύπος.

α΄. Κείσθω τὸ ὁρατὸν προσεχέςατα, εἴτ᾽ ὖν ἔξω τὸ αὐτῦ ἀπόςημα ἴσον ἀπειροςημορίῳ τῆς ἀκτῖνος, εἴτ᾽ ὖν ἔξω $\delta = \frac{\eta}{\infty}$· ὅθεν ὁ τύπος $\frac{31\delta\eta}{11\delta - 20\eta}$ τρέψεται εἰς $\frac{31\eta\eta}{\infty} : \frac{11\eta}{\infty}$ 20η, τῦτ᾽ ἔςι $\frac{31\eta\eta}{\infty} : \frac{11\eta - 20\eta\infty}{\infty}$ $= \frac{31\eta\eta\infty}{11\eta\infty - 201\cdot\infty}$· ἐπεὶ δὲ 11∞¹ ἐξυδενῦται πρός γε τὸ 20∞²η· ἄρα $\varepsilon = \frac{31\eta\eta\infty}{-20\eta\infty^2} = \frac{31\eta}{-20\infty^2}$· ἡ ἑςία ἄρα ἔςι λειπτική, καὶ τὸ εἴδωλον ἐν τοῖς αὐτοῖς τῷ ὁρωμένῳ κεῖται, ἀπειροςὸν ὅσον ἀπέχον ἀπὸ τῆς ὑέλυ.

β΄. Ηὐξήσθω ἤδη τὸ ἀπόςημα, ἔλαττον μέντοι ἔξω ἢ $\frac{20}{11}\eta$, οἷον $\frac{19}{11}\eta$· ὐκῦν ἔςαι $\frac{31\eta \times 19\eta}{11} : 19\eta - 20\eta$, εἴτ᾽ ὖν $\frac{31\eta \times 19\eta}{11} : -\eta = \frac{31\eta \times 19\eta}{-11\eta}$, ὅθεν $-11\eta : 31\eta :: 19\eta : \varepsilon$· πάλιν ἄρα ἡ ἑςία λειπτική, ἀλλὰ μᾶλλον τῆς ὑέλυ ἀφεςηκυῖα.

γ΄. $\delta = \frac{20\eta}{11}$· ὁ τοίνυν τύπος τρέψεται εἰς τὸν $\frac{31\eta \times 20\eta}{11} : 11 \times \frac{20\eta}{11} - 20\eta$, τῦτ᾽ ἔςι $\frac{31\eta \times 20\eta}{11}$ $: 20\eta - 20\eta = \frac{31\eta \times 20\eta}{11} : 0 = \frac{31\eta \times 20\eta}{0}$, ὅ, θεν $ο : 31\eta :: 20\eta : ε$· ἀλλαμὴν ὁ λόγος $ο : 31\eta$ ἐςιν ἄπειρος (Συμϐ. Λογ. 539. Τόμ. Β΄.)· ἄρα καὶ $20\eta : ε$ ἄπειρος, εἴτ' οὖν ἡ ἑςία ἀπείρως ἀποςήσεται, ὑπαρκτικὴ οὖσα ἢ λειπτικὴ, εἴτ' οὖν ἔμπροσθεν ἢ ὄπισθεν τῆς ὑέλυ κειμένη.

δ΄. Ἔςω $δ > \frac{20}{11}\eta$, οἷον $= \frac{21}{11}\eta$· τοιγαροῦν ἔςαι

$$\frac{21\eta \times 21\eta}{11} : 11 \times \frac{21\eta}{11} - 20\eta = \frac{21\eta \times 21\eta}{11},$$ ὅθεν

$11 : 31\eta :: 21\eta : ε$· ἀλλαμὴν $11 : 31\eta$ λόγος ἐςὶ πεπερασμένος· ἡ ἄρα ἑςία ἔςιν ὑπαρκτικὴ, καὶ ἐπὶ θάτερα τῆς ὑέλυ κειμένη·

έ. Ἔςω $δ = \infty\eta$· ἔςαι ἄρα τὸ ε

$$\frac{31\infty\eta\eta}{11\infty\eta - 20\eta} = \frac{31\infty\eta\eta}{11\infty\eta} = \frac{31\eta}{11},$$ ὅθεν $11 : 31 :: \eta : ε$, τοῦτ' ἔςιν ἡ ἑςία, ὅσον ἐςὶ τὸ τριπλοῦν τῆς ἀκτῖνος, διέξει.

160. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐντεῦθεν ἐν διαφόροις ἀποςήμασιν εὑρεθῆναι δύναται ἡ ἑςία· ἐκ γὰρ ἀπείρου ἀποςήματος μέχρις $\frac{20\eta}{11}$, λειπτικὴ μὲν ἡ ἑςία, τὸ δ' εἴδωλον τῆς ὑέλυ ἐκπίπτει· ἐν δὲ τῷ $\frac{20\eta}{11}$ ἐξαφανίζεται εἰς ἀπειρίαν οἰχομένη, τῶν ἀκτίνων παραλλήλως θραυομένων, ὅτε ἤτοι λειπτικὴ ἢ ὑπαρκτικὴ ἐκληφθῆναι δύναται· αὐξομένυ δὲ τοῦ ἀποςήματος, τὸ εἴδωλον ἐξ ἀπείρου ἀποςήματος ἐπὶ τ' ἀντίθετα τῆς ὑέλυ μεταςήσεται· ἐκ δὲ λειπτικῆς ἡ ἑςία ὑπαρκτικὴ γενήσεται, καὶ τὸ εἴδωλον ἀνεςραμμένον ἐν τῇ ὑέλῳ φανήσεται, μέχρις ἂν γένοιτο $δ = \infty$, εἴτ' οὖν αἱ ἀκτῖνες παράλληλοι ἐκ τοῦ

ὁρωμένου ἥκοιεν, ὅτε ἡ ἑστία τῆς ἡμιδιαμέτρου τὸ τριπλάσιον ἐκ τῆς ὑέλου ἀποστήσεται.

161. ΠΟΡΙΣΜΑ Β´. Ἐὰν δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὑέλου ᾖ κοίλη, τοῦ φωτὸς ἐξ ἀέρος εἰσβάλλοντος, χρηστέον τῷ τύπῳ $\epsilon = \frac{31\delta\eta}{-11\delta - 20\eta}$, ὃς ἐκ $\delta = \frac{\eta}{\infty}$ μέχρι $\delta = \infty\,\eta$ διαφόρους χώρους τῶν τε ἑστιῶν καὶ τῶν εἰδώλων παρέξεται· καὶ, ὡς ἂν τὸ ἀπόστημα αὔξοιτο, τὸ εἴδωλον τῆς ὑέλου ἐκστήσεται, ἀεὶ μέντοι τῆς ὑέλου ἐκτὸς, καὶ ὀρθὸν διαμενεῖ· ἡ γὰρ τῆς ϵ δύναμις λειπτικὴ ἀείποτε μένει.

162. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ´. Ἐὰν τὸ ὁρώμενον ὑποτεθῇ τῆς ὑέλου ἐντὸς, ἡ ἀκτὶς εἰς ἀέρα μεταχωρήσει, εἴτ᾽ οὖν ἐκ πυκνοτέρου μέσου ἐπὶ μανώτερον· οὐκοῦν ἔσται $\pi = 20$, καὶ $\kappa = 31$, καὶ ὁ τύπος ἐν μὲν τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ γενήσεται $\frac{20\delta\eta}{-11\delta - 31\eta}$, ἐν δὲ τῇ κοίλῃ, $\frac{20\delta\eta}{11\delta - 31\eta}$, ὧν ἑκατέρῳ ἀντικαθισταμένης ἐκ διαδοχῆς τῆς κατὰ τὸ δ δυνάμεως ἀπὸ $\delta = \frac{1}{\infty}$, μέχρι $\delta = \infty\,\eta$, ἡ ἑστία διορισθήσεται· καὶ ἐν μὲν τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ ἀεὶ ὀρθὸν μένει τὸ εἴδωλον ἐν τῇ ὑέλῳ, ἐν δὲ τῇ κοίλῃ, τοῦ δ ἀπὸ $\frac{1}{\infty}$ μέχρι $\frac{31\eta}{11}$ αὐξομένου, ἡ ἑστία ἔσεται λειπτικὴ, καὶ τὸ εἴδωλον ὀρθὸν ἔσται ἐν τῇ ὑέλῳ, ἀπὸ δὲ $\delta = \frac{31\eta}{11}$ μέχρι $\delta = \infty\,\eta$, ἡ ἑστία ἔσται ὑπαρκτικὴ, καὶ τὸ εἴδωλον ἀνεστραμμένον ἐκτὸς τῆς ὑέλου· ὅταν μὲν γὰρ αἱ ἀκτῖνες ἀποκλίνωσι μετὰ τὴν θραῦσιν, ἡ ἑστία ἔσται λειπτική· ὅταν δὲ συγκλίνωσιν, ὑπαρκτική· ὅταν δ᾽ ὦσι παράλ-

ληλοι, ἄπειροι· τὰ δ' ἐπὶ τῆς θέσεως τοῦ εἰδώλου τὸ ἐφεξῆς θεώρημα διασαφηνίσει.

168. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὅταν μὲν τὸ ὁρώμενον καὶ τὸ εἴδωλον ἐπὶ τῶν αὐτῶν κέωνται ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τοῦτ' ἔστιν ἔνθεν ἢ ἔνθεν τοῦ κέντρου ἑκάτερα, τὸ εἴδωλον φαίνεται ὀρθὸν, ὅταν δὲ μεταξὺ αὐτῶν παρεμπίπτει τὸ κέντρον, ἀνεστραμμένον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ εἴδωλον γράφεται, ἔνθα αἱ θραυσθεῖσαι ἀκτῖνες συμβάλλουσι τῷ ἄξονι, εἰ μὲν μὴ διατμηθεῖεν ἀλλήλαις, τὰ τοῦ εἰδώλου σημεῖα τηροῦσι τὴν θέσιν, ἣν ἔχει τὸ ὁρώμενον· εἰ δὲ διατμηθεῖεν, τὸ μὲν ἀνώτατον σημεῖον τὸν κατώτατον τόπον, τὸ δὲ κατώτατον τὸν ἀνώτατον, λήψεται· διόπερ ἐκείνως μὲν ὀρθὰ, οὕτω δὲ ἀνεστραμμένα φαίνονται· ἀλλ' αἱ ἀκτῖνες διατέμνονται μὲν, διὰ τοῦ κέντρου διήκουσαι, ἀδιάτμητοι δὲ μένουσι, τοῦτε εἰδώλου καὶ τοῦ ὁρωμένου ἐπὶ τῶν αὐτῶν κειμένων· οὕτω μὲν ἄρα ὀρθὸν, ἐκείνως δ' ἀνεστραμμένον φανήσεται τὸ εἴδωλον.

Ἔστω γὰρ (σχ. 38) ΔΕΖ τὸ ὁρώμενον, ἐξ οὗ ἐπιπιπτέτωσαν ἀκτῖνες εἰς τὴν κυρτὴν ὑελίνην ἐπιφάνειαν, καὶ ἤχθωσαν εὐθεῖαι διὰ τοῦ Κ κέντρου τῆς σφαίρας· τοιγαροῦν ἔσονται αἱ ΔΚδ, ΖΚζ αἱ ἐκ τριῶν σημείων προϊέμεναι ἀκτῖνες καὶ τῇ ὑέλῳ προσβάλλουσαι· πρὸς αὐταῖς δὲ προσεχέστατα ἐπιπιπτέτωσαν αἱ ΔΑ, ΕΘ, ΖΒ, ἀχθεισῶν κατ' ἐπιπτώσεις καθέτων τῶν ΚΑ, ΚΘ, ΚΒ· οὐκοῦν αἱ θραυσθεῖσαι πρὸς ταῖς καθέτοις ἀκτῖνες, διατεμνόμεναι τοῖς ἄξοσι κατὰ τὰ δ, ε, ζ, ἀνεστραμμένον τὸ εἴδωλον γράψουσιν.

