αἱ δὲ ῥοπαὶ τῶν Γ, Δ κατ' ἀναφορὰν τῦ Ξ, εἰσὶ Γ × ΓΞ + Δ × ΔΞ, ποσότης, ᾗ ἠλάττωνται αἱ ῥοπαὶ τῶν Γ, Δ κατ' ἀναφορὰν τῦ Π μετενεχθέντων ἐπὶ τὸ Ξ· ἀλλ' ἡ αὔξησις τῶν κατὰ τὰ Α, Β ῥοπῶν ἐςὶν ἴση τῇ μειώσει τῶν κατὰ τὰ Γ, Δ (420)· ἄρα Α × ΑΞ + Β × ΒΞ = Γ × ΓΞ + Δ × ΔΞ· ἄρα ἢ τῶν ῥοπῶν τύτων αἱ ἰσχῦς ἴσαι, εἴτ' ὖν Α + Β = Γ + Δ ἀναφερόμεναι πρὸς τὸ Ξ· ἄρα τὸ Ξ, ὖ ἐφικνεῖται τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως πηλίκον ΠΞ, ἐςὶ τὸ τῆς ἰσοςαθμίας κέντρον (410), ἢ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ὑπὲρ τῶν σωμάτων Α, Β, Γ, Δ. Ο. Ε. Δ.

422. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ὅταν ζητῆται τὸ μεταξὺ δύω μόνων σωμάτων Α, Β (σχ. 20) κέντρον τῆς βαρύτητος, δυνατὸν ἀεὶ ὑποθέσθαι ΠΑ = $\frac{1}{\infty}$, ἢ ΑΒ = 1· δυνατὸν δὲ ἢ τὴν μὲν ἐλάσσονα ποσότητα Α ὑποθέσθαι = 1, ἢ ν τὸν λόγον αὐτῆς πρὸς τὴν μείζονα Β· ὅθεν Β = 1 × ν = ν· τύτων τεθέντων α'. τὸ Α γινόμενον κέντρον τῆς κινήσεως, δι' αὐτὸ τῦτο, ὅτι ΠΑ = $\frac{1}{\infty}$, ἡ ῥοπὴ αὐτῦ ἔςαι 1 × $\frac{1}{\infty}$ = 1 × 0 = 0· ἡ δὲ ῥοπὴ τῦ Β ἔςαι = Β × ΑΒ = ν × 1 = ν· τὸ ἄρα ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν ἔςαι ν + 0 = ν· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν μαζῶν ἔςαι Α + Β = 1 + ν· ἄρα $\frac{\nu}{\nu + 1}$ ἀποδώσει τὸ τῦ κέντρυ τῆς κινήσεως τῦ σώματος Α ἀπὸ τῦ κέντρυ τῆς βαρύτητος Ξ ἀπόςημα (421).

423. Βυλομένας ἄρα εὑρεῖν τὸ μεταξὺ δύω σωμάτων Α, Β, κέντρον τῆς βαρύτητος, ληπτέον τῆς ὅλης εὐθείας ΑΒ μέρος τὸ ΑΞ = $\frac{\nu}{\nu + 1}$, ὃ ἐμφανεῖ τὸ τῦ ἐλάττονος σώματος Α ἀπὸ τῦ τῆς βαρύτητος κέντρυ ἀπό-

σημα· τὰ δ' ἐφεξῆς ὑποδείγματα διασαφηνιοῦσιν αὐτίκα τὴν τοῦ τύπου ἔννοιαν.

Ἐὰν Β, ἢ ν, $= 1$, ὑποτιθεμένου ἀεὶ καὶ $\mathrm{A} = 1$, τουτ- έστιν ἐὰν ᾖ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, ἔσται $\frac{\nu}{\nu + 1} = \frac{1}{2}$ (309)· ὃ ἐμφαί- νει τὸ τῆς βαρύτητος κέντρον Ξ τὸ μέσον εἶναι τῆς εὐθείας ΑΒ· ἐὰν $\mathrm{B} = 2$, ἔσται $\frac{\nu}{\nu + 1} = \frac{2}{2 + 1} = \frac{2}{3}$· οὐκοῦν ΑΞ ἔσται $\frac{2}{3}$ τῆς ΑΒ· ἐὰν δὲ $\mathrm{B} = 3$, ἔσται $\mathrm{A}\Xi = \frac{3}{4}$ τῆς ΑΒ, καὶ οὕτως ἑξῆς.

424. α'. Ἄρα ἐγνωσμένων τῶν μαζῶν δύω σωμά- των Α, Β, καὶ τῆς αὐτὰ διακρινούσης εὐθείας ΑΒ, πρὸς δεξιὰν τοῦ ἐλάσσονος σώματος Α θετέον τὸ τῆς βαρύτη- τος κέντρον ἐν τῷ τέλει τοῦ ΑΞ μέρους τῆς ΑΒ, ἐμφαινο- μένου διὰ $\frac{\nu}{\nu + 1}$, ὡς εἴδομεν ἤδη.

β'. Δύω μόνων σωμάτων δοθέντων τῶν Α, Β, ἵν' ἰσόσταθμα γένωνται ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας λαμβανομένης πρὸς τὸ δοκοῦν, διοριστέον δύω μέρη αὐτῆς ΑΞ, ΒΞ ἔχον- τα πρὸς ἄλληλα ὡς $\nu : 1$· τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἑνώσεως Ξ ἔσται τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος, τιθεμένου τοῦ ἐλάσσονος Α ἐπὶ τοῦ πέρατος Α τοῦ μείζονος ἀποστήματος ΑΞ· ἐὰν οὖν ᾖ $\nu = 1$, ληπτέον $\mathrm{A}\Xi = \mathrm{B}\Xi$· ἐὰν δὲ $\nu = 2$, λη- πτέον $\mathrm{A}\Xi = 2\mathrm{B}\Xi$· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

γ'. Δοθέντων τοῦ Β, καὶ τοῦ Ξ κέντρου τῆς βαρύτητος, καὶ τοῦ ἀποστήματος ΒΞ, ἵνα τὸ Α ἰσόσταθμον γένηται τῷ Β, ληπτέον $\mathrm{A}\Xi = \nu \times \mathrm{B}\Xi$· ἐὰν οὖν $\nu = 5$, εἴτ' οὖν, ἐὰν $\mathrm{B} = 5\mathrm{A}$, ληπτέον $\mathrm{A}\Xi = 5\mathrm{B}\Xi$.

Ἢ γοῦν Α καὶ τῆς εὐθείας ΑΞ δοθέντων, ληπτέον μέρος ΒΞ, ὃ εἴη πρὸς ΑΞ ὡς 1 : ν, τυτέστιν ὃ εἴη ἥμισυ τῆς ΑΞ, ἐὰν ᾖ ν = 2, τὸ τρίτον δὲ, ἐὰν ν = 3, κτλ.

