μετρικῆς προόδου ὑποτίθεται $= 1$, ἐστὶ $\delta\chi = \frac{\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$. καὶ τῆς μὲν, εἴτ᾽ οὖν τῆς $\delta\chi = \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$, ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\chi = \lambda\upsilon$, τῆς δὲ, εἴτ᾽ οὖν τῆς $\delta\chi = \frac{\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$, τὸ $\chi = \mu\lambda\upsilon$· ὅθεν δῆλον, ὅτι, ἐπεὶ χ παρίστησι τὸν λογάριθμον, ἵν᾽ ἀχθῶσιν οἱ ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι εἰς τοὺς συστήματος ἄλλου, οὗ τὸ μέτρον ἐστὶ μ, πολλαπλασιαστέον ἐστὶ τούτους ἐπὶ τὸ μέτρον μ· ἀλλὰ λογάριθμος τοῦ 10 ἐν τοῖς κοινοῖς κανονίοις ἐστὶ 1· ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 10 ἐν τοῖς ὑπερβολικοῖς ἐστιν, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, 2,30258509· ἄρα $\mu \times 2,30258509 = 1$· ἄρα τὸ μέτρον μ τῶν κοινῶν κανονίων ἐστιν

$= \frac{1}{2,30258509} =$ (γενομένης τῆς διαιρέσεως) 0,43429448· „ἵν᾽ ἄρα ἀναχθεῖεν οἱ ἤδη ἀποδεδομένοι „ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι εἰς τοὺς ἐν τοῖς κανονίοις, πολ„λαπλασιαστέοι εἰσὶν ἐπὶ 0,43429448· τοὐναντίον δὲ, „ἵν᾽ οἱ ἐν τοῖς κανονίοις ἀναχθῶσιν εἰς τοὺς ὑπερβολικοὺς, „διαιρετέοι εἰσὶ διὰ 0,43429448, ἢ (ὃ εὐχερέστερόν τε „ἐστὶ, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἄγει τέλος) πολλαπλασιαστέοι ὑπάρ„χουσιν ἐπὶ 2,30258509“· οὕτως, εἰ πολλαπλασιασθείη ὁ ἄρτι εὑρημένος τοῦ 2 λογάριθμος 0,69314718 ἐπὶ 0,43429448, προκύψει λογάριθμος τοῦ 2 ὁ 0,3010300, οἷος τῷ ὄντι ἀπαντᾷ ἐν τοῖς κανονίοις.

254. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄.** *Λογαρίθμου ὑπερβολικοῦ δοθέντος, εὑρεῖν αὐτοῦ τὸν ἀριθμόν.*

ΛΥΣΙΣ. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι, τοῦ $\alpha + \chi$ ἀριθμὸν ὁντιναοῦν ἐμφαίνοντος, εὑρίσκεται $\lambda(\alpha + \chi) = \lambda\alpha +$

$\left(\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4} + \text{κτ.}\right)$· ἄρα $\lambda(\alpha+\chi) - \lambda\alpha$, εἴτ' οὖν $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha} = \frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4}$ κτ.· τοῦ α ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν πρὸς τὸ δοκοῦν εἰλημμένον, τοιοῦτον μέντοι, ὥστε τὸν αὐτοῦ λογάριθμον βραχύτι διαφέρειν τοῦ δοθέντος, τοῦ ἐξ ὑποθέσεως ἐπανήκοντος τῷ ἀριθμῷ $\alpha + \chi$· γενέσθω διὰ τὸ ἁπλούστερον, $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha} = \psi$· οὗν ἔσται $\psi = \frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{2\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4}$ κτ.· ζητεῖται οὖν ἡ τοῦ $\frac{\chi}{\alpha}$ δύναμις, παρισταμένη διὰ ψ· παρεστάσθω τοίνυν ἐξ ὑποθέσεως ἡ δύναμις αὕτη διὰ $\frac{\chi}{\alpha} = \text{Α}\psi + \text{Β}\psi^2 + \Gamma\psi^3 + \Delta\psi^4 + \text{κτ.}$, Α, Β, Γ, κτ. συνεργῶν ὄντων ἀτρέπτων, ὧν ζητεῖται ὁ διορισμός· πορισθήσεται ἄρα