Ἔστω αὖ τὸ αὐτὸ ὁρώμενον (σχ. 39) ΔΕΖ, καὶ μεταβαινέτωσαν ἐξ ὑέλου εἰς ἀέρα αἱ ἀκτῖνες· τοιγαροῦν τῶν ἀκτίνων ἀπὸ τῶν καθέτων θραυομένων, ἀχθέντων αὖθις ἀξόνων τῶν ΔΚ, ΕΚ, ΖΚ, καὶ ἀκτίνων ἐπιπιπτουσῶν τῶν ΑΔ, ΕΓ, ΖΒ, καὶ κατ' ἐπιπτώσεις καθέτων τῶν ΚΑ, ΚΘ, ΚΒ, ἀποκλινοῦσιν αἱ ἀκτῖνες, καὶ πρὸς τὸ ὁρώμενον προεκβληθεῖσαι τεμοῦσι τοὺς ἄξονας ἐν τοῖς δ, ε, ζ, ἔνθα τὸ εἴδωλον γράψουσι· καὶ τὸ μὲν δ ἐν τοῖς ἀνωτέρω, τὸ δὲ ζ ἐν τοῖς κατωτέρω κείσεται· ὅθεν φανεῖται ἀνεστραμμένον τὸ εἴδωλον.

164. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τῆς ἀκτῖνος ἐξ ἀέρος δι' ὑέλου εἰς ἀέρα μεθισαμένης, τοῦ κατὰ τὸ ὁρώμενον ἀποστήματος, καὶ τῶν ἀκτίνων ἑκατέρας τῶν σφαιρῶν, δοθέντων, εὑρεῖν τὴν ἑστίαν (σχ. 40).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΜΒ ὑέλινος φακὸς ἀμφίκυρτος, καὶ Ο τὸ ὁρώμενον, καὶ Κ κέντρον τῆς πρώτης, καὶ Γ κέντρον τῆς δευτέρας σφαίρας, ἧς ἀπόμοιρα ἡ ΜΒ, καὶ ΟΑΒΠ ἄξων, εἴτ' οὖν ἀκτὶς διὰ τοῦ κέντρου διήκουσα· καὶ ἐπιπιπτέτω ἀκτὶς ἐκ τοῦ Ο προσεχέστατα τῷ Α ἐπὶ τοῦ Ι, καὶ ἤχθω ἡ ΚΙ κάθετος τῆς ἐπιπτώσεως, καὶ ἡ ΚΘ, ἐκ τοῦ Κ τῇ ΟΘ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα, ἔστω τὸ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας· ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας π : κ :: ΚΘ : πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας, εὑρίσκεται ἡ ΚΗ· τόξου δὲ γραφέντος διὰ διαστήματος τοῦ ΚΗ, ἡ αὐτοῦ ἁπτομένη ΙΗΠ διορίσει τὴν ἑστίαν Π, καὶ τὴν αὐτῆς ἀπόστασιν ΑΠ μετὰ τὴν πρώτην διάθραυσιν. Ὑποκείσθω ἤδη τὸ εἴδωλον κατὰ τὸ Π, καὶ ἐπιπιπτέτω ἐκ τοῦ Π ἀκτὶς ἐπὶ τῆς ὑέλου κατὰ τὸ Τ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Γ ἤχθω κάθετος ἐπιπτώσεως ἡ ΓΤ· ἐκεῖν ἡ ὑπὸ ΓΤΔ ἔσται ἡ τῆς ἐπιπτώσεως γωνία· ἐκ δὲ τοῦ Γ ἀχθεῖσα κάθετος ἡ ΓΔ, ἔσται τὸ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας· ἐπεὶ δὲ ἡ ἀκτὶς αὕτη ἐκ μέσου πυκνοτέρου, εἴτ' οὖν ἐξ ὑέλου, εἰς μεσον μεταβαίνει ἀραιότερον, οἷον τὸν ἀέρα, ἔςαι $\kappa : \pi ::$ ὡς ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας ΓΔ πρὸς ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν ΓΕ· τόξυ τοίνυν γραφέντος τῦ Ε διὰ διαςήματος τῦ ΓΕ, ἡ αὐτῦ ἁπτομένη, διὰ τῦ Τ διήκυσα, τέμνει τὸν ΕΖ ἄξονα κατὰ τὸ Ζ, ὅπερ ἐςὶν ἡ ἑςία, ἧς ἀπόςασις ἡ ΒΖ μετὰ δευτέραν τὴν διάθραυσιν.