Ἐν ἁπάσαις ταῖς εἰρημέναις περιπτώσεσι, τῶν ἀποστημάτων ΑΞ, ΒΞ ἀντιστρόφως ὄντων ὡς αἱ μάζαι Α, Β, ἀεὶ ἔσαι ΑΞ : ΒΞ : : Β : Α, καὶ ἐκ τῦ ἀκολύθυ ΑΞ × Α = ΒΞ × Β· αἱ ἰσχῦς ἄρα, ἢ αἱ ποσότητος τῆς κινήσεως τῶν δύω σωμάτων Α, Β, ἔσονται ἴσαι· ἄρα τὰ δύω σώματα ἔσονται ἰσόσταθμα.

425. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἐὰν ληφθῇ ὡς βαρύτητος κέντρον σημεῖον ὁ,τιῦν τὸ Β (σχ. 21), κείμενον μεταξὺ τῶν Α, Δ περάτων τῦ ΑΔ διαστήματος, ἐν ᾧ κεῖται ὁσαποτ' ἂν ᾖ βάρη, εὑρεθήσεται ἀεὶ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος πάντων τύτων τῶν βάρεων, διαιρυμένης τῆς διαφορᾶς τῶν ῥοπῶν τῶν σωμάτων τῶν πρὸς δεξιὰν τῦ Β, καὶ τῶν ῥοπῶν τῶν σωμάτων τῶν προς ἀριστερὰν, διὰ τῦ ἀθροίσματος τῶν μαζῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ ῥοπαὶ τῶν πρὸς δεξιὰν τῦ Β σωμάτων ἐναντίαι ὖσαι ταῖς πρὸς ἀριστερὰν, ἔσονται ὡς πρὸς ταύτας λειπτικαὶ, καὶ ἀνάπαλιν· διαιρετέον ἄρα ὐ τὸ ἄθροισμα πασῶν τύτων τῶν ῥοπῶν, ἀλλὰ μόνην τὴν αὐτῶν διαφορὰν διὰ τῦ ἀθροίσματος τῶν μαζῶν.

Ὑποτιθεμένων ἀεὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων, αἳ καὶ πρότερον (419), εἴτ' ὖν Α = 1, καὶ Β = 2, καὶ Γ = 3, καὶ Δ = 4, καὶ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ, καὶ πρὸς τὸ δοκῦν τῶν μὲν πρὸς δεξιὰν τῦ Β ἐκληφθέντων ὑπαρκτικῶν, καὶ ἐκ τῦ ἀκολύθυ λειπτικῶν τῶν πρὸς ἀριστερὰν, ἔσαι : Α × ΑΒ + Β × ο (422) + Γ × ΒΓ + Δ × ΒΔ = — 1 + ο + 3 + 8 = 10· ὐκῦν τῦ 10 ἀθροίσματος τῶν ῥοπῶν διαιρεθέντος διὰ τῦ 10 τῶν μαζῶν, πρόεισιν 1· δῆλον ὖν ὡς τὸ τῦ Β κέντρυ τῆς κινήσεως ἀπὸ τῦ Ξ ζητυμένυ κέντρου τῆς βαρύτητος ἀπόστημα ΒΞ ἔσται = ΒΓ· καὶ δὴ βουλομένοις εὑρεῖν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος, ὡς ἀπαιτεῖ τὸ θεώρημα, διαιρετέον τὴν τῶν ῥοπῶν διαφορὰν διὰ τοῦ τῶν μαζῶν ἀθροίσματος. Ο.Ε.Δ.

426. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.** Ἐὰν τὸ τῆς κινήσεως κέντρον ᾖ κατὰ τὸ Γ, καθ' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπαρκτικῶν ῥοπῶν ἰσοῦται τῷ τῶν λειπτικῶν, τηνικαῦτα τὸ τῆς κινήσεως κέντρον τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ βαρύτητος· ἔσται γὰρ ἡ διαφορὰ τῶν ῥοπῶν τότε ο, ὃ διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σωματοτήτων δίδωσι ο, ἀπόστημα τοῦ κέντρου τῆς κινήσεως ἀπὸ τοῦ τῆς βαρύτητος.

427. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.** Ἐπίσης εὑρεθήσεται τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ὅσων δήποτε βουλώμεθα σωμάτων, εἴτε λαμβανομένου ὡς κέντρου κινήσεως σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 20), ὃ οὐ κεῖται μεταξὺ τῶν βάρεων Α, Β, οἷον τὸ Π (421) ἢ τὸ Α (422) καὶ διαιρουμένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ῥοπῶν διὰ τοῦ τῶν μαζῶν· εἴτε λαμβανομένου τοῦ κέντρου τῆς κινήσεως μεταξὺ τῶν σωμάτων Α, Β (σχ. 21) οἷον τὸ Β (425), ἢ τὸ Γ (426), καὶ διαιρουμένης τηνικαῦτα τῆς διαφορᾶς τῶν ῥοπῶν· διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μαζῶν, ὡς ἐν τῷ προεκτεθέντι ὑποδείγματι καταφαίνεται.

428. **ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.** Εἰς εὕρεσιν ἄρα τοῦ μεταξὺ πολλῶν σωμάτων κέντρου τῆς βαρύτητος, οὐκ ἐν γένει διαιρετέον τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν πάντων τῶν σωμάτων Α, Β, Γ, Δ ἀναφερομένων εἴς τι σημεῖον τῶν τῆς εὐθείας ΑΔ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σωματοτήτων· καὶ γὰρ εἰ ληφθείη τὸ κέντρον τῆς κινήσεως, μεταξὺ τῶν σωμάτων Α, Β, Γ, Δ, ἥκιστα τὸ ἄθροισμα διαιρεῖν δεῖ, τὴν δὲ διαφορὰν τῶνδε τῶν ῥοπῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΑΚΟΣΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τῶν ἐπιφανειῶν.

429. Εἴδομεν ἤδη ὅπως εὑρίσκεται τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος, ὅσων ἂν βουλώμεθα σωμάτων, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ ἐκλαμβανομένων ὡς σημείων ἐμπεπλησμένων ἁπάσης τῆς βαρύτητος αὐτῶν τῶν σωμάτων, ἤ, ὃ δήπου ταὐτὸν, θεωρουμένου μόνου τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος ἑκάστου τῶνδε τῶν σωμάτων (411)· ἐπινοήσωμεν ἤδη γραμμὴν οἱονεὶ σύνθετον ἐκ πολλῶν τοιούτων σημείων, ἀμέσως συνημμένων, καὶ πάντων ἰσοβαρῶν· σαφὲς οὖν ὡς τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τοιᾶσδε γραμμῆς, ἔσται αὐτῆς τὸ μέσον· ἐντεῦθεν οὖν ἐπιζητήσομεν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῶν τε ἐπιφανειῶν, καὶ τῶν στερεῶν.

