

320. **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄.** Σῶμα ἀπολύτως ἀήλιπτον, ὅσα ἐν ἡμᾶς εἰδέναι, ἕκ ἑσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Πάντα γὰρ, ἃ ἴσμεν σώματα, πλείστοις ὅσοις τέτρηνται κόροις (62)· ἕκῃν τὰ πλείστα τῶν μεριδίων αὐτῶν ἀμέσως εἰσὶν ἀνέπαφα· ἕδ' ἴσμεν σώματα, ὧν τὰ μερίδια κατὰ τὸ μᾶλλον ἐν ἥττον εἰσὶν ἀλίγυσα· πεῖρα δὲ δείκνυσιν ἡμῖν ἐν τὰ σκληρότατα σώματα, οἷα τὰ μέταλλα, καταθλιβόμενα· ὁ χαλκὸς φέρει, ἐξ ἕκῶδων σύγκειται, ἕκ ὅπως ἕκ ἀντίκειται τῷ πλήττοντι, ἀλλὰ ἐν τινασσόμενος δονεῖται κατὰ πάντα αὐτῆ τὰ μέρη, ὅθεν ἀποτελεῖται ὁ ἤχος, ὁ ἕκ ἂν γένοιτο, εἰμὴ καὶν βραχὺ λιγυθεῖη τὰ τῆ χαλκῆ μερίδια· πάντα ἄρα τὰ σώματα κατὰ τὸ μᾶλλον ἐν ἥττον εἰσὶ θλιπτά.
Ο. Ε. Δ.

321. **ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ΄.** Πᾶν σῶμα πκληρόν, προίεμενον κατ' ἄλλω σώματος μὴ ἐλασικῆ, ἀκινήτε μὲν, ἀλλ' εὐθλίπτει, ἡρεμήσει μετὰ τὴν σύγκρουσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Τοῦτο γὰρ σῶμα, ὡς ὀφόμεθα ἐν τῇ συγκρούσει τῶν εὐθλίπτων, σερηθήσεται ἐκ διαδοχῆς ἀπάσης τῆς ἐαυτῆ κινήσεως ἐν τῷ θλίβειν τὸ θλιβόμενον σῶμα· ἐπεὶ δ' ἀμφοτέρω ἐλασικῆς ἁμοῖρα ὑποτίθεται, καθηρεμήσει πάντως μετὰ τὴν σύγκρουσιν. Ο. Ε. Δ.

322. **ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄.** Σῶμα ἀπολύτως ἀκίνητον οὐχ ὑπάρχει.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ γὰρ κινήτῃ εἶναι ἕσιωδῆς ἐστὶ πᾶσι τοῖς σώμασιν· ἀδύνατον ἄρα ὑπάρχειν ἀπολύτως ἀκίνητα σώματα. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἀκίνητον ἄρα λέγεται σῶμα σχετικῶς, ἕμενεν ἀπολύτως, ὁ παθεῖν ὑπ' ἄλλω κινήσιν οἷα ἐν ἕκ ἔχει.

323. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Πᾶν σῶμα προίεμενον κατ' ἄλλε ἐμποιήσει αὐτῷ κίνησιν ἠντιναῦν.

Καὶ γὰρ α'. τὸ συγκρουθὲν σῶμα συνθλιβήσεται κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον (320). τὸ ἄρα συγκρούον συνθλίψει αἰεὶ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον τὸ συγκρουθὲν, εἴτ' ἔν κίνησιν τινα τοῖς αὐτῷ μέρεσιν ἐμποιήσει.

β'. Θῶμεν τὸ συγκρουθὲν σῶμα ἄθλιπτον· ἐπεὶ δ' ἐστὶ κινητὸν (322)· τὸ συγκρούον ἄρα σῶμα μεταδίδωσιν αὐτῷ κινήσεως ἀναλόγῃ ταῖς μάζαις (305)· ἀναγκαίως ἄρα ἐναπογεννηθήσεται τῷ συγκρουθέντι σώματι κίνησις ἠτισδήποτε.

Καὶ ἐστὶ μὲν ἀληθές, ὡς εἰ τὸ συγκρουθὲν σῶμα ἰσχυρῶς συνέχαιτο ἑτέροις σώμασι, τὰ δὲ τῇ γῆνῃ σφαῖρα εἰς συγκεκολλημένα, οἷον τείχος σερρόν, ἢ προσβάλλει λίθος, ἢ ποσότης τῆς κινήσεως τῷ λίθῳ διανεμηθήσεται ταῖς μάζαις ἑαυτῷτε ἢ τῷ τείχει, ἀπαίροις οἶσιν ἔσαις, ἢ ἡ ταχύτης ἢ ἐκ ταύτης τῆς διαιρέσεως τελευμένη ἐπὶ τε τῷ συγκρούοντος ἢ τῷ συγκρουομένῳ ἐκληφθῆναι δυνήσεται ὡς ἀπειροσῆ, ἢ γῆν ὡς ἀπολύτως ἀνεπαίθητος· ἀλλ' ἔ μένταιγε χρὴ ταῖς αἰσθήσεσι παραφέρεισθαι ἢ ἐξαπατᾶσθαι· πᾶν γὰρ κινούμενον σώματι πραγματικῶς μὴ κινουμένῳ τὴν ἐναντίαν φορὰν, ἐμποιήσει κίνησιν οἰανδήποτε.

Σύγκρουσις τῶν ἀπαλῶν.

324. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἀπαλὰ σώματα ἀλλήλοις συγκρούμενα, ἀμφοτέρα συνθλίβονται μεταβάλλοντα τὸ σχῆμα.

ΔΕΙΞΙΣ. Προείπω ἡ σφαῖρα Α κατὰ τῆς Β (σχ. 8), ἢ ἔσωσαν ἀμφοτέρα ἀπαλαί, εἴτ' ἔν, ὡς ἐνταῖθα λέγειν

εἰώθαμεν, εὐθλιπται· τὸ ἔν πρῶτον σημεῖον O τῆς σφαι-
 ρας A , ἀπαντῶν τῷ πρώτῳ σημείῳ ξ τῆς σφαιρας B καθ-
 ηρεμύσης, πλήττει πρῶτον αὐτὸ τὸ σημεῖον ξ , ἐ ἀπο-
 βάλλον μέρος τῆς ἑαυτῆ κινήσεως, βραδύνει τὴν πρὸς τὴν
 KT εὐθείαν κίνησιν ἑαυτῆ, ὅτε τὸ κέντρον K φέρε, τὴν
 ἑαυτῆ ἔχον ἀπασαν κίνησιν, προσπελάζει τῷ σημείῳ O ·
 πάντα δὲ τὰ μεταξύ O ἐ K κείμενα σημεῖα ἐκ διαδο-
 χῆς βραδύνονται, ἐ τελευταῖον ἐ αὐτὸ τὸ K , τῆ ϕ ση-
 μείῳ χωρῆντος ἔτι ἀπάση τῆ ἑαυτῆ κινήσει πρὸς τὸ κέν-
 τρον K · τῆτέσι πάντα τὰ σημεῖα τὰ ἐκ τῆ ϕ μέχρι τῆ
 O ἐκκείμενα ἐγγυὺς γίνονται τῆ O · ἡ δὲ ϕO διάμετρος
 βραχεῖα γίνεται τῆς AD μενύσης αἰετῆς αὐτῆς· δῆλον
 δὲ, ὅτι ἐ ἡ χορδὴ ΣB συσαλήσεται, ἐκάστῃ τῶν αὐτῆς
 σημείων βραδυνομένη, συναντῶντων τῷ τῆς B σφαιρας ση-
 μείῳ ρ · ἐ πᾶσαι δὲ αἱ χορδαὶ $\beta\alpha$, κτ. αἱ τῆ ϕO παρ-
 ἀλληλοι ἐ αὐταὶ βραχυνοθήσονται, τῶν αὐταῖς ἀντισοίχων
 χορδῶν (*) ἐχ μενυσῶν αἰετῆς τῶν αὐτῶν· ἐκῆν ὁ μὲν κύ-
 κλος ϕKAD τραπήσεται εἰς ἔλλειψιν, ἥς ἐλάττων μὲν
 διάμετρος ἡ ϕO , μείζων δὲ ἡ AD · αὐτὴ δὲ ἡ σφαῖρα
 εἰς κωνοῖδα ἐλλειπτικὴν, ἢ, ὡς λέγειν εἰώθασι, εἰς σῶμα
 σφαιροειδές.