Ἔςω νῦν $KA = \eta$, ϗ $\Gamma B = H$, ϗ ΑΒ τὸ τῆς ὑέλυ πάχος $= \vartheta$· διὰ δὲ τὸ ἀπειροςὸν τόξον ΑΙ ἔςιν ΟΑ $= OI =$ τῷ ἀποςήματι τῦ ὁρωμένυ ἀπὸ τῆς ὑέλυ $= \delta$ ϗ ἔςω ΚΘ ἡμίτονον τῆς ἐπιπτώσεως $= \mu$· ἔσεται ἄρα, ἐκ τῦ προβλήματος, $\pi : \kappa :: \mu : \frac{\mu\kappa}{\pi} = KH =$ ἡμιτόνῳ τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας μετὰ τὴν πρώτην διάθραυσιν. Ἔςω δὲ ΚΔ τὸ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας $= \nu$· ϗ γενέσθω $\kappa : \pi :: \nu : \frac{\pi\nu}{\kappa} = \Gamma E =$ ἡμιτόνῳ τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας μετὰ τὴν δευτέραν διάθραυσιν· ἔςω δὲ $B\Pi = \upsilon$, ϗ $BZ = \chi$, ὑκῦν ἔςαι $A\Pi = AB + B\Pi = \vartheta + \upsilon$, ϗ $\Pi K = \Pi B + AB - KA = \upsilon + \vartheta - \eta$· ϗ διὰ μὲν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΑΙ, ΟΚΘ, ὡς εἴρηται κἀν (155), ἔςαι $OK : OA :: K\Theta : AI$, τῦτ' ἔςιν $\delta + \eta : \delta :: \mu : \frac{\delta\mu}{\delta + \eta} = AI$, διὰ δὲ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΠΚΗ, ΠΑΙ ἔςιν $HK : \Pi K :: AI : A\Pi$, τῦτ' ἔςι $\frac{\kappa\mu}{\pi} : \upsilon + \vartheta - \eta :: \frac{\delta\mu}{\delta + \eta} : \upsilon + \vartheta$, ὅθεν

$$\frac{\kappa\mu\upsilon + \kappa\mu\vartheta}{\pi} = \frac{\delta\mu\upsilon + \delta\mu\vartheta - \delta\mu\eta}{\delta + \eta},$$ ϗ $\kappa\mu\upsilon\delta + \kappa\mu\vartheta\delta + \kappa\mu\upsilon\eta + \kappa\mu\vartheta\rho = \delta\mu\upsilon\pi + \delta\mu\vartheta\pi - \delta\mu\eta\pi$· διαιρέ-