$$
\begin{array}{rllll}
\psi = & \text{Α}\psi + \text{Β}\psi^2 & + \Gamma\psi^3 & + \Delta\psi^4 & + \text{κτ.} \\
& \quad - \frac{\text{Α}^2}{2}\psi^2 & - \frac{2\text{ΑΒ}}{2}\psi^3 & - \frac{\text{ΒΒ}}{2}\psi^4 & \\
& & + \frac{\text{Α}^3}{3}\psi^3 & - \frac{2\text{Α}\Gamma}{2}\psi^4 & \\
& & & + \frac{3\text{Α}^2\text{Β}}{3}\psi^4 & \\
& & & - \frac{\text{Α}^4}{4}\psi^4 &
\end{array}
$$

Ἀλλ' ἵν' αὕτη ἡ ἐξίσωσις ἐπικρατοίη, ὁποία ποτ' ἂν ᾖ ἡ ψ, ἐπάναγκες εἶναι α΄. $\text{Α} = 1$· β΄. τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων ἕκαστον τοῦ ψ βαθμὸν, ἐν ταῖς ἄλλαις στήλαις ὑπάρχειν μηδέν· ἄρα $B - \frac{A^2}{2} = 0$, ϗ $\Gamma - AB + \frac{A^3}{3} = 0$, ϗ $\Delta - \frac{BB}{2} - A\Gamma + A^2 B - \frac{A^4}{4} = 0$· ἐντεῦθεν ἄρα $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$, ϗ $\Gamma = \frac{1}{6} = \frac{1}{1.2.3}$, ϗ $\Delta = \frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4}$· ϗ ἐὰν ὑποτεθῇ μείζων ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς, ὡς ἐνυπάρχειν τῇ σειρᾷ καὶ $E\psi^5$, $Z\psi^6$ κτ., εὑρεθήσεται ὡσαύτως ϗ $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, ϗ $Z\ \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ κτ.· ἔστιν ἄρα $\frac{\chi}{\alpha} = \psi + \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5} +$ κτ.· ἄρα $1 + \frac{\chi}{\alpha}$, ἢ $\frac{\alpha + \chi}{\alpha} = 1 + \frac{\psi}{1} + \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5} +$ κτ..

Ἵνα δὲ τούτῳ τῷ τύπῳ χρησώμεθα, ἀφῃρήσθω τοῦ δοθέντος λογαρίθμου (ὅς ἐστιν ὁ τοῦ $\alpha + \chi$) ὁ προσεχέστερος γνωστὸς λογάριθμος, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς εἰλήφθω ἀντὶ α· πορισθήσεται ἄρα τηνικαῦτα $\lambda\frac{\alpha + \chi}{\alpha}$, ἢ ψ, ὃς ἀντικατασταθήτω ἐν τῷ προεκτεθέντι τύπῳ· τὸ δὲ ἀποτέλεσμα ἔσται ἡ δύναμις τοῦ $\frac{\alpha + \chi}{\alpha}$· ἐντεῦθεν εὐχερῶς εὑρεθήσεται ὁ $\alpha + \chi$, ἐπεὶ γνωσθήσεται ὁ α.

Βουλομένοις δὲ εἰδέναι, ὅς τις ἐςὶν ὁ ἀριθμὸς, οὗ ὁ λογάριθμος ἐςὶ 1 ἐν τῷ προκειμένῳ λογαριθμικῷ συςήματι, ὑποθετέον $\lambda \frac{\alpha+\chi}{\alpha}$, ἢ $\psi = 1$· καὶ δὴ εὑρεθήσεται $\frac{\alpha+\chi}{\alpha}$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}$$

$+$ κτ., ὃς εὑρεθήσεται $= 2,7182818$, ἀρκεσθεῖσι δεκαδικοῖς 7.