Ὡσαύτως ἐπεὶ τῆς B σφαιρας ἕκαστον σημεῖον τῶν
 ἐξ ἀριστερῶν τῆ Π κατὰ τὰς εὐθείας $\xi\Pi$, $\rho\psi$, $\upsilon\nu$, κτ.
 ἐκκείμενων, ἔτι κινεῖται, τῆ ἐφεξῆς πρὸς δεξιὰν ἔτι ἡρε-
 μῆντος, ἡ μὲν διάμετρος $\xi\Pi$ βραχυτέρα ἔσαι τῆς ἑαυτῆ
 ἀντισοίχου $B\mu$, ἐκάσῃ δὲ χορδῇ $\nu\upsilon$ βραχυτέρα τῆς ἑαυ-

(*) Ἀντισοίχου ἰκαλεσάμενην ἐνταῦθα τὴν $\epsilon\chi$ τῆ $\beta\alpha$,
 καθ' ὅσον ἐκείνη ταύτη κάθετος ἐπίσκηκεν, ἀπέχουσα τῆ κέν-
 τρου, ὅσον ἐ ἡ $\beta\alpha$.

τῆ ἀντισοίχῃ δθ· ἐ ἔτιωσ ὁ μὲν κύκλος ΒΞμΠ γενήσεται ἔλλειψις, ἢ δὲ σφαῖρα, σφαιροειδές.

Ἐὰν δὲ ἡ σφαῖρα Α (χ. θ) συγκρούη, σφαῖρα μὲν ε, σώματι δὲ τῷ ΓΔΕΖ ἐ αὐτῷ εὐθλίπτῳ, ἐ ἐπιπέδῳ τὴν ἐπιφάνειαν ΓΕ, ἢ συγκρούουσα σφαῖρα Α ἐ τότε εἰς σφαιροειδές μεταχηματιοθήσεται, ἐ τὸ αὐτῆς μέρος Οτχ, ἐμβυθιζομένης τῷ σώματι, χηματίσει καιλότητα, εαυτῆ ὁμοιοχήματα, τὴν Οτχ, ὁ ἐκ τῶν εἰρημείων καταφανές· ἄρα Ο. Ε. Δ.

325. Ἡ σύνθλιψις αὕτη, τῆ χήματος ἀλλοιουμένῃ κατὰ τὸ μᾶλλον ἐ ἥττον, ἅπασι τοῖς ἐλαστικοῖς συμβαίνει· ἀλλ' ἐκ ἐσιν ἀνάλογος τῷ βαθμῷ τῆς ἐλασικότητος· εἰσὶ γὰρ σώματα, εὐθλιπτότατα μὲν, οἷον ἡχιῶν, βραχὺ δέτι ἐλασικά· τὴναντίον δὲ ἄλλα ἐλασικῆς μεγίστης εὐμοιρῶντα, οἷον τὸ ἤλεκτρον, βραχὺ δὲ θλιβόμενα· ὁ δὲ αἴρ ἐ τὸ ἐλασικιώτατον ἐ τὸ εὐθλιπτότατόν ἐσιν ἀπάντων, ἀφαλλόμενος αὐθις, τῆς συνθλιπτικῆς λιγύσης δυνάμεως, δι ἧς σινεθλιβετο ταχυτήτος· τὸ δ' ἤλεκτρον καίτω ἐλάχισα συνθλιβόμενον, ἐπάνεισι μέντοι, ὡσπερ ἐ ὁ αἴρ, διὰ τῆς αὐτῆς, δι ἧς ἐθλιβετο δυνάμεως.

326. Τῷ χρόνῃ, καθ' ὃν ἡ σύγκρουσις ἐ ἡ ἐλασικότης τελεῖται, ἀνεπαιωθήτω ὄντος, ἢ σώμασί τισιν, ἐλασικοῖς μὲν, ὡν δὲ τὰ μέρη βραχύεσσι λιγυσα, ἐπισυμβαίνουσα τῷ χήματος ἀλλοίωσις, ἐ αὕτη ὅσον ἐκ εἰς αἰθρῆσιν ἡκυσα, διαφεύγει ἡμῶν τὴν ὄρασιν· ἐσω γὰρ ΓΖ ἐπίπεδον ὀριζόντιον ἐκ μαρμάρου, ἢ αἰ ἐπιφάνεια ΤΕ ἡ λείφθῳ ἐλαίῳ ἀμυγδάλων· ἐὰν ἔν ἀφ' ὕψους τινὸς προσεθῆ κατὰ τῆ ἐπιπέδῳ τύτῃ ἡ σφαῖρα Α, ἐ ἐπανακάμψασα καταχεθῆ, ὀψόμεθα μέρος ταύτης τῆς σφαίρας ἄλις

μέγα τὸ ΟΥΧ ἐμβεβρεγμένον ἐλαίῳ, εἰ τοίνυν ἡ Α μὴ συνθλίβηται, μόνον ἂν τὸ χ σημεῖον τῷ ἐλαίῳ ἐβράχη.

327. Ἡ μὲν σύγκρισις τῶν κληρῶν σωμάτων ἐν ἀκαρεῖ χρόνῳ τελείται· εἶγε πάντα τὰ μέρη τῆ Β σώματος ἅμα ἐπιδέχονται πᾶσαν τὴν ταχύτητα, ἧς αὐτοῖς δεῖ, ἵν' ὑποχωρήσωσι τῷ Α (9. 117)· ἡ δὲ τῶν ἀπαλῶν, χρόνῳ ἐπαισθητῆ προσδέεται· καὶ γὰρ τὸ μέρος Ο τῆ συγκρούοντος σώματος Α μεταδίδωσι τῆς ἑαυτῆ κινήσεως πρὸς τῆ δευτέρου μέρους τῆ κατὰ τὰ Κ· τὸ δὲ δεύτερον πρὸς τῆ τρίτου εἰ ἔτις ἐξῆς· ὅτε γὰρ ἡ κίνησις τῆ συγκρούοντος σώματος ἐστὶ ταχεῖα, ὁ χρόνος τῆς συγκρούσεως ἐστὶν ἀναπαύσιμος· ἀλλ' ὅτε ἡ σύθλιψις πράγματι τελείται κατὰ διαδοχὴν, ἐν διαρκείᾳ χρόνῳ τινὸς πεπερασμένῳ γενήσεται, τῆς τε ταχύτητος τῆ συγκρούοντος σώματος Α εἰ τῶν διαμέτρων ΖΟ, ΞΠ ἐσομένων ποσῶν πεπερασμένων.

328. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Τῷ τὴν σύθλιψιν ἐγγύθεν παρατηρῶντι, ὁ νόμος τῆς τῶν ἀπαλῶν, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τῆς τῶν σκληρῶν συγκρούσεως.