σει δὲ διὰ μ, ϗ μεταθέσει, $κθδ + κθη - πδθ + πδη = πυδ - κυδ - κυη$, τῦτ' ἔστιν $υ = \frac{κθδ + κθη - πδθ + πδη}{πδ - κδ - κη}$. Πάλιν διὰ μὲν τὴν ὁμοιότητα τῶν ΠΒΤ, ΠΓΔ τριγώνων ἔστι $ΠΓ : ΠΒ :: ΓΔ : ΒΤ$, τῦτ' ἔστιν $υ + Η : υ :: ν : \frac{νυ}{υ+Η} = ΒΤ$, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΖΓΕ, ΖΒΤ τριγώνων ἔστι $ΓΕ : ΒΤ :: ΖΓ : ΖΒ$, τῦτ' ἔστι $\frac{πν}{κ} : \frac{νυ}{υ + Η} :: χ + Η : χ$, ὅθεν $\frac{πνχ}{κ} = \frac{νυχ + νυΗ}{υ+Η}$, ϗ $πνχυ + πνχΗ = νυχκ + νυΗκ$, ϗ $πχΗ = κυχ + κυΗ - πχυ$, ϗ $\frac{πχΗ}{κχ+κΗ-πχ} = υ$· παραθέσει δὲ τῶν δυεῖν τῆς υ δυνάμεων, πορίζεται $\frac{πχΗ}{κχ+κΗ-πχ} = \frac{κθδ + κθη + πδη - πθδ}{πδ - κδ - κη}$· ἀφανισμῷ δὲ τῶν κλασμάτων, $ππχΗδ - πκχΗδ - κκχΗη = κκχδθ + κκχθη + πκχδη - πκχθδ + κκθδΗ + κκθΗη + πκδΗη - πκθδΗ - πκθδχ - πκηθχ - ππδηχ + ππθδχ$, ϗ μεταθέσει ἀφ' ἑνὸς μὲν μέρους τῶν ἀγνώστων, ἐπὶ δὲ θατέρου τῶν γνωστῶν, $ππχΗδ - πκχΗδ - πκχΗη - κκχδθ - κκχθη - πκχδη + πκχθδ + πκθηχ + ππδηχ - ππθδχ = κκθδΗ + κκθΗη + πκδΗη - πκθδΗ$· διαιρέσει δὲ τέλος πορισθήσεται $χ =$

$$\frac{κκδθΗη + κκθΗη +}{ππΗδ - πκΗδ - πκΗη - κκδθ - κκθη -}$$

$$\frac{\pi\kappa\delta H\eta - \pi\kappa\vartheta\delta H}{\pi\kappa\delta\eta + 2\pi\kappa\vartheta\delta + \pi\kappa\vartheta\eta + \pi\kappa\delta\eta - \pi^2\vartheta\delta}$$

ἀντικαταςαθέντων δὲ $\pi = 31$, ϗ $\kappa = 20$, ἔσεται $\chi =$

$$400\vartheta\delta H - 400\vartheta H\eta -$$

$$961H\delta - 620H\delta - 620H\eta - 400\delta\vartheta - 400\vartheta\eta - 62$$

$$620\delta H\eta - 620\vartheta\delta H$$

$$o\delta\eta + 1240\vartheta\delta + 620\vartheta\eta + 9610\delta\eta + 961\delta\eta - 691\epsilon\delta$$

ϗ $\chi = \dfrac{620\delta H\eta - 220\delta\vartheta + 400H\eta\delta}{341H\delta - 620H\eta - 121\delta\vartheta - 220\vartheta\eta + 341\delta\eta}$.