430. ΘΕΩΡΗΜΑ Α′. Κέντρον βαρύτητος περιμέτρου παντὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 22) ἐστι τὸ σημεῖον Ξ, καθ' ὃ τέμνονται δύω εὐθεῖαι θη, εζ, ἀγόμεναι ἑκατέρα ἀπὸ τοῦ μέσου ἑκάστης πλευρᾶς ἐπὶ τὸ τῆς ἀντιθέτου μέσον.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ γὰρ θ σημεῖον τῆς εὐθείας θη ἐστι κέντρον βαρύτητος τῆς πλευρᾶς ΑΒ (429)· τὸ δ' αὐτῆς η, κέντρον βαρύτητος τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ζυγὸς θη ἐπίσης βαρούμενος δεξιόθεν τε καὶ ἀριστερόθεν τοῦ μέσου σημείου Ξ, ἕξει τὸ τῆς ἑαυτοῦ βαρύτητος κέντρον ἐπὶ τοῦ Ξ· ὡσαύτως ἐν τῷ ζυγῷ εζ, τὸ μὲν ε κέντρον ἐστὶ βαρύτητος τῆς ΑΓ, τὸ δὲ ζ, τῆς ΒΔ· ἑκατέρωθεν οὖν ἐπίσης βαρούμενος, ἕξει καὶ αὐτὸς κέντρον βαρύτητος τὸ Ξ· τὸ ἄρα Ξ ἔσται κέντρον κοινὸν βαρύτητος τῶν τεσσάρων ἀντικειμένων πλευρῶν, εἰτ' ἒν αὐτῆς τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου. Ο. Ε. Δ.

431. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οὐκοῦν καὶ τῆς ἐπιφανείας παντὸς παραλληλογράμμου κέντρον βαρύτητος ἐστι τὸ Ξ, καθ' ὃ τέμνονται αἱ δύω εὐθεῖαι θη, εζ, αἱ τὰ μέσα τῶν ἀντιθέτων πλευρῶν ἐπιζευγνύουσαι· ὡς γὰρ τὸ τοῦ ζυγοῦ θη σημεῖον θ ἐστι κέντρον βαρύτητος τῆς ΑΒ, οὕτω τὰ ἐφεξῆς σημεῖα τῆς θη εἰσὶ κέντρα βαρύτητος πασῶν τῶν τῇ ΑΒ παραλλήλων χυ κτ., ἐξ ὧν σύγκειται τὸ παραλληλόγραμμον· οὐκοῦν ὁ ζυγὸς θὴ ἰσομερῶς βαρούμενος, καὶ οὕτως αἴρων ἅπαν τὸ βάρος τοῦ παραλληλογράμμου, ἕξει τὸ ἑαυτοῦ κέντρον τῆς βαρύτητος, καὶ δὴ τὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλογράμμου κατὰ τὸ μέσον Ξ.

432. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Τριγώνου δοθέντος τοῦ ΑΒΓ εὑρεῖν τῆς περιμέτρου αὐτοῦ τὸ τῆς βαρύτητος κέντρον (σχ. 23).

ΛΥΣΙΣ. Τὰ μέσα η, ο, τ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἔσονται κέντρα βαρύτητος ἕκαστον ἑκάστης· οὐκοῦν ἀχθεῖσα ἡ εὐθεῖα ηο ἔσται ζυγὸς βαρούμενος, κατὰ μὲν τὸ η τῇ πλευρᾷ ΑΒ, κατὰ δὲ τὸ ο τῇ ΑΓ· ζηθείσθω τοίνυν (423) τὸ δ κέντρον τῆς βαρύτητος ταύτης τῆς εὐθείας· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δτ ἀπὸ τοῦ κέντρου δ ἐπὶ τὸ τ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ· οὐκοῦν ἡ δτ ἔσται καὶ αὐτὴ ζυγὸς βαρούμενος, κατὰ μὲν τὸ δ τῷ βάρει τοῦ ζυγοῦ ηο, τουτέστιν τῷ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, κατὰ δὲ τὸ τ, τῇ πλευρᾷ ΒΓ· ζητείσθω οὖν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦδε τοῦ καινοῦ ζυγοῦ (423)· ὃ δὴ ἔσται τῆς τοῦ ΑΒΓΔ περιμέτρου. Ο. Ε. Π.

433. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Κέντρον βαρύτητος περιμέτρου παντὸς κανονικοῦ σχήματος ἐστιν αὐτὸ τὸ κέντρον τοῦ σχήματος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω πρῶτον ἀρτιόπλευρον τὸ σχῆμα, εἴτ' οὖν τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 24)· ἑκάςη οὖν εὐθεῖα, οἷα ἡ δζ, ἐπιζευγνύουσα τὰ δύω μέσα δ, ζ δύω ἀντιθέτων πλευρῶν, ἔςαι ζυγὸς κατασπώμενος ἑκατέρωθεν βάρεσιν ἴσοις, εἴτ' οὖν τοῖς δ, ζ κέντροις τῆς βαρύτητος τῶν πλευρῶν ΑΖ, ΔΓ· οὐκοῦν κέντρον βαρύτητος κοινὸν ἀμφοτέραις ἔςαι τὸ μέσον ο τῆς δζ εὐθείας· ὡσαύτως δειχθήσεται κέντρον βαρύτητος τὸ ο πασῶν τῶν ἄλλων ἀντιθέτων πλευρῶν (Γεωμ. 245. Τόμ. Β΄.)· καὶ δὴ κέντρον βαρύτητος πασῶν τῶν πλευρῶν, εἴτ' οὖν τῆς περιμέτρου τοῦ σχήματος, ἔςαι αὐτὸ τὸ ο κέντρον τοῦ κανονικοῦ σχήματος.

Ἀλλ' ἔςω νῦν περιττόπλευρον, εἴτ' οὖν τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 25)· ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ μέσου ζ τῆς ΓΔ πλευρᾶς ἡ εὐθεῖα ζΑ πρὸς τὴν ἀντίθετον γωνίαν Α, καὶ αἱ πη, μν ἐπιζευγνύτωσαν τὰ μέσα τῶν ἀντιθέτων πλευρῶν· οὐκοῦν τὸ τ σημεῖον τὸ μέσον τῆς πη ἔςαι τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῶν δύω πλευρῶν ΑΒ, ΑΕ· ὡσαύτως τὸ χ, τῶν ΒΓ, ΕΔ· τὸ δὲ ζ πέρας τῆς Αζ ἐςὶ κέντρον βαρύτητος τῆς πλευρᾶς ΔΓ· ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΖ ζυγός ἐςι κατασπώμενος τοῖς βάρεσι τ, χ, ζ πάσης τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, ἕξει σημεῖόν τι τὸ ο, ὃ ἔςαι κέντρον βαρύτητος πάσης ταύτης τῆς περιμέτρου· ἐὰν οὖν ἔτι ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ μΒ ἀπὸ τοῦ μέσου μ ἑτέρας πλευρᾶς ἐπὶ τὴν αὐτῇ ἀντίθετον γωνίαν, τοῦ πολυγώνου ὄντος κανονικοῦ, ἔςαι καὶ αὐτὴ ζυγὸς κατασπώμενος ὡσαύτως ἅπασι τοῖς τῆς περιμέτρου βάρεσι, καὶ περιέχων τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς περιμέτρου· ἐπεὶ δὲ αὗται αἱ εὐθεῖαι Αζ, μΒ διήκουσιν ἀμφότεραι διὰ τοῦ αὐτοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος, κατ' αὐτὸ δὴ καὶ τέμνονται· ἀλλὰ τὸ, καθ' ὃ τέμνονται, σημεῖον ἐςιν αὐτὸ τὸ κέντον τῦ κανονικῦ σχήματος (Γεωμ. 245)· ἄρα κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς περιμέτρυ ἔςιν αὐτὸ τὸ κέντρον τῦ σχήματος. Ο. Ε. Δ.