ΔΕΙΞΙΣ. Ὁ νόμος τῆς συγκρούσεως τῶν σκληρῶν σωμάτων ἐστὶν, ἵνα τὸ συγκρουόμενον ὑποχωρήσῃ τῷ συγκρούσαντι, τὸ δὲ τῷ συγκρουόμενῳ μεταδῶ τῆς ἑαυτῆ κινήσεως, μέχρις ἂν γένωνται ἀμφοτέρω ἰσοταχῆ, καὶ ἐπομένως διαμερίσῃ τὴν ποσότητα τῆς ἑαυτῆ κινήσεως πρὸς τὰς μάζας (305)· ἀλλ' ἐν τοῖς ἀπαλοῖς τῶν σωμάτων, τῆς κατὰ τὴν κίνησιν διανομῆς ἐκ διαδοχῆς γινόμενης πρὸς τὰ μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν τῆ συγκρούοντος σώματος ἐμποιεῖ τῷ ἄθροισματι τῶν μερῶν τῆ συγκρουόμενου σώματος κίνησιν τοσαύτην, ὥστε ἰσοταχῆ γίνεσθαι τὸ συγκρούσαν τῷ συγκρουόμενῳ· ἄρα ἡ ποσό-

της τῆς κινήσεως τῆ συγκρούοντος ὡσαύτως διανεμηθήσε-
ται πρὸς τὰς μάζας Ο. Ε. Δ.

329. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α' δέδεικται ἐπὶ τῶν σκληρῶν
σωμάτων, τῆ συγκρουθέντος ἡρεμῆντος (305), ἢ τῆτε
συγκρούσαντος, ἢ τῆ συγκρουθέντος κινημένων τὴν αὐτὴν
φορὰν (312), ἢ γὰρ τὴν ἐναντίαν (316), ἐφαρμοσέσθαι
εἰς τὴν νόμῳ τῆς τῶν ἀπαλῶν σωμάτων συγκρούσεως.

Σύγκρουσις τῶν ἐλασικῶν.

330. Τὰ ἐλασικὰ τέτω μόνῳ διενήνοχε τῶν ἀπα-
λῶν, ὅτι ἐκεῖνα μὲν θλιβόμενα αὐθις ἐπαναλαμβάνει
τὸ σχῆμα τὸ πρότερον· ταῦτα δὲ μένει, ὡς συνεθλίβη-
σαν· ἀνθ' ὅτε δὲ ἐν τοῖς ἐλασικοῖς διακρίνεται ὁ χρόνος
τῆς συγκρούσεως, ἢ ὁ χρόνος τῆς ἐλάσεως· ἢ ἐπεὶ ἡ ἐ-
λασικότης ἀρχεται, παυομένης τῆς συγκρούσεως, ἐν τῇ
συγκρούσει γίνεται ἐπὶ τῶν ἐλασικῶν πάνθ', ὅσα γίνε-
ται ἐπὶ τῶν ἀπαλῶν, ἐν δὲ τῇ συνθλίψει, ὅσα ἐπὶ τῶν
σκληρῶν.

331. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ο' χρόνος τῆς συγκρούσεως
ἐν τοῖς ἐλασικοῖς ἔστι πεπερασμένος (327), ἢ ἐπεὶ περ ἡ
κίνησις, καθ' ἣν ἐπανίασι, γίνεται ἐκ διαδοχῆς, ἢ ταχυ-
τῆτι πεπερασμένη, ἢ αὐτὴ δὲ ἡ διάμετρος τῆ ἐπανιόντος
σώματος ἔστι ἢ αὐτὴ ποσὸν πεπερασμένον, ἢ ἡ ἐλασικό-
της ἔσεται ἐν χρόνῳ πεπερασμένῳ.

332. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Α' εἴρηται περὶ τῆς συγ-
κρούσεως τῶν σκληρῶν, ἢ περὶ τῆς συνθλίψεως τῶν ἀ-
παλῶν, ἐκληπτέον τὰ αὐτὰ καὶ τῇ τῶν ἐλασικῶν συγ-
κρούσει.

333. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὅταν σῶμα ἐλασικὸν τὸ Α
(ο. 8) πρὸςβάλλῃ σῶματι ἄλλῳ τῷ Β, καθ' ὃν χρόνον

ἢ ἐλασικότης τελείται, διπλασιάζεται μὲν ἡ φθορὰ τῆς κινήσεως, ἣν ἐποίησε τὸ συγκρούον σῶμα A, διπλασιάζεται δὲ ἡ κίνησις, ἣν ἐκτίσασα τὸ συγκρουθὲν B ἐν τῇ συγκρούσει.

ΔΕΙΞΙΣ. α. Τὸ συγκρουθὲν σῶμα B ἀφάλλεται κατὰ τῆ συγκρούσαντος σώματος A, καθ' ἣν συντέλλεται φορὰν (303, 304), ἢ κατὰ πᾶσαν τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως, ἣν προσεκτίσασατο, ἀλλὰ κατὰ φορὰν τὴν ἕξ ἐναντίαν τῇ φορᾷ ξΠ, καθ' ἣν τὸ A κινεῖται· φθαρήσεται ἄρα τῆ σώματος A τοσαύτη κίνησις, γινομένη κατὰ φορὰν τὴν ξΠ, ὅση ἐφθάρη ἐν τῇ συγκρούσει· β. τὸ σῶμα A τὴναντίον ἐπάνεισι πρὸς τὸ B κατὰ πᾶσαν τὴν δύναμιν, καθ' ἣν συντέλλεται, ἢ δὴ κατὰ πᾶσαν τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως, ἣς μετέδωκε τῷ B· διπλασιωθήσεται ἄρα ἡ κίνησις, ἣν ἐδέξατο τὸ B ἐν τῇ συγκρούσει. **Ο. Ε. Δ.**

334. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐκ τούτου τῆ γενικῆ νόμου τῆς ἐλασικότητος τῶν ἐλασικῶν σωμάτων ὑποσυνάφθωμεν τὴς ἐφεξῆς ειδικιωτέρας· α. ἢνίκα σῶμα ἐλασικὸν προίεται κατὰ σῶματος ἐλασικῆ ἡρεμῆντος· β. ἢνίκα σῶμα ἐλασικὸν προσβάλλῃ σῶματι ἐλασικῷ, τὴν αὐτὴν κινουμένην φορὰν· γ. ἢνίκα τὴν ἐναντίαν.

335. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐςω αἰ ἡ ποσότης τῆς κινήσεως τῆ συγκρούοντος σώματος $MT = 1$, ἢ ἡ ἐλάττωμα μάζα 1, ἢ ὁ λόγος τῶν μαζῶν = ν , ἢ δὴ ἡ μείζων μάζα = $\nu \times 1 = \nu$ (307)· εἰάν ἔν τὸ συγκρούον σῶμα A ἰσῶται κατὰ τὴν μάζαν τῷ συγκρουθῆντι σῶματι B, τὰ δύο σῶματα μεταβαλῶσιν ἀλλήλων τὴν κατάστασιν· ἢ γὰρ τὸ μὲν B προσκτίσεται ἐν τῇ συγκρούσει

$\frac{v}{v+1}$, ἢ $\frac{1}{v+1}$, ἢ $\frac{1}{2}$ (307) ὅ δια τὴν ἔλασικότητα
γενήσεται $\frac{1}{2} = 1 =$ ὅλη τῆ ποσότητι τῆς κινήσεως, ἢν

εἶχε τὸ Α πρὸ τῆς συγκρούσεως· τὸ δὲ ἀπόλλυσι $\frac{v}{v+1}$,

ἢ $\frac{1}{2}$ (308) ἐν τῆ συγκρούσει· αὕτη δὲ ἡ φθορὰ διὰ τὴν
ἐλασικότητα, εἴτ' ἔν ἀντίδρασιν τῆ Β, γινομένην κατὰ
φορὰν ἐναντίαν τῆ τῆ Α, γενήσεται $\frac{1}{2} =$ ὅλη τῆ πρὸ
τῆς συγκρούσεως κινήσει τῆ Α· ἔκυν τὸ Α καθηρεμήσει,
τὸ δὲ Β κινήσεται, εἴτ' ἔν μεταβαλῶσι τὴν ἀλλήλων
κατάστασιν.

336. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐὰν τὸ συγκρούον σῶμα Α
μείζον ἢ τῆ συγκρουόμεντος ἡρέμου Β· α'. ἀμφὶ κινήσονται
κατὰ τὴν ζξΠ φορὰν τῆ συγκρούσαντος σώματος· β'.

τὸ Β ἔξει ποσότητα κινήσεως διπλὴν τῆς $\frac{1}{v+1}$, ἢν διὰ

τῆς συγκρούσεως ἐδέξατο, εἴτ' ἔν $\frac{2}{v+1}$ · ἢ ἔν ποσό-

της τῆς ἑαυτῆ κινήσεως ἔσαι $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ κτ., τῆς ποσότη-
τος τῆς κινήσεως, ἢν εἶχε τὸ Α πρὸ τῆς συγκρούσεως,
εἰάν ἢ $A = 2B$, $3B$, $4B$ κτ.· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ Β κί-
νησεται ταχυτῆτι διπλασίᾳ τῆς, καθ' ἢν ἂν ἐκινήθη
δίχα ἐλασικότητος· εἰ ἐπίπερ ἡ μετὰ τὴν σύγκρουσιν
κοινὴ ταχυτῆς χ , μείζων ἐστὶ τῆς ἡμίσεως τῆς πρὸ τῆς
συγκρούσεως ταχυτῆτος διὰ τὴν μάζαν τῆ Α, μείζονα ἔ-
σαν τῆς τῆ Β, εἰκὸς τὸ Β κινεῖσθαι ταχύτερον ἢ τὸ Α
πρὸ τῆς συγκρούσεως· εἰ μὲν $A = 2B$, ἢ τῆ Β ταχύ-
της διὰ τὴν ἐλασικότητα ἔσαι $\frac{1}{2}$, εἴτ' ἔν ὑπερέξει τῆς

πρὸ τῆς συγκρίσεως ταχυτήτος τῆς Α, τῷ $\frac{1}{2}$ τῆς ταχυ-
τήτος τῆς Α, ἢ ἕτως ἐφεξῆς.

337. Τὸ δὲ συγκρῦον Α ἀποβαλεῖ ἐκ τῆς κατὰ
φορὰν ΟΤΠ ταχυτήτος $\frac{1}{\nu + 1}$ ἐν τῇ συγκρίσει, ἢ το-

σῦτον ἔτι ἐν τῇ ἐλάσει· λοιπὸν ἄρα εἶσαι αὐτῷ $\frac{\nu + 1}{\nu + 1}$

$\frac{2}{\nu + 1}$, εἰάν ἔν ἢ Α = 2B, 3B, κτ., λοιπὸν εἶσαι

$\frac{1}{\nu + 1} = \frac{1}{3}$, ἢ $\frac{2}{\nu + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, κτλ. τῆς ποσότητος

τῆς κινήσεως, ἣν εἶχε πρότερον· ἀλλ' ἡ ταχύτης αὐτῆ ἐ-
δέποτε ἰσωθήσεται τῷ ἡμίσει τῆς ταχυτήτος τῆς σώματος
B, εἴγε ἡ ταχύτης αὐτῶν, ἐν ἀρχῇ ἢ αὐτὴ ἴσα, μετὰ
τὴν σύγκρισιν δεδιπλασάσαι ἐν τῷ B διὰ τὴν ἐλασιν,
τῆς τῆς Α ἔτι ἐλαττωθείσης.

338. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἰάν τὸ συγκρῦον σῶμα ἐ-
λαττον ἢ τῆ συγκρομένῃ, τὸ συγκρομένον αἰσθήσεται
τὴν φορὰν ΞΠ τῆ συγκρομένου, ἐν ποσότητι κινήσεως
μείζονι, ἣς εἶχε τὸ συγκρῦον· αὐτὸ δὲ τὸ συγκρῦον ἀνα-
ποδιωθήσεται κατὰ τὴν φορὰν ΞΖ.

α'. Τὸ σῶμα B προσδέξεται πρῶτον $\frac{\nu}{\nu + 1}$, ὃ διὰ

τὴν ἐλασικότητα εἶσεται $\frac{2\nu}{\nu + 1}$ · ἀλλὰ $\frac{2\nu}{\nu + 1}$ εἶσεται αἶψά

μείζον ἢ $\frac{\nu + 1}{\nu + 1} = 1$, εἴτ' ἔν ἢ ἡ ποσότης τῆς κινήσεως,

ἣν εἶχε τὸ Α, ὑποτιθεμένῃ B > A, ἢ $\nu > 1$ · ἡ δὲ
ὑπεροχὴ τούτῳ εἶσαι μείζων, ὅσῳ μείζον ἂν εἴη τὸ B

τῷ Α· εἰν γὰρ $B = 5A$, $\frac{2v}{v+1}$ γενήσεται $= \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ·

ἢ ἡ καινὴ ποσότητι τῆς κινήσεως ὑπερέξει τῆς προτέρας τῷ $\frac{2}{3}$.

β'. Τὸ σῶμα Α ἀποκρουθήσεται πρὸς τὸ ζ τῆ ποσότητι $\frac{v}{v+1}$ · ἀλλ' ἔ καταλείπεται πρὸς τὸ Π ἐν τῆ συγκρούσει, εἰμὴ $\frac{1}{v+1}$ · ἐπανακάμψει ἄρα πρὸς τὸ ζ

ποσότητι $\frac{v}{v+1} - \frac{1}{v+1}$ · ἔσω ἔτι $B = 5A$, ἢ $v = 5$ ·

ἐκέν ἀποληφθήσεται $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, ποσότητος τῆς προτέρας κινήσεως, καθ' ἃ ἀνατρέψει πρὸς τὸ Α.

339. ΣΧΟΛΙΟΝ. Παρατηρητέον, ὡς, τῷ συγκρούοντος σώματος ἐλάττωνος ὄντος ἢ τῷ συγκρουόμενῃ, ἢ σύγκρουσις τῶν ἐλασικῶν σωμάτων ἀεὶ αὖξει τὴν ὀλικὴν ποσότητα τῆς κινήσεως· ἐν γὰρ τῆ προτέρῃ ὑποθέσει, ὅτι $B = 5A$, εὔρηται $\frac{2}{3}$ ποσότητος τῆς κινήσεως τῷ Β, ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς τῷ Α, ὡν τὸ ἄθροισμα $\frac{2}{3}$ ὑπερέχει τῷ διπλῷ τῆς ποσότητος τῆς κινήσεως $MT = 1$, ἢν τὸ Α εἶχε πρὸ τῆς συγκρούσεως.

340. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ὅσω μείζων ἐσὶν ἡ δύναμις τῷ ν, ὑποτιθεμένῃ τῷ συγκρούοντος σώματος $A = 1$, τοσέτω ἡ ποσότης τῆς κινήσεως, καθ' ἣν ἐπανακάμψει, συγκλίνει εἰς τὸ ἰσωθῆναι τῆ πρὸ τῆς συγκρούσεως ποσότητι τῆς κινήσεως· ἔσω γὰρ $B = 100A$, ἢ δὴ ἔσαι

$$\frac{v}{v+1} - \frac{1}{v+1} = \frac{100}{101} - \frac{1}{101} = \frac{99}{101} = 1 - \frac{2}{101}$$

ἢ δέ ποτε μέντοι ἔσαι $= 1 =$ ὅλη τῆ προτέρῃ κινήσει·

εἶγε ἔδέποτε ἔσαι $\frac{v}{v+1} - \frac{1}{v+1} = \frac{v+1}{v+1} = MT$.