ἐπεὶ δὲ τὸ τῆς ὑέλου πάχος ὡς ποσότης μικρὰ παραλείπεσθαι δύναται, τῶν ὅρων, οἷς ἀπαντᾶ τὸ ϑ, ἐξουθενουμένων, ἔςαι $\chi = \dfrac{620\delta H\eta}{341H\delta - 620H\eta + 341\delta\eta}$, διαιρεθέντος δὲ τοῦ κλάσματος ἄνω ϗ κάτω διὰ 31, πορίζεται $\chi = \dfrac{20\delta H\eta}{11H\delta - 20H\eta + 11\delta\eta}$· ἐὰν δὲ ἴσαι ὦσιν αἱ ἀκτῖνες, ὡς συμβαίνει μάλιςα ἐν τοῖς κυρτοκύρτοις ὑέλοις, ἔςαι $\chi = \dfrac{20\delta\eta}{11\delta\eta + 11\delta\eta - 20\eta\eta} =$

$\dfrac{20\delta\eta}{22\delta\eta - 20\eta}$, ὅ ἐςιν ἡ ἑςία μετὰ διττὴν τὴν θραῦσιν ἔςιν ε

$= \dfrac{10\delta\eta}{11\delta\eta - 10\eta}$,

165. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ δὲ τοῦ γενικοῦ τούτου τύπου πάντα τὰ ἀποςήματα εὑρίσκονται, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προηγησαμένῳ κεφαλαίῳ, ϗ δηλωθήσεται ἐν τῷ ἐφεξῆς ἐκτεθησομένῳ προβλήματι· ἀλλ᾽ οὐ γὰρ ἅπασαι αἱ ἀκτῖνες μετὰ διττὴν θραῦσιν συγκλίνουσι· τινὲς δὲ ϗ παρ-

ἄλληλοι γίνονται, ὅτε τῶν ὑέλων αἱ ἐπιφάνειαι πολύγωνα εἶεν ἀναλογικά· ἔςι δὲ

166. ΟΡΙΣΜΟΣ. Πολύγωνον ἀναλογικὸν, ὃ τῦ ἡμίσεως αἱ πλευραὶ παράλληλοί τε καὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς θατέρυ ἡμίσεως, ὡς ἐν τοῖς σχήμασι 41, 42, 43, 44, 45, 46.

Ἀκτὶς δὲ ἡ διὰ τῦ κέντρυ αὐτῶν διερχομένη ἀκτὶς ὀνομάζεται ἀρχική.

167. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἀκτὶς ὑέλῳ ἀναλογικῇ ὕτως ἐπιπίπτυσα, ὥςε θραυσμένη διὰ τῦ κέντρυ διέρχεσθαι, παράλληλος ἐξελεύσεται ἑτέρωθεν τῇ ἐπιπιπτύσῃ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειδὴ ἀεὶ ἡ αὐτή ἐςιν αἰτία τῆς θραύσεως, ὅταν ἡ ἀκτὶς εἰσίῃ, καὶ ὅταν ἐξίῃ τῆς ὑέλυ, καὶ ἐκείνως μὲν ἐξ ἀραιοτέρυ μεθίςαται εἰς πυκνότερον, ὕτω δ' ἀνάπαλιν ἐκ πυκνοτέρυ εἰς ἀραιότερον, ἐπάναγκες, εἰσιῦσαν μὲν πρὸς τῆς καθέτῳ, ἐξιῦσαν δ' ἄπο τῆς καθέτυ, θραύεσθαι· ἐὰν ὖν ἔντε τῇ εἰσόδῳ καὶ τῇ ἐξόδω ὦσι παράλληλα τὰ ἐπίπεδα ογ, δυ (σχ. 41), ὅπερ συμβαίνει, ἡνίκα ἡ ἀκτὶς διαβαίνει διὰ τῦ κέντρυ, ἡ ἐν τῇ εἰσόδῳ γωνία ο ἴση ἔςαι τῇ κατὰ τὴν ἔξοδον υ· καὶ δὴ ἡ αο παράλληλος τῇ υβ, εἴτ' ὖν ἡ ἐξιῦσα ἀκτὶς υβ παράλληλος τῇ εἰσιύσῃ αο.

168. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ ἄρα ἀμφίκυρτοι ἢ ἀμφίκοιλοι ὕελοι ὡς ἀναλογικὰ σχήματα ἐκληπτέαι, ὅταν αἱ ἀκτῖνες τῶν κυρτοτήτων ἢ κοιλοτήτων ἰσάλληλοι ὦσιν· αἱ γὰρ τῆς ὕπερθεν ἀπειροςαὶ πλευραὶ παράλληλοί εἰσι ταῖς τῆς ἔνερθεν ἐπιφανείας, ἔνθα τὰ τῆς διὰ τῦ κέντρυ διϊύσης γραμμῆς σημεῖα τῇ ἐπιφανείᾳ συμπίπτυσι· τηνικαῦτα ἄρα ἡ ἀρχικὴ ἀκτὶς, εἴτ' ὖν ἡ διὰ τῦ κέντρυ ἡκῦσα, παράλληλος ἔξεισιν· ἐὰν δὲ ἡ ὕελος ᾖ ἐπιπεδό-

κυρτος, ἢ ἐπιπεδόκοιλος (σχ. 44, 45), ἀκτὶς ἀρχικὴ ἐστὶ μόνη ἡ διὰ τοῦ μέσου τῆς κυρτότητος ἢ τῆς κοιλότητος εἰσβάλλουσα· ἐνταῦθα γὰρ μόνον ἀπειροστὴ γραμμὴ παράλληλός ἐστι τῇ ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου ἐπιφανείας.

169. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δʹ.** Εὑρεῖν τὸν τόπον τοῦ εἰδώλου, εἴτ' οὖν τὴν ἑστίαν, ἐπὶ παντὸς ἀποστήματος τοῦ ὁρωμένου, καὶ παντὸς σχήματος ὑέλου μετὰ διπλῆν τὴν διάθραυσιν.

ΛΥΣΙΣ. Αʹ. Ἔστω ἡ ὕελος ἀμφίκυρτος· καὶ εἰλήφθω ὁ ἀνωτέρω δειχθεὶς τύπος $\epsilon = \frac{10\delta\eta}{11\delta - 10\eta}$, ὅπου αὖθις ἐξ ἀποστήματος ἀπειροστοῦ μέχρι τοῦ ἰσουμένου τῷ $\frac{10\eta}{11}$ εὑρίσκεται ε λειπτική, καὶ τὸ εἴδωλον ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ ὁρωμένῳ ὡς πρὸς τὴν ἐπιπίπτουσαν ἀκτῖνα, καὶ τὴν ὕελον, καὶ ὀρθὸν φαίνεται· ἀφισταμένου δὲ τοῦ ὁρατοῦ, καὶ τὸ εἴδωλον συναφίσταται· αἱ δ' ἀκτῖνες ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀποκλίνουσι, μέχρις ἂν παράλληλοι ἐμπέσοιεν· ἐκ δὲ τοῦ $\delta = \frac{10\eta}{11}$ μέχρι $\delta = \infty\eta$, ἡ δύναμις τῆς χ ποσότητος ὑπαρκτική· αἱ δ' ἀκτῖνες ἐκ παραλλήλων συγκλίνουσι· καὶ ἐπεὶ τὸ εἴδωλον ἐπὶ θάτερα κεῖται τῆς ἐπιπιπτούσης ἀκτῖνος καὶ τῆς ὑέλου, ἀνεστραμμένον φανεῖται.

Βʹ. Ἔστω ἡ ὕελος ἐπιπεδόκυρτος· τοιγαροῦν τῆς κατὰ τὸ ἐπίπεδον ἀκτῖνος ἀπείρῳ ἰσουμένης ποσῷ, ἐστὶν $H = \infty$, οὗτινος ἀντικατασταθέντος ἐν τῷ τύπῳ

$$\frac{20\delta\eta H}{11\delta H + 11\delta\eta - 20\eta H},$$ γίνεται