434. ΘΕΩΡΗΜΑ Γʹ. Κέντρον τῆς βαρύτητος ἐπιφανείας παντὸς κανονικῦ ἐςιν αὐτὸ τὸ κέντρον τῦ κανονικῦ πολυγώνυ.

ΔΕΙΞΙΣ. Τῆς ἐπιφανείας ἰσομερῶς βαρείας ὑποτιθεμένης, τὸ βάρος τῦτο ἔςαι τῇ ἐπιφανείᾳ ἀνάλογον· ἀλλὰ παντὸς πολυγώνυ κανονικῦ ἴσα μέρη ἐπιφανείας κεῖται περὶ τὸ κέντρον· ἄρα ϗ ἴσα μέρη βαρύτητος· ἄρα τὸ κέντρον τῦ σχήματος ἐςι ϗ κέντρον τῆς αὐτῦ βαρύτητος. Ο. Ε. Δ.

435. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δὲ ϗ ὁ κύκλος κανονικὸν ἐςι πολύγωνον, ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτέμενον (Γεωμ. 34. Τόμ. Αʹ.)· ἄρα ϗ αὐτῦ κέντρον βαρύτητος τῆς τε περιμέτρυ ϗ τῆς ἐπιφανείας ἐςιν αὐτὸ τὸ κέντρον αὐτῦ.

436. ΘΕΩΡΗΜΑ Δʹ. Κέντρον βαρύτητος τῆς ἐπιφανείας παντὸς τριγώνυ ΑΒΔ (σχ. 26) ἐςι τὸ σημεῖον Κ, καθ' ὃ τέμνονται δύω εὐθεῖαι εΔ, Αζ, ἀγόμεναι ἐκ τῶν μέσων ε, ζ δύω πλευρῶν πρὸς τὰς ὑπ' αὐτῶν ὑποτεινομένας γωνίας.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ Βζ=ζΔ (ἐκ κατασκευῆς) ϗ πάντα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, Αθο κτ. τὰ διὰ τῆς Αζ ἐπὶ πάντων τῶν ςοιχείων θο κτ. συνιςάμενα, εἰσὶν ὅμοια, ἡ Αζ εὐθεῖα τεμεῖ δίχα πάσας τὰς παραλλήλυς θο κτ., ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ἐπιφάνεια τῦ τριγώνυ ΑΒΔ· πάντα ἄρα τὰ σημεῖα τὰ μεταξὺ Α ϗ ζ ἔσονται κέντρα βαρύτητος πασῶν τέτων τῶν παραλλήλων· μεταξὺ δὲ αὐτῶν ἔςαι ἓν κοινὸν κέντρον τῆς βαρύτητος αὐτῶν ἁπάντων· ϗ δὴ κέντρον βαρύτητος τῆς ἐπιφανείας τῦ σχήματος· ἐπὶ πᾶσι δὲ, ὑποτιθεμένων καὶ τῇ ΑΒ πλευρᾷ παραλλήλων, συλλογισμῷ ὁμοίῳ δειχθήσεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα εΔ ἐςὶ ὁ αὐτὸς ζυγὸς κατασπώμενος τοῖς κέντροις τῆς βαρυτῆτος πασῶν τέτων τῶν παραλλήλων, περιέχων ὁ αὐτὸς τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῦ σχήματος· ἀλλὰ τῦτο κοινὸν ὂν ἑκατέραις ταῖς Αζ, εΔ εὐθείαις, ὐ δύναται ἄλλο εἶναι, ἢ τὸ κοινῆς αὐτῶν διατομῆς σημεῖον Κ· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

437. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἵν' εὑρεθῇ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος παντὸς τραπεζίυ τῦ ΑΒΓΔ (σχ. 27)· α. ἤχθω διαγώνιος ἡ ΒΓ· β΄: ζητηθήτω τὸ κέντρον π τριγώνυ ΒΓΔ, ὁ τὸ τ τῦ ΑΒΓ· γ΄. ἐπιζευχθείσης τῆς πτ ζητηθήτω μεταξὺ τέτων τῶν δύω σημείων (423) τὸ ο κοινὸν ἀμφοῖν τοῖν τριγώνοιν κέντρον τῆς βαρύτητος.

438. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἵνα τοίνυν εὑρεθῇ τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ἐπιφανείας ἀκανονίςυ παντὸς σχήματος τῦ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 28), ἀχθεισῶν ἀπὸ μιᾶς γωνίας τῆς Α πρὸς τὰς ἄλλας εὐθειῶν, εὑρεθήτωσαν τὰ κέντρα τῆς βαρύτητος ε, ι, ο, υ τῆς ἐπιφανείας ἑκάςυ τριγώνυ, ὁ δύω κέντρα προσεχῆ τὰ ε, ι ἐπεζευκέτω ἡ ει, ἐφ' ἧς ζητηθήτω τὸ κοινὸν αὐτοῖς κέντρον τῆς βαρύτητος τ· τῦτο δὲ ὁ τὸ ο ἐπεζευκέτω ἡ το, ἐφ' ἧς ζητηθήτω τὸ κοινὸν τοῖς τρισὶ προτέροις τριγώνοις κέντρον τῆς βαρύτητος ψ· τὸ δὲ ὁ τὸ υ ἐπεζευκέτω ἡ υψ, ἐφ' ἧς εὑρεθήτω τὸ χ κέντρον τῆς βαρύτητος τὸ κοινὸν ἅπασι τοῖς τριγώνοις, τυτέςι τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ὅλυ τῦ σχήματος.

439. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Τὸ μέρος κζ (σχ. 26), τὸ μεταξὺ τῆς ΔΒ βάσεως ὁ τῦ κέντρυ τῆς βαρύτητος τῆς ἐπιφανείας τῦ τριγώνυ, $\frac{1}{3}$ ἐςὶ τῆς εὐθείας Αζ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς ζχ παραλλήλως τῇ

ΑΒ, ἔσονται ὅμοια τὰ τρίγωνα ΒΔε, ζΔχ, ὡσαύτως ϗ τὰ ΑεΚ, Κζχ (Γεωμ. 220. Τόμ. Β΄.)· ἔςιν ἄρα $\zeta\Delta = \frac{Β\Delta}{2} : Β\Delta :: \zeta\chi : Βε$· ἄρα $\zeta\chi = \frac{Βε}{2} = \frac{Αε}{2}$· ἀλλὰ $\zeta\chi : Αε :: Κ\zeta : ΑΚ$· ἄρα $Κ\zeta = \frac{ΑΚ}{2}$· ἐντεῦθεν ἄρα $Κ\zeta = \frac{Α\zeta}{3}$. Ο. Ε. Δ.

440. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸ Θ κέντρον τῆς βαρύτητος τόξυ παντὸς καμπύλης τῦ ΑΜ (σχ. 29).