341. Ὅσαύτως ὅσῳ μείζων ἔσαι ὁ v , τοσούτῳ μᾶλλον ἢ ποσότης τῆς κινήσεως τῆ σώματος B συγκλίνει εἰς τὸ γενέσθαι $= 2MT = τῷ$ διπλῷ τῆς ποσότητος τῆς κινήσεως, ἣν εἶχε τὸ συγκρῦσαν σῶμα· ἔσω γὰρ $v =$

100· ἢ κῆν ἔσαι $\frac{2v}{v+1} = \frac{200}{101}$ · ἵνα τοίνυν ἢ ποσότης τῆς

κινήσεως τῆ B σώματος διπλασία γένηται τῆς πρὶν ποσότητος τῆς κινήσεως τῆ A, δεῖ ἔτι αὐτῷ $\frac{200}{101}$ · ἢ δὴ

α'. ἢ κίνησις τῆ B ἔσαι $= 2MT - \frac{1}{101}$ · β'. ἔδέποτε

ἢ τῆ B κίνησις ἔσαι $= 2MT$ · ἔδέποτε γὰρ ἔσαι $\frac{2v}{v+1}$

$$= \frac{2v+2}{v+1}$$

342. Ἐντεῦθεν ἀρχὴ σύγκριστις τῶν ἐλασικῶν σωμάτων σπεύδει ἐπὶ τὸ τριπλασιάσαι τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως, ἣν ἔχει πρὸ τῆς συγκρέσεως σῶμα συγκρῦον, ἔλαττον τῆ ἐν ἡρεμίᾳ συγκρῦμένῳ· ἀλλ' ἰδὲ τὸ ὄριον, εἰς ὃ ἀφικέσθαι ἢ δύναται, ἔως ἢ v ποσότης εἶη πεπερα-

σμένη· εἶγε δεῖ τῆς ποσότητος $\frac{2}{v+1}$, ἵν' ἢ ποσότης τῆς

κινήσεως τῆ συγκρῦοντος σώματος A ἢ $= 1$, ἢ τῆς αὐ-

τῆς $\frac{2}{v+1}$, ἵνα τὸ συγκρῦδέν B γένηται $= 2$ · ἀλλὰ

γὰρ εἰ γένοιτο $v = \infty$, τετέστιν, εἰ A ἀπειροκλάσιον

εἶη τῆ B, ἢ κίνησις τῆ A ἔσαι $= 1 - \frac{2}{\infty+1} = 1$

(Συμβ. Λογ. 530)· ἢ δὲ κίνησις τῆ B ἔσαι $= 2 -$

$\frac{2}{\omega + 1} = 2$ · τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων τῆς κινήσεως τῆ A ἢ τῆ B ἔσαι = 3, λαμβανομένης ὡς μονάδος τῆς MT κινήσεως, ἣν εἶχε τὸ A πρὸ τῆς συγκρούσεως· τυτέσιν ἡ ἐλασικότης τριπλασιάζει τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως.

343. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἐὰν σῶμα ἐλασικὸν τὸ A προσβάλλῃ κατ' εὐθείαν σώματι ἑτέρῳ ἐλασικῷ τῷ B, ἴσῳ τὴν μάζαν, καὶ φερομένῳ τὴν αὐτὴν φορὰν ξΠ, μεταβαλῶσιν ἀλλήλων τὴν ταχύτητα· καὶ γὰρ τὸ A πλῆττει τὸ B τῇ ὑπεροχῇ τῆς ἐαυτῆ ταχυτήτος· τὸ δὲ B, τὸ μὲν ἡμισυ ταύτης τῆς ὑπεροχῆς προσλήψεται ἐν τῇ συγκρούσει, τὸ δ' ἄλλο ἡμισυ ἐν τῇ ἐλάσει· ἀλλὰ τὸ A ἀποβαλεῖ, τὸ μὲν ἡμισυ διὰ τῆς συγκρούσεως, τὸ δ' ἄλλο ἡμισυ διὰ τῆς ἐλάσεως· ἄρα τὸ B τοσῦτον ὑπερέξει τῆς ταχύτητος τῆ A, ὅσον τῆς τῆ B ὑπερεῖχε τὸ A πρὸ τῆς συγκρούσεως· ἐντεῦθεν ἄρα δῆλον, ὡς ὅσῳ πλησιάζουσιν ἀλλήλοις τὸ A ἢ B πρὸ τῆς συγκρούσεως ἐν δεδομένῳ τινὶ χρόνῳ, τοσῦτον ἀποσῆσονται ἀλλήλων μετὰ τὴν συγκρούσιν.

344. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἐὰν σῶμα ἐλασικὸν τὸ A μείζον ἢ τὸ B, κινύμενον τὴν αὐτὴν φορὰν τῷ B, εἴτ' ἔν τὴν ξΠ, προσβάλλῃ αὐτῷ, τὴν αὐτὴν δραμῦνται ὁδὸν, τὸ μὲν A ταχύτητι ἐλάσσονι, τὸ δὲ B μείζονι τῆς πρὸ τῆς συγκρούσεως· τὸ μὲν γὰρ B πρῶτον διὰ τῆς συγκρούσεως, εἶτα διὰ τῆς ἐλάσεως, ἐπιδέχεται αὐξησιν τῆς ἐαυτῆ ταχύτητος κατὰ τὴν φορὰν ξΠ· τὸ δὲ A, ἔχον μάζαν μείζονα ἢ τὸ B, καθέξει πλεῖον τῆ ἡμίσεως τῆς κινήσεως, ἢ διέφερον ἀλλήλων αἱ ταχύτητες· ἢ ἄρα ἐλασικότης ἐδυνῆσεται διαφθεῖραι αὐτῆ πᾶν, ὃ κατεῖχεν·

κῆν παρὰ τὴν κοινὴν τῷ Β ταχύτητα, τὴν πρὸ τῆς συγκρούσεως, τὴν κατὰ τὴν φοράν $\xi\Pi$, λειφθήσεται ἔτι μέρος ταύτης τῆς διαφορᾶς τῆς ταχυτήτος κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν· σαφὲς μὲντοι, ὡς ἡ ὅλη αὐτῆ ταχύτης ἔσαι ἐλάττων τῆς πρὸ τῆς συγκρούσεως.

345. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἐὰν ἐν τῇ προτέρᾳ περιπτώσει τὸ συγκρούον σῶμα A ἢ $< B$, ἦτοι χωρήσει κατὰ τὴν προτέραν αὐτῆ φοράν $\xi\Pi$, ἢ καθηρεμήσει, ἢ πάλιν ἀνακάμψει. Τὸ γὰρ A ἐπεὶ ἐλάττων τῷ B , ἐμποιήσεται τῷ B ἐν τῇ συγκρούσει μείζον τῆς κινήσεως μέρος, ὃ διέφερον αἱ ταχυτήτες, ἢ καθέξει αὐτό· ἔκαστος τῶν διαφορῶν βαθμῶν τῆς μάζης ἔκαστος τῆς ταχυτήτος ὡς πρὸς τὸ B , ἐν τῶν τριῶν συμβῆναι δύναται· ἦτοι γὰρ τὸ A ἐν τῇ συγκρούσει ἐμποιήσεται τῷ B μέρος τῆς κινήσεως, ἴσον τῷ ἡμίσει τῆς ὅλης ἑαυτῆ κινήσεως· ἔκαστος παρὰ τῷ B ἀποκρυφθὲν κατὰ τὸ αὐτὸ ἡμισυ τῆς κινήσεως, ἢ ἠρεμήσει· ἢ ἐλάττων τῷ ἡμίσει τῆς ἑαυτῆ ὅλικῆς κινήσεως, ἔκαστος ἀποκρυφθὲν κατὰ ποσότητα κινήσεως ἐλάσσονα τῆς αὐτῷ ἐναπολειφθείσης, κινήσεται κατὰ τὴν διαφορὰν τῶν δύο τέτων ποσοτήτων· ἢ τέλος μείζον, ἔκαστος δὲ ἀποκρυφθὲν κατὰ ποσότητα κινήσεως μείζονα τῆς αὐτῷ ἐναπολειφθείσης, παλινδρομήσει εἰς τὰ ὀπίσω, κατὰ τὴν διαφορὰν τῶν δύο τέτων ποσοτήτων.

346. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἐὰν δύο σώματα ἐλασικὰ A , B , ἴσα κατὰ τὴν μάζαν, κινούμενα κατὰ φοράς ἐναντίας ταχυτήτι ἴση, ἀλλήλοις ἀντισυγκρούσων, ἀνακάμψωσιν ἑκάτερον τῇ αὐτῇ ταχυτήτι· πρῶτον μὲν γὰρ ἀλλήλους ἀντικρούσθοντα, ἀποβαλέωσιν πᾶσαν ἑαυτῶν τὴν κίνησιν· εἶτα τὸ A μὴ δυνάμενον ἀφάλαθαι κατὰ τῷ B , ὃ ἀντίκειται αὐτῷ δυνάμει ἴση ἐλασικότητος, ἀφαιλεῖται

τὴν ἐναντίαν φοράν· ἐ δὴ τῇ αὐτῇ δυνάμει ἀνακάμψει, καθ' ἣν συντέθλιπται· ὅθεν ἔξει τὴν αὐτὴν ταχυτῆτα, ἣν εἶχε ἐ πρότερον. Ταῦτόν ῥητέον ἐ περὶ τῆ Β, παραβαλλομένῃ πρὸς τὸ Α.

347. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Δύο σώματα Α ἐ Β, ἴσην μὲν ἔχοντα μάζαν, ἀνισοταχῆ δέ, μεταβαλῦσι τὰς ἀλλήλων ταχυτῆτας· τὸ γὰρ ἥττονι ταχυτῆτι χωρεῖν ἐκληπτέον ὡς ἤρεμον, ὡς πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆς θατέρου ταχυτῆτος· ἐπιδέξεται ἄρα διὰ τῆς συγκρούσεως, τὸ μὲν ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς διὰ τῆς συγκρούσεως, τὸ δ' ἄλλο ἥμισυ διὰ τῆς ἐλάσεως· ἄρα κτ.

348. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ'. Ἐὰν δύο σωμάτων αἱ μάζαι Α, Β, ἀντιερόφως ὦσιν, ὡς αἱ αὐτῶν ταχυτῆτες, ἀνακάμψουσιν ἐκάτερον τῇ προτέρᾳ ἐαυτῆ ταχυτῆτι· εἴσι δὲ κἀνταῦθα ὁ αὐτὸς λόγος, ὅς κἀν τῷ Η πορίσματι· εἴγε ἐκατέρωσε ἐκάτερα σώματα ἔξει τὴν αὐτὴν ποσότητα τῆς κινήσεως (115).

349. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι'. Ἐὰν ἀνίσως ἔχη μάζας τὰ Α, Β, μὴ ὡσι δὲ αὐτῶν αἱ μάζαι ἀντιερόφως ὡς αἱ ταχύτητες, ἥτοι ἐκάτερα ἀνακάμψουσιν, ἢ συνεχῶς μὲν κινήσεται συνάμα τῷ ἀσθενέστερῳ, ἀλλὰ ταχυτῆτι ἥσονι ἢ τὸ ἀσθενέστερον· διὰ μὲν γὰρ τὴν κοινὴν αὐτοῖς ποσότητα τῆς κινήσεως, ἐκάτερα ἀνακάμψουσιν τῇ αὐτῇ ποσότητι (346, 348)· διὰ δὲ τὴν ὑπεροχὴν τῆς κινήσεως, ἐκληπτέον ὡς ἤρεμῶν τὸ ἀσθενέστερον· ἐντεῦθεν ἦν ἐν τῶν τριῶν συμβήσεται· ἥτοι γὰρ τῷ Α ἐκ τῆς ὑπεροχῆς, μετὰ τὴν σύγκρουσιν ἐ τὴν ἐλάσιν, καταλείπεται ποσότης ἴση τῇ κοινῇ, ἣν εἶχε πρὸ τῆς συγκρούσεως· ἐ, ἐπει, διὰ μὲν ταύτης ἀνακάμψαι ὀφείλει, ὡς εἴρηται, διὰ δὲ τῆς πρώτης προχωρεῖν, ἐν ἡρεμίᾳ καταστήσεται·

ἢ μείζων τῆς κοινῆς, ἢ προχωρήσει τῇ διαφορᾷ τῶν δύο ποσοτήτων· ἢ ἐλάσσων, ἢ ἀνακάμψει τῇ διαφορᾷ τῶν δύο ποσοτήτων.

350. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Γνωσῶν ὄντων τῶν τε μαζῶν, ἢ τῶν ταχυτήτων δύο σωμάτων ἐλασικῶν, φερομένων τὴν αὐτὴν φοράν, ἢ θατέρε ἡρεμῦντος πρὸ τῆς συγκρούσεως, ὁρίσασθαι, ὅση ἔσαι ἡ ταχύτης τῆ συγκρούουτος, ἢ ὅση ἡ τῆ συγκρουομένη, μετὰ τὴν ἐλασικότητα.

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω ἡ αὐτοῖς κοινὴ μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχύτης (311, 312), ἢ διπλασιασθῆτω, ἢ τῆ διπλῆ τῆδε ἀφηρήσθω ἡ ταχύτης, ἢν εἶχε τὸ συγκρούον σῶμα πρὸ τῆς συγκρούσεως· τὸ ἔν κατάλοιπον ἔσαι ἡ τῆ συγκρούοντος ταχύτης μετὰ τὴν ἐλασικότητα· ἀφηρήσθω δὲ τῆ αὐτῆ διπλῆ ἢ ἡ ταχύτης, ἢν εἶχε τὸ συγκρουομένον σῶμα πρὸ τῆς συγκρούσεως· κατάλοιπον ἔν ἔσαι ἡ τῆ συγκρουομένου σώματος ταχύτης μετὰ τὴν ἐλαστικότητα.

351. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Τὸ γὰρ ἐλασικὸν σῶμα Α, ἔχον, μάζαν μὲν ὡς 2, ταχύτητα δὲ ὡς 25, συγκρούετω τὸ ἐλασικὸν σῶμα Β, κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἢ ἔχον, μάζαν μὲν ὡς 1, ταχύτητα δὲ ὡς 2· ἢ ἔν ποσότης τῆς κοινήσεως, τῆ μὲν Α ἔσαι ὡς 50, τῆ δὲ Β ὡς 10, ὡν τὸ ἄθροισμα 60, διαιρεθὲν διὰ τῶν μαζῶν 3, δίδωσιν 20 ὡς κοινὴν ἑκατέροις ταχύτητα μετὰ τὴν σύγκρουσιν· τῆ δὲ διπλῆ τῶν 20, ἢται τῶν 40, ἀφηρήσθω 25, ταχύτης, προτέρα τῆ Α· τὸ δὲ κατάλοιπον 15, ἔσαι ἡ ταχύτης, ἢν ἔξει τὸ Α μετὰ τὴν ἐλαστικότητα· τῆ αὐτῆ 40 ἀφηρήσθω ἢ 10, προτέρα ταχύτης τῆ Β, ἢ δὴ 30 ἔσαι ἡ τῆ Β μετὰ τὴν ἐλαστικότητα ταχύτης.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ. Ἐστω Τ ταχύτης τῆ Α, ἢ τ ταχύτης τῆ Β, πρὸ τῆς συγκρούσεως, ἢ Χ ἢ