ΛΥΣΙΣ. Νοηθήτω τόξον ἀπειροςὸν τὸ Μμ, ϗ τεθήτω ὡς ἄξων τῶν ῥοπῶν τῶν τῦ δοθέντος τόξυ σημείων εὐθεῖα ἡ ΓΝ, παράλληλος ταῖς τεταγμέναις, ϗ αὐταῖς ἐξ ὑποθέσεως παραλλήλοις ὔσαις πρὸς ἀλλήλας· ϗ τὸ τῦ Γ ἀπὸ τῆς τῶν ἀποτετμημένων ἀρχῆς Α ἀπόςημα ἔςω $= \beta$· ἵν' ὖν εὑρεθείη τὸ τῦ Θ κέντρυ τῆς βαρύτητος ἀπὸ τῦ ἄξονος ΓΝ ἀπόςημα Θϑ, ἐπάναγκες λαβεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ τὰ τόξα Μμ ῥοπῶν, ἀναφερομένων πρὸς τὸν ΓΝ ἄξονα, ϗ τῦτο διελεῖν διὰ τῦ ἀθροίσματος τῶν Μμ τόξων, εἶτ' ὖν τῦ τόξυ ΑΜ (427)· ἀλλὰ τῦ Μμ τόξυ ἀπειροςῦ ὄντος, τὸ ἀπὸ τῦ κατ' αὐτὸ μέσυ ν ἀπόςημα τῆς ΓΝ, ἐκληπτέον ἐςὶν ἴσον τῇ ΜΝ· ἄρα $Μμ \times ΜΝ$ ἔςιν ἡ ῥοπὴ τῦδε τῦ τόξυ (415)· ἀλλ' ἐὰν ῥηθῶσιν $ΑΠ = \chi$, ϗ $ΠΜ = \upsilon$ ἔςαι (Ἀπειρ. 255) $Μμ = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ ϗ $ΜΝ = ΓΠ = \beta - \chi$· ἄρα $(\beta - \chi) \cdot \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ ἔςιν ἡ ῥοπὴ τῦ ἀπειροςῦ τόξυ Μμ, ϗ ἑπομένως $Ο(\beta - \chi) \cdot \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ ἐςὶ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ῥοπῶν τῶν ἀπειροςῶν τόξων Μμ, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ τόξον ΑΜ· ἄρα $Θϑ = \frac{Ο(\beta - \chi) \cdot \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{ΑΜ}$· ὅπως δὲ τὸ τόξον ΑΜ, ὅπερ ἐςὶ διαιρέτης τῆς ποσότητος ταύτης, ἐκτιμηθείη ἄν, ἀποδέδονται ἤδη μέθοδοι (Α'πειρ. 255, 274)· Ο'μοία δὲ συλλογισμῦ ἐφόδῳ τὸ τῦ κέντρυ τῆς βαρύτητος ἀπὸ τῦ ἄξονος ΑΠ ἀπόςημα $\Theta\vartheta^{1} = \dfrac{O.\upsilon\sqrt{(\delta\chi^{2}+\delta\upsilon^{2})}}{AM}$.

441. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Τύποι ὗτοι ὑπάρχυσι γενικοὶ εἰς διορισμὸν τῦ κέντρυ τῆς βαρύτητος παντὸς τόξυ καμπύλης ἐξυπηρετῦντες.

442. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ε'ὰν τὸ τόξον, ὗ τὸ τῆς βαρύτητος κέντρον θηρώμεθα, συγκέηται ἐκ δυοῖν μερῶν ἴσων ᾗ ὁμοίων ΑΜ, ΑΜ' ($\sigma\chi$. 30), τῦ μὲν ἔνθεν, τῦ δ' ἑτέρωθεν κειμένων τῦ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονος, δῆλον ὅτι τὸ τῆς βαρύτητος αὐτῦ κέντρον Θ ἔςαι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΠ· ζητεῖται τοίνυν μόνον εὑρεῖν αὐτῦ τὸ ἀπόςημα ἀπὸ τῦ σημείυ Γ· ἐπεὶ δὲ αἱ χορδαὶ τῶν δυοῖν τόξων Μμ, Μ'μ', ἀναφερομένων πρὸς τὸν ἄξονα ΜΝ', εἰσὶν ἰσάλληλοι, τὸ ἀπόςημα ΘΓ ἔςαι ἴσον τῷ $\dfrac{2.O.(\beta-\chi).\sqrt{(\delta\chi^{2}+\delta\upsilon^{2})}}{MAM'}$.

443. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ε'ςω τὸ ΜΑΜ' τόξον κυκλικόν· τοιγαρῦν $\upsilon = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$ (Υ'ψηλ. Γ. 12), τῦ α τὴν διάμετρον ἐμφαίνοντος· ἔςι δὲ (Α'πειρ. 259)

$$\sqrt{(\delta\chi^{2}+\delta\upsilon)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}\cdot$$ ἄρα $2O(\beta-\chi)$

$$\sqrt{(\delta\chi^{2}+\delta\upsilon^{2})} = \frac{2O.\frac{1}{2}\alpha(\beta-\chi)\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}} = 2O(\beta-\chi)$$

$\delta\chi(\alpha\chi-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$. κείσθω δὲ, διὰ τὸ ἁπλύςερον, κέντρον τὸ σημεῖον Γ· ὑκῦν ΑΓ $= \beta = \frac{1}{2}\alpha$· ἄρα $2O(\beta$

$-\chi)\delta\chi(\alpha\chi-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = 2O(\frac{1}{2}\alpha-\chi)\delta\chi(\alpha\chi -$

$\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = \alpha\surd(\alpha\chi - \chi\chi)$ (Α΄πειρ. 237), ᾧ μηδὲν ἄτρεπτον ποσὸν προσθεῖναι δεῖ· ϗ γάρ, ὄντος $\chi = 0$, ἡ ἀμετάτρεπτος γίνεται οὐδέν· ὥσπερ ϗ ἔχειν ἐπάναγκες, εἴγε τὸ τῶν ῥοπῶν ἄθροισμα τηνικαῦτα ἐξουδενοῦται.

Ἔστιν ἄρα $2\mathrm{O}(\beta - \chi)\delta\chi\surd(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2) = \alpha\surd(\alpha\chi - \chi\chi)$, ϗ ἑπομένως $\Gamma\Theta = \dfrac{\alpha\surd(\alpha\chi - \chi\chi)}{\mathrm{MAM'}}$

$= \dfrac{\alpha \times 2\surd(\alpha\chi - \chi\chi)}{\mathrm{MAM'}} = \dfrac{\Gamma\mathrm{A} \times \mathrm{MM'}}{\mathrm{MAM'}}$, ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναλογία ΜΑΜ' : ΜΜ' :: ΓΑ : ΓΘ· ὅ ἐστι „τὸ „τοῦ κυκλικοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος παν„τὸς κυκλικοῦ τόξου ἀπόστημα ἐστὶν εὐθεῖα τετάρτη ἀνά„λογος τοῦ μήκους τοῦ τόξου, ϗ τῆς αὐτοῦ χορδῆς, ϗ τῆς „ἀκτῖνος.“

444. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν ἐφαρμόσαι τοὺς τύπους τούτους ἁπάσῃ καμπύλῃ.

445. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ἐπιφανείας τῆς ΑΠΜ, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς καμπύλης ΑΜ ϗ τῶν εὐθειῶν ΑΠ, ΠΜ (σχ. 31).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω τὸ ζητούμενον κέντρον εἶναι τὸ Θ· δεῖ τοίνυν, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀποστήματος Θϑ, λαβεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν τραπεζιδίων ΜΠμπ, ἀναφερομένων πρὸς ἄξονα τῶν ῥοπῶν τὸν ΓΝ, ϗ διελεῖν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶνδε τῶν τραπεζιδίων, εἴτ' οὖν διὰ τοῦ χωρίου ΑΠΜ (427)· ἀλλὰ τὸ ι κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦ τραπεζιδίου κεῖται κατὰ τὸ μέσον τῆς εὐθείας νκ τῆς ἴσον ἀπεχούσης τῆς τε ΜΠ, ϗ τῆς μπ· τοῦτο δὲ τὸ μέσον ι ἐκλαβεῖν ἔχομεν ὡς μέσον τῆς ΜΠ διὰ τὸ ἀπειροστὸν ὕψος Ππ· ἐστὶν ἄρα τὸ ἀπόστημα ιλ = ΓΠ· οὐκοῦν ἡ τοῦ ΠπμΜ ῥοπὴ, ἀναφερομένη πρὸς τὴν ΝΓ, ἐστὶ ΠπμΠ $\times$ ΓΠ, τοῦτ' ἐστὶν $\upsilon\delta\chi\,(\beta-\chi)$, καλουμένων ἀεὶ, τῆς μὲν ΓΑ, β, τῆς δὲ ΑΠ, χ· τὸ ἄρα ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν ἔσται $O\,(\beta-\chi)\,\upsilon\delta\chi$, καὶ ἑπομένως τὸ ἀπόστημα Θϑ ἔσται $\dfrac{O\,(\beta-\chi)\,\upsilon\delta\chi}{\text{ΑΠΜ}}$. εὑρεθήσεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ἀπόστημα $\Theta\vartheta' = \dfrac{O\,.\,\frac{1}{2}\,\upsilon^2\delta\chi}{\text{ΑΠΜ}}$. Ο. Ε. Π.

446. ΣΧΟΛΙΟΝ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσεται ἐν γένει τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος παντὸς ἐπιπέδου χωρίου, ἀναλυομένου ἀμέλει εἰς ἀπειροστὰ τραπεζίδια.

447. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κείσθω εὑρεῖν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τριγώνου τοῦ ΑΝΝ' (σχ. 32)· εἰλήφθωσαν οὖν ἡ βάσις ΝΝ' καὶ τὸ ὕψος ΑΓ ὡς ἄξονες τῶν ῥοπῶν· καὶ ῥηθήτωσαν $\text{ΑΠ} = \chi$, καὶ $\text{ΜΜ'} = \upsilon$, καὶ $\text{ΑΓ} = \beta$· οὐκοῦν ἔσται $\text{ΜΜ'}\mu'\mu = \upsilon\delta\chi$· ἡ δὲ ῥοπὴ τοῦδε τοῦ τραπεζιδίου ἀναφερομένου πρὸς τὴν ΝΓ ἔσται $(\beta-\chi)\,\upsilon\delta\chi$· ὡς εἶναι τὸ τῆς βαρύτητος κέντρον ὡς πρὸς τὴν βάσιν $\dfrac{O\,(\beta-\chi)\upsilon\delta\chi}{\text{ΑΜΜ'}}$.

οὐκοῦν κληθείσης γ τῆς βάσεως ἐστὶν ΑΓ : ΑΠ :: ΝΝ' : ΜΜ', ὅ ἐστι $\beta : \chi :: \gamma : \upsilon = \dfrac{\gamma\chi}{\beta}$· ἄρα $O\,(\beta-\chi)\,\upsilon\delta\chi$ γίνεται $O\,(\beta-\chi)\,\dfrac{\gamma\chi\delta\chi}{\beta}$, ἢ $O\,\dfrac{\gamma}{\beta}\,(\beta\chi\delta\chi - \chi^2\delta\chi)$

$$= \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\beta\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}\right) \text{ (Α' ἀπειρ. 229) } = \frac{\gamma\chi^2}{6\beta}\,(3\beta - 2\chi)\cdot$$

ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια ΑΜΜ' ἐστὶν $= \dfrac{\text{ΜΜ'} \times \text{ΑΠ}}{2} = \dfrac{\gamma\chi^2}{2\beta}$.

ἄρα τὸ ἀπόστημα τοῦ τῆς βαρύτητος κέντρου ἐστὶ

$$\frac{\frac{\gamma\chi^2}{6\beta}(3\beta-2\chi)}{\frac{\gamma\chi^2}{2\beta}} = \tfrac{1}{3}(3\beta-2\chi),$$ ὅπερ, ὄντος $\chi = \beta$, γίνεται $\frac{1}{3}\beta$· ἄρα $\Theta\vartheta = \frac{1}{3}\beta$· ἀλλ' ἐὰν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΘΛ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΛ, ΘϑΛ προκύψει $\Lambda\Theta : \Lambda A :: \Theta\vartheta : A\Gamma :: \frac{1}{3}\beta : \beta :: 1 : 3$· ἄρα $\Lambda\Theta = \frac{1}{3}\Lambda A$, ὅπερ ἀκριβῶς συνᾴδει τοῖς ἀρτίως προαποδεδειγμένοις (439).

448. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ὑποτεθείσθω ἡ ΑΠΜ ἐπιφάνεια ἀπόμοιρα κύκλου, οὗ διάμετρος α, καὶ κέντρον τὸ Κ· ὅθεν $\beta = \frac{1}{2}\alpha$· ἔστι δὲ $\upsilon = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$ (Τψ. Γ. 12)· ἄρα $O.(\beta-\chi)\upsilon\delta\chi = O(\frac{1}{2}\alpha-\chi)\delta\chi\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)} = O(\frac{1}{2}\alpha-\chi)\delta\chi(\alpha\chi-\chi\chi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(\alpha\chi-\chi\chi)^{\frac{3}{2}}$ (Α'πειρ. 237), ᾧτινι οὐδὲν ὅλως προσθεῖναι δεῖ ἄτρεπτον, εἴγε γίνεται τὸ ἄτρεπτον μηδέν, ὄντος $\chi = 0$· ἄρα $\Theta\vartheta = \frac{\frac{1}{3}(\alpha\chi-\chi\chi)^{\frac{3}{2}}}{A\Pi M} = \frac{\frac{1}{3}(\Pi M)^3}{A\Pi M}$· ζητουμένου δὲ τοῦ ἀποστήματος $\Theta\vartheta'$, ἐπείπερ $\upsilon = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ἡ δύναμις αὐτοῦ $\frac{O . \frac{1}{2}\upsilon^2\delta\chi}{A\Pi M}$ (445) ἔσται $\Theta\vartheta' =$

$$\frac{O\frac{1}{2}.(\alpha\chi-\chi\chi)\delta\chi}{A\Pi M}$$· ἀλλαμὴν $\frac{1}{2}(\alpha\chi-\chi\chi)\delta\chi =$

$$O\tfrac{1}{2}.(\alpha\chi\delta\chi - \chi^2\delta\chi) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}\right)$$ (Α'πειρ. 229)

$= \frac{1}{12}\chi^2(3\alpha-2\chi)$· ἄρα $\Theta\vartheta' = \frac{\frac{1}{12}\chi^2(3\alpha-2\chi)}{A\Pi M}$.

Ὅταν δὲ λόγος γίνηται περὶ τοῦ ὅλου τμήματος, ἐπεὶ δῆλον τὸ τῆς βαρύτητος κέντρον Θ κεῖσθαι (Σχ. 30) ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ, ἥτις εἰς δύω ἰσάλληλα μέρη τὸ τόξον τέμνει, καὶ ἀπέχειν τῆς ΝΝ', ὅσον καὶ ἑκάτερον τῶν δυοῖν κέντρων τῆς βαρύτητος ἑκατέρε τῶν δυοῖν τμημάτων ΑΠΜ, ΑΠΜ, ἐντεῦθεν ἔςαι $\Gamma\Theta = \frac{\frac{1}{3}\Pi M^3}{A\Pi M} =$ $\frac{\frac{1}{24}\cdot 8\cdot \Pi M^3}{A\Pi M} = \frac{\frac{1}{24}MM'^3}{A\Pi M} = \frac{\frac{1}{12}(MM')^3}{2A\Pi M} = \frac{\frac{1}{12}(MM')^3}{AMM'A}$, ὅ ἐςι „τὸ τῦ κυκλικῦ κέντρυ ἀπὸ τῦ τῆς βαρύτητος ἐπι„φανείας παντὸς κυκλικῦ τμήματος ἀπόςημα ἐςὶν ἴσον „τῷ δωδεκάτῳ μέρει τῦ ἀπὸ τῆς χορδῆς κύβυ, διαιρε„θέντι διὰ τῆς ἐπιφανείας τῦδε τῦ τμήματος.“

449. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Κείσθω εὑρεῖν τὸ τῆς βαρύτητος κέντρον τῦ κυκλικῦ τομέως ΚΜΑΜ' (σχ. 33)· δῆλον ὄν, ὅτι τὸ Θ κέντρον τῆς βαρύτητος τῦ τμήματος ΜΑΜ', καὶ τὸ τῦ τομέως εἴτ' ὂν τὸ Θ', καὶ τὸ Θ'' τὸ τῦ τριγώνυ, πάντα κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ· καὶ δὴ ἡ τῦ τομέως ῥοπὴ ἐξισῦσθαι ὀφείλει τῇ τῦ τμήματος συνάμα τῇ τῦ τριγώνυ· ἐςὶν ἄρα $KMAM' \times K\Theta' = MAM' \times K\Theta + KMM' \times K\Theta''$· ἀλλαμὴν εὕρηται $K\Theta = \frac{\frac{1}{3}\Pi M^3}{A\Pi M}$, ὃ μεταβαλεῖν ἔχει εἰς $\frac{\frac{2}{3}\Pi M^3}{2A\Pi M} = \frac{\frac{2}{3}\Pi M^3}{MAM'}$. ἄρα $K\Theta \times MAM' = \frac{2}{3}\Pi M^3$· εἴδομεν δὲ παρὰ ταῦτα, ὅτι $KMM' = \Pi M \times K\Pi$, καὶ (439) $K\Theta'' = \frac{2}{3}K\Pi$, ὡς ὑπάρχειν $KMM' \times K\Theta'' = \frac{2}{3}\Pi M \times K\Pi^2$· ἀντικαταςάσει ἄρα τύτων τῶν δυνάμεων, εὑρίσκεται $KMAM' \times K\Theta = \frac{2}{3}\Pi M^3 + \frac{2}{3}\Pi M \times K\Pi^2 = \frac{2}{3}\Pi M\,[(\Pi M)^2 + (K\Pi)^2] = \frac{2}{3}\Pi M \times (KM)^2$, διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΠΜ· ἄρα $K\Theta' = \frac{\frac{2}{3}\Pi M \times (KM)^2}{KMAM'}$. ἀλλ' ἡ

τῦ τομέως ἐπιφάνεια ἐςὶν ἴση τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ τόξυ ΜΑΜ′ ἐξ τῦ $\frac{ΚΜ}{2}$ (Γεωμ. 299. Τομ. Β′)· ἄρα ΚΘ′ =

$$\frac{\frac{2}{3}ΠΜ \times (ΚΜ)^2}{\frac{ΜΑΜ' \times ΚΜ}{2}} = \frac{\frac{4}{3}ΠΜ \times ΚΜ}{ΜΑΜ'} = \frac{\frac{2}{3}ΜΜ' \times ΚΑ}{ΜΑΜ'},$$

τῦτ᾽ ἔςιν „τὸ τῦ κυκλικῦ κέντρυ ἀπὸ τῦ τῆς βαρύτητος „παντὸς κυκλικῦ τομέως ἀπόςημα ἔςιν εὐθεῖα τετάρτη „ἀνάλογυς τῦ τόξυ, καὶ τῆς ἀκτῖνος, καὶ δυοῖν τῆς „χορδῆς τριτημορίων.“

450. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τοῖς τύποις τύτοις δυνάμεθα χρήσασθαι ἐπὶ πάσης καμπύλης, φέρ᾽ εἰπεῖν, τῆς παραβολῆς, κτλ.

451. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῶν ἀπογεννωμένων ἐκ περιαγωγῆς καμπύλων γραμμῶν (σχ. 34.).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ ἑκάςη ςοιχειώδης ζώνη, ὡς κύκλος ἐκλαμβανομένη, τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ἔχει ἐπὶ τῦ ἑαυτῆς κυκλικῦ κέντρυ (435)· κεῖται ἄρα ἐπὶ τῦ τῆς περιαγωγῆς ἄξονος ΓΑ· ἔςω τοίνυν τυτὶ τὸ κέντρον τὸ Π· ἀλλὰ τύπος τῆς ςοιχειώδυς ζώνης ἐςὶ (Ἀπειρ. 258) $\frac{\pi}{\eta}υ \sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$, η : π ἐμφαινόντων τὸν τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον· ἄρα (καλυμένυ ἀεὶ β τῦ ΑΓ ἀποςήματος τῆς τῶν ἀποτετμημένων ἀρχῆς ἀπὸ τῦ ΝΝ′ ἄξονος τῶν ῥοπῶν) $\frac{\pi}{\eta}(β - χ)\, υ \sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$ ἔςαι ῥοπὴ ταύτης τῆς ζώνης· ὥςε τὸ τῦ Θ κέντρυ τῆς βαρύτητος τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τῦ Γ ἀπόςημα ΘΓ, ῥηθείσης

Σ τῆς ἐπιφανείας ταύτης, εἶναι $\frac{\int \frac{\pi}{\eta}(\beta-\chi)\, \upsilon \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\Sigma}$.

452. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Κείσθω εὑρεῖν τὸ τῆς βαρύτητος κέντρον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ κώνου ΑΝΝ' (σχ. 35)· τῆς οὖν ΑΠ ἔσης χ, καὶ τῆς ΠΜ, υ, καὶ τοῦ ὕψους ΑΓ, β, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν ἀκτῖνος ΓΝ, α, καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΝ, ε, ἐκ μὲν τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΝ, Μρμ προκύψει ΑΓ : ΑΝ :: Μρ : Μμ, τοῦτ' ἔστι $\beta : \varepsilon :: \delta\chi : \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \frac{\varepsilon\delta\chi}{\beta}$: ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΝ, ΑΠΜ προελεύσεται ΑΓ : ΓΝ :: ΑΠ : ΠΜ, τοῦτ' ἔστι $\beta : \alpha :: \chi : \upsilon = \frac{\alpha\chi}{\beta}$· ἄρα $\int \frac{\pi}{\eta}(\beta-\chi)$ $\upsilon\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ γίνεται $\int \frac{\pi}{\eta} \times (\beta-\chi) \times \frac{\alpha\chi}{\beta} \times \frac{\varepsilon\delta\chi}{\beta}$

$$= \int \frac{\pi\alpha\varepsilon}{\eta\beta^2}(\beta\chi\delta\chi - \chi^2\delta\chi) = \frac{\pi\alpha\varepsilon}{\eta\beta^2} \times \left(\frac{\beta\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}\right)$$

$= \frac{\pi\alpha\varepsilon\chi^2}{6\eta\beta^2} \times (3\beta - 2\chi)$· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μέρους ΑΜ'ΑΜΑ $= \Sigma$ ἔστι (Γεωμ. 442. Τόμ. Α'.) $= \frac{\mathrm{ΑΜ}}{2} \times$ κυκλ. ΠΜ, ἔστι δὲ ΑΓ : ΑΠ :: ΑΝ : ΑΜ $= \frac{\mathrm{ΑΠ}\,.\,\mathrm{ΑΝ}}{\mathrm{ΑΓ}}$.

ἄρα $\Sigma = \frac{\mathrm{ΑΠ} \times \mathrm{ΑΝ}}{2\mathrm{ΑΓ}} \times$ κυκλ. ΠΜ $= \frac{\pi}{\eta} \times \frac{\alpha\varepsilon}{2\beta\beta}\chi\chi$·

ἄρα τὸ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τῆς ἐπιφανείας ΑΜ'ΑΜΑ ἀπὸ τῦ σημεῖυ Γ ἀπόςημα ἐςὶν $\dfrac{\dfrac{\pi\alpha\varepsilon\chi^2}{6\eta\beta^2}(3\beta - 2\chi)}{\dfrac{\pi\alpha\varepsilon}{2\eta\beta^2}\chi^2} =$

$\frac{1}{3}(3\beta - 2\chi) = \beta - \frac{2}{3}\chi$· ἄρα, ὄντος $\chi = \beta$, ἡ ΑΠ $=$ ΑΓ, τὸ τῦ κέντρυ τῆς βαρύτητος τῆς ὅλης κωνικῆς ἐπιφανείας ἀπόςημα ΘΓ ἔςαι $= \beta - \frac{2}{3}\beta = \frac{1}{3}\beta$, τῦτ' ἔςι, τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ταὐτὸν ἔςαι τῷ τῆς ἐπιφανείας τῦ τριγώνυ ΑΝΝ'.

453. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Κείσθω εὑρεῖν τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας (σχ. 36)· ἔξομεν τοιγαρῦν $\upsilon = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, τῦ α τὴν διάμετρον ὑποδηλῦντος· ἐ $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \dfrac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· ἄρα $\text{O}.\dfrac{\pi}{\eta}(\beta - \chi)\,\upsilon\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \text{O}\dfrac{\pi}{\eta}(\beta - \chi) \times \frac{1}{2}\alpha\delta\chi$· τιθεμένοις ὂν τὸ Κ κέντρον, ὅθεν γίνεται $\beta = \frac{1}{2}\alpha$, ἔςαι $\text{O}\dfrac{\pi}{\eta}(\beta - \chi) \times \frac{1}{2}\alpha\delta\chi = \text{O}\dfrac{\pi\alpha}{2\eta}(\frac{1}{2}\alpha\delta\chi - \chi\delta\chi) = \dfrac{\pi\alpha}{2\eta}(\frac{1}{2}\alpha\chi - \frac{1}{2}\chi\chi) = \dfrac{\pi\alpha\chi}{2\eta}(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi)$· ἀλλ' ἡ Σ ἐπιφάνεια τῦ σφαιρικῦ τμήματος ΑΜΛΜ'Α ἐςὶν $= \dfrac{\pi\alpha\chi}{2\eta}$ (Α' τευχ. 259)· ἐςὶν ἄρα τὸ τῦ κέντρυ Κ ἀπὸ τῦ Θ κέντρυ τῆς βαρύτητος ἀπόςημα ΚΘ $= \dfrac{\dfrac{\pi\alpha\chi}{2\eta}(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi)}{\dfrac{\pi\alpha\chi}{2\eta}}$

$= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi = KA - \frac{1}{2}A\Pi$, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ κέντρον Θ ἔστι κατὰ τὸ μέσον Θ τοῦ κατὰ τόδε τὸ τμῆμα ὕψους ΑΠ· ἐντεῦθεν ἐπαγαγεῖν ἐνγένει δυνάμεθα „ ἁπάσης σφαιρι„κῆς ζώνης ἀπολαμβανομένης ὑπὸ δυοῖν παραλλήλων ἐ„πιπέδων τῆς ἐπιφανείας τὸ τῆς βαρύτητος κέντρον ἔστι „ κατὰ τὸ μέσον τοῦ τῆς ζώνης ὕψους."

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΑΚΟΣΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τῶν στερεῶν.

454. ΘΕΩΡΗΜΑ. Κέντρον βαρύτητος παντὸς πρίσματος καὶ κυλίνδρου ἔστι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνύσης τὰ κέντρα τῆς βαρύτητος τῶν βάσεων τῆς τε ὕπερθεν καὶ τῆς ἔνερθεν.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶν πρίσμα, καὶ κύλινδρος ἅπας, ἐπινοηθῆναι δύναται συγκείμενος ἐξ ἀπειραρίθμων στιβάδων ἰσοβαρῶν, παραλλήλων, καὶ ἴσων ταῖς βάσεσι τῇ ὕπερθεν καὶ τῇ ἔνερθεν· εὐθεῖα δὲ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τῆς ὕπερθεν βάσεως ἐπὶ τὸ τῆς ἔνερθεν, προδήλως διήξει διὰ πάντων τῶν κέντρων τῆς βαρύτητος τῶν παραλλήλων στιβάδων· ἔσται οὖν αὕτη ζυγὸς ἰσομερῶς κατασπώμενος δι᾽ ὅλου αὐτοῦ τοῦ μήκους, οὗ τὸ μέσον ἔσται ἑπομένως κέντρον τῆς βαρύτητος τοῦ πρίσματος, ἢ τοῦ κυλίνδρου. Ο.Ε.Δ.

455. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τὸ κέντρον τῆς βαρύτητος ἁπάσης πυραμίδος τριγωνικῆς τῆς ΑΒΓΔ (σχ. 37) κεῖται ἐν τῷ ι πέρατι τοῦ δι τεταρτημορίου τοῦ δΑ ἀποστήματος τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος δ τῆς ΒΓΔ βάσεως ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α.