κοινή αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχύτης· ἢ ἔν ποσότης τῆς ταχύτητος, ἣν ἀπέβαλε τὸ Α διὰ τῆς συγκρούσεως, ἔστι $T - \chi$ (ἐν δὲ τῷ ὑποδείγματι 25 — 20)· ἀπολέσει δὲ ἐξ διὰ τῆς ἐλασικότητος $T - \chi$ · ἔκῃν ἀπὸ τῆς χ , ἣ λείπεται αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν, (ἀπὸ 20) ἀφαιρέτες $T - \chi$ (25 — 20)· ἐ καταλειφθήσεται αὐτῷ, μεταβολῇ τῶν συμβόλων τῆς ἀφαιρημένης ποσότητος, $\chi - T + \chi = 2\chi - T$ · εὐρεθήσεται ἄρα ἡ μετὰ τὴν ἐλασικότητα ταχύτης τῆ Α, ἀφαιρημένης τῆς ταχύτητος, ἣν εἶχε πρὸ τῆς συγκρούσεως, ἀπὸ τῆ διπλῆ τῆς κοινῆς αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχυτήτος· τῷ δὲ Β προσγίνεται $\chi - T$ (20 — 10)· ἀλλὰ τῆ ποσότητι χ , ἣν εἶχε (τῷ 20), ἡ ἐλασικότης προσίθῃσιν ἔτι $\chi - T$ · ἡ αὐτῆ ἄρα ταχύτης ἔσται $2\chi - T$ · ἔκῃν εὐρεθήσεται ἡ αὐτῆ μετὰ τὴν ἐλασικότητα ταχύτης, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῆς αὐτῆ πρὸ τῆς συγκρούσεως ταχυτήτος τῆ διπλῆ τῆς κοινῆς αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχυτήτος.

352. ΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Σῶμα τὸ Α, βάρους ἕλκον λίτρας μιᾶς, ἐ ταχὺ, οἷον διατρέχειν ὀργυρὰν ἐν ἐνὶ λεπτῷ δευτέρῳ, προσβάλλει σῶματι ἑτέρῳ τῷ Β, ἐλασικῷ, ἠρέμῳ, ἐ βάρους ἕλκοντι λίτρων 100· ἢ ἔν κοινή αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχύτης ἔστιν $\frac{1}{2}T$, ἣς τὸ διπλῆν $\frac{1}{2}T$, ἔ ἀφαιρεθέντος $1 = \frac{1}{2}T$ ταχυτήτος, ἡ προὔπῃν τῷ Α, καταλείπεται $-\frac{1}{2}T$ · ἣτις διὰ τὸ σύμβολον — ἔστι ποσότης λειπτική, ἐ δὴ ἐναντία τῆ κατὰ τὴν προτέραν φοράν $\xi\Pi$ ταχυτήτι· ὅθεν δῆλον ὅτι τὸ Α μετὰ τὴν ἐλασικότητα ἀνακάμψαι ὀφείλει κατὰ τὴν φοράν $\xi\zeta$ ταχὺ, οἷον διαδραμεῖν $\frac{1}{2}T$ ὀργυρᾶς ἐφ' ἐκάστῃ λεπτῷ δευτέρῳ· τῷ δὲ Β, ἀφαιρεθείσης 0 ταχυτήτος, ἢ

εἶχε πρὸ τῆς συγκρούσεως, ἀπὸ τῆτ διπλῆ τῆς κοινῆς αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχύτητος, περιέσαι τῆτ ὀργυῖας, ἵνα διαδράμῃ ἐφ' ἑκάστῃ λεπτῷ δευτέρῳ μετὰ τὴν ἐλασικότητα.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Αὗται αἱ δύο ταχύτητες τῆτ, ἢ τῆτ, πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὰς μάζας 1, 100, διδούσιν τὴν ὀλικὴν ποσότητα τῆς μετὰ Θὴν ἐλασικότητα κινήσεως τῆτ + τῆτ = τῆτ, ποσότης τριπλασία τῆς 1, ἢ τῆς μάζης 1, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὴν ταχύτητα 1, ἣτις ἐστὶ ποσότης τῆς κινήσεως, ἣν εἶχε τὸ Α πρὸ τῆς συγκρούσεως, πλὴν τῆς τῆτ (*), ἃ συνάδει τῷ ἤδη ἀποτελεσθέντι (348).

353. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Γνωσῶν ἑσῶν τῶν μαζῶν ἢ τῶν ταχυτήτων δύο σωμάτων ἐλασικῶν, κινουμένων κατὰ φοράς ἐναντίας πρὸ τῆς συγκρούσεως, ὀρίσασθαι, ὅση ἔσαι ἡ ταχύτης τῶν δύο σωμάτων μετὰ τὴν σύγκρουσιν.

ΛΥΣΙΣ. α'. Δηρῶσθω ἡ διαφορὰ τῶν δύο ποσοτήτων τῆς κινήσεως διὰ τῆς μάζης· ἢ ποριθῆσεται ἡ ἀμφοῖν κοινὴ μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχύτης· β'. τῷ διπλῷ ταύτης τῆς κοινῆς ταχύτητος ἀφηρῶσθω ἡ ταχύτης, ἣν εἶχε τὸ ἰχυρῶτερον σῶμα πρὸ τῆς συγκρούσεως· ἢ εὔρεθῆσεται αὐτῷ ἡ μετὰ τὴν ἐλασικότητα ταχύτης· γ'. τῷ διπλῷ ταύτης τῆς ταχύτητος προσεθείσθω ἡ ταχύτης, ἣν εἶχε τὸ ἀσθενέστερον πρὸ τῆς συγκρούσεως· ἢ δὴ θηρευθῆσεται αὐτῷ ἡ μετὰ τὴν ἐλασικότητα ταχύτης.

354. ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Σῶμα τὸ Α, βαρὺ λίτρας 3, ἢ ταχὺ, οἷον πόδας 12 διανύσαι ἐν ἐνὶ λεπ.

(*) Καὶ γὰρ $1 = \frac{1}{100}$ · ἄρα $3 \times 1 = \frac{3}{100}$ · τοιγαρῶν $\frac{3}{100} - \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$.

δευτ. ἀπαντᾶ τῷ Β, βαρεῖ μὲν ὄντι λίτρας 2, ταχέι δὲ, οἷον 3 πόδ. διανύειν ἐν 1 λεπ. δευτ. διηρήθω ἔν 30 διαφορὰ τῶν δύο ποσοτήτων τῆς κινήσεως διὰ τῆ ἀθροίσματος τῶν μαζῶν· ἔστι δὲ ἔσαι $\frac{1}{2} = 6$ · ἐκ δὲ τῆ διπλῆ τῶν 6, εἴτ' ἔν τῆ 12, ἀφηρήθω ἡ ταχύτης 12, ἣν εἶχε τὸ Α πρὸ τῆς συγκρούσεως· ἔκυν ἡ διαφορὰ 0 ἡρεμύσειν σημαίνει τὸ Α μετὰ τὴν ἐλασικότητα· τῷ δὲ 2 $\times 6 = 12$, συνήθω 3 ταχυτῆς, ἣν εἶχε τὸ Β πρὸ τῆς συγκρούσεως· ἔκυν 13 ἔσαι ταχυτῆς αὐτῆ μετὰ τὴν ἐλασικότητα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, εἰάν ἡ τῆ Β ταχυτῆς ἦ 2 ἀντὶ 3, ἡ διαφορὰ τῶν ποσοτήτων τῆς κινήσεως διαιρεθεῖσα διὰ τῶν μαζῶν δίδωσι $\frac{1}{2}$ · ἐκ δὲ τῆ κατὰ τῆτο διπλῆ $\frac{6}{2}$ ἀφαιρεθέντος τῆ 12 = $\frac{6}{2}$, λειφθήσεται $\frac{1}{2}$ ταχυτῆς τῆ Α, χωρῆσα κατὰ τὴν προτέραν φοράν ζξΠ· τῷ δὲ Β, συναφθέντος τῆ 2 τῷ $\frac{6}{2}$, εὐρεθήσεται ταχυτῆς $14 \frac{1}{2}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Εἰάν ἐπὶ τῆ Α' ὑποδείγ. ἡ τῆ Β ταχυτῆς ἦ = 6, ἡ κοινή αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχυτῆς ἔσιν $\frac{1}{2}$ · τῆ δὲ διπλῆ $\frac{4}{2}$ ἀφαιρεθέντος 12 = $\frac{6}{2}$, κατάλοιπον ἔσαι — $\frac{1}{2}$, ὃ διὰ τὸ — σύμβολον, παλινδρόμησιν κατηγορεῖ τῆ συγκρούσαντος κατὰ τὴν φοράν ξζ, διανύοντος πόδ. $\frac{1}{2}$ ἐν ἐνὶ λεπ. δευτ. τῷ δὲ Β, συναφθέντος τῆ 6 τῷ $\frac{1}{2}$, εὐρεθήσεται ταχυτῆς $15 \frac{1}{2}$, ἐν ἐνὶ λεπ. δευτ. μετὰ τὴν ἐλασικότητα.

355. ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΤ ΚΑΝΟΝΟΣ. α'. Ἐναντίων ἔσῶν τῶν δύο ποσοτήτων τῆς κινήσεως Α, Β, τὸ αὐτῶν ἄθροισμα ἐν τῷ πρώτῳ ὑποδ. ἔσι $36 - 6 = 30$ · ἡ δὲ κοινή αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν ταχύτης, ἔσαι τὸ πηλίκου τὰ ἐκ 30 διαιρεθέντος διὰ τῶν μαζῶν· ἀποδόντες ἔν

τὸν λόγον ταύτης μόνης τῆς διαφορᾶς τῆς ἐν ταῖς δυοῖ
 κοίσι τοῖς ἀποδοθείσιν ὑπὲρ τῆ ἰχυρωτέρου σώματος A
 (357, 353), τὸ λοιπὸν τῆ δευτέρου τῆδε κινῶνος ἀπο-
 δεξόμεν κατὰ λέξιν ἐπὶ τῆ συγκρούοντος σώματος, ὡς
 περ καὶ τὸν πρῶτον (351). κείθω ἔν εἰς ἐφαρμογὴν μό-
 νον τὸ πρῶτον τῶν ὑποδειγμάτων (354).

356. Ἐς τὸ T ταχύτης τῆ A πρὸ τῆς συγκρούσεως,
 εἰ τῆ B, εἰ χ ἡ κοινὴ αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρουσιν τα-
 χύτης· ἡ ταῖνον ποσότης τῆς ταχύτητος, ἣν τὸ A ἀπέ-
 βαλε διὰ τῆς συγκρούσεως, ἐστὶ $T - \chi$ (ἐν δὲ τῷ πρῶτῳ
 ὑποδ. $12 - \frac{1}{2} = 6$). ἀπέβαλε δὲ εἰς διὰ τῆς ἐλασι-
 κότητος $T - \chi$ ($\frac{1}{2} = 6$). ἀφαιρέτεον ἄρα τῆ χ ἢ τῆ
 ($\frac{1}{2}$), ὃ καταλείπεται αὐτῷ μετὰ τὴν σύγκρουσιν, T
 $- \chi$ ἢ ($\frac{1}{2}$), εἰ καταλειφθήσεται αὐτῷ, $\chi - T + \chi$
 $= 2\chi - T$ (ἐπὶ δὲ τῆ A' ὑποδείγ. $2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$
 0 , ἢ $12 - 12 = 0$). ἄρα εὐρεθήσεται ἐν γένει ἡ τα-
 χύτης τῆ συγκρούοντος A τῆ ἰχυρωτέρου μετὰ τὴν ἐλασι-
 κότητα, ἀφαιρουμένης τῆς αὐτῆ πρὸ τῆς συγκρούσεως τα-
 χυτήτος ἀπὸ τῆ διπλῆ τῆς κοινῆς αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγ-
 κρουσιν ταχυτήτος.

Τὸ δὲ B σῶμα, τὸ συγκρούμενον εἰ ἀσθενέστερον, ὀφεί-
 λει, διὰ τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως τὴν αὐτῷτε εἰ τῷ
 A κοινήν, δι' ἧς εἶχεν ἑαυτῆ ταχυτήτος πρὸ τῆς συγ-
 κρούσεως τ, ἀνακάμψαι κατὰ τὴν φοράν ξII ἀπάσῃ ταύ-
 τη τῆ ταχύτητι τ (346). προσβῆσι μέντοι αὐτῆ τὴν
 διὰ τῆς συγκρούσεως ταχυτήτα χ κατὰ τὴν αὐτὴν φο-
 ράν ξII, εἰ τὴν αὐτὴν ἔτι χ διὰ τῆς ἐλασικότητος· ἔ-
 κεν ἡ ὀλικὴ ταχύτης τῆ συγκρούοντος σώματος B, μετὰ
 τὴν ἐλασικότητα, ἔσεται $2\chi + \tau$. ἡ ἄρα μετὰ τὴν ἐ-
 λασικότητα ταχύτης τῆ B περιοθήσεται, τῆς, ἣν εἶχε

πρὸ τῆς συγκρίσεως, ταχυτήτος συνάπτομένης τῷ διπλῷ τῆς κοινῆς αὐτοῖς μετὰ τὴν σύγκρισιν ταχυτήτος.

257. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀναφορικὴ ἀκείει ταχύτης, καθ' ἣν δύο σώματα προχωροῦσιν ἀλλήλοις, ἢ ἀποχωροῦσιν ἀλλήλων.

258. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ ἀναφορικὴ ταχύτης δύο σωμάτων ἐλασικῶν ἢ αὐτὴ αἰεὶ ἐστὶ πρῶτε τῆς συγκρίσεως ἢ μετὰ τὴν σύγκρισιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Προβαλέτω σῶμα ἐλασικὸν σῶματι ἐτέρω ἠρεμῶντι, ἢ ἢ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν κινουμένῳ· ἐκέν ἢ ταχύτης αὐτῶν μετὰ τὴν ἐλασικότητα ἐστὶ $2\chi - T$, ἢ $2\chi - \tau$ (350). ἄρα, ἐπεὶ ἐκατέρωθι αἱ αὐταὶ εἰσὶ ποσότητες 2χ , αἱ ταχύτητες αὐταὶ μετὰ τὴν ἐλασικότητα εἰσὶν ὡς $-T : -\tau$. ἔκέν ἢ μεταξὺ τούτων τῶν δύο ταχυτήτων διαφορὰ μετὰ τὴν ἐλασικότητα, ἢ ἀναφορικὴ ταχύτης, ἐστὶ $T - \tau$. ἀλλὰ $T - \tau$ ἐστὶν ἢ αὐτὴ διαφορὰ τῶν δύο πρὸ τῆς συγκρίσεως ταχυτήτων· ὡσαύτως, ὅταν δύο σώματα, κατ' ἐναντίας φοράς κινούμενα, ἀντισυγκρίσωσιν ἀλλήλα, αἱ αὐτῶν ταχυτήτες μετὰ τὴν ἐλασικότητα εἰσὶ $2\chi - T$, ἢ $2\chi + \tau$, ὧν ἢ διαφορὰ, ἢ ἢ ἀναφορικὴ ταχύτης, ἐστὶ $T + \tau$ (*). ἀλλὰ ἢ πρὸ τῆς συγκρίσεως, ἐπεὶ κατ' ἐναντίας φοράς ἐκινῶντο, ἢ αὐτῶν ἀναφορικὴ ταχύτης ἦν ὡσαύτως $T + \tau$. ἐν γένει ἄρα τῶν ἐλασικῶν σωμάτων ἢ ἀναφορικὴ ταχύτης ἢ πρὸ τῆς συγκρίσεως ἢ μετὰ τὴν σύγκρισιν ἐστὶν ἢ αὐτή. Ο. Ε. Δ.

(*) Ἐὰν γὰρ ἢ $-T = -12$, ἢ $\tau = 3$, ἢ $\tau = -12$ πρὸς $+3$ διαφορὰ εἶσαι (Συμβ. Λογ. 33. Τομ. Α΄.) $+12 + 3 = 15$, οἷον ἢ $T + \tau$.