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα λογάριθμοι ζητοῦνται, ὧν τὸ μέτρον ἐςὶ 1, εἴπερ ὁ δοθεὶς ὁμοφυὴς εἴη τοῖς ἐπὶ τῶν κοινῶν κανονίων, ἀνακτέον ἤτοι αὐτοὺς, ἢ μόνην τὴν αὐτῶν διαφορὰν, εἰς τοὺς ἐνεργείᾳ λογαρίθμους, ὥσπερ προδέδεικται (253).

Δυνατὸν δὲ καὶ δι' ἄλλου τύπου ἐκτεθῆναι ἀριθμὸν διὰ τοῦ κατ' αὐτὸν λογαρίθμου· ἔςω μὲν γὰρ χ ὁ ἀριθμὸς, ἔςω δὲ $\lambda\chi = \psi$· ἐὰν οὖν τὸ δεύτερον μέλος ταύτης τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\lambda.\varepsilon$, τοῦ ε ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, οὗ λογάριθμος ἐςὶ 1, πορισθήσεται $\lambda\chi = \psi\lambda\varepsilon$· ὅθεν οὐδεμία τροπὴ τῇ ἐξισώσει ἐπιγίνεται, εἴγε $\lambda\varepsilon = 1$· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις $\lambda\chi = \psi\lambda\varepsilon$ μεταβάλλει, διὰ τὴν φύσιν τῶν λογαρίθμων, εἰς $\lambda\chi = \lambda\varepsilon^{\psi}$, ὅθεν $\chi = \varepsilon^{\psi}$, ὅτι, τῶν λογαρίθμων ἴσων ὄντων, ἴσοι ὑπάρχουσι καὶ οἱ αὐτοῖς ἐπανήκοντες ἀριθμοί· ἐπεὶ δὲ, ἐὰν ᾖ $\lambda\chi = \psi$, ἔςαι

(254) $\chi = 1 + \psi + \frac{\psi^2}{1.2} + $ κτ.· ἄρα, ὄντος ἅμα $\chi = \varepsilon^{\psi}$, πορισθήσεται $\varepsilon^{\psi} = 1 + \psi + \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^3}{1.2.3}$

$\frac{\psi^4}{1.2.3.4} +$ κτ.

255. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ μέθοδος, ᾗ περ ἤδη ἐχρησάμεθα πρὸς εὕρεσιν τῆς τοῦ χ δυνάμεως διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \frac{\chi}{\alpha}$ — κτ. *μέθοδος τῶν σειρῶν ἀντίθετος* ὀνομάζεται· ἐν ταύτῃ δὲ, ὡς παντὶ δῆλον, ἡ, ἧς τὴν δύναμιν εὑρεῖν βουλόμεθα, μεταβλητὴ ποσότης ἐκτίθεται διὰ σειρᾶς, ἐν ᾗ μεταβλητὴ ἑτέρα δείκτας ἔχει προϊόντας κατ' ἀριθμητικὴν πρόοδον· ἑκάστῳ δὲ αὐτῆς ὅρῳ συνεργὸς προτέτακται ἄτρεπτος καὶ διωρισμένος.

Ἐὰν δὲ ὦσι πολλοὶ ὅροι διὰ χ καὶ ψ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει, χ δὲ καὶ ψ μὴ πολλαπλασιάζωνται ἐπ' ἀλλήλους, ἡ τῶν δεικτῶν σειρὰ διορισθήσεται, τιθεμένου τοῦ δείκτου τοῦ τῆς σειρᾶς πρώτου ὅρου ἴσου τῷ ἐλαχίστῳ δείκτῃ τῆς αὐτῆς ἐν τῇ ἐξισώσει μεταβλητῆς ποσότητος, καὶ λαμβανομένου εἰς κοινὴν διαφορὰν τῶν τῆς σειρᾶς δεικτῶν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν τῆς αὐτῆς ἐν τῇ ἐξισώσει τρεπτῆς ποσότητος δεικτῶν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ᾖ $\psi^{\frac{2}{3}} + 3\psi = 2\chi - \frac{4}{3}\chi^2 + \frac{2}{7}\chi^3 +$ κτ, γενήσεται $\chi = A\psi^{\frac{2}{3}} + B\psi + \Gamma\psi^{\frac{4}{3}} + \Delta\psi^{\frac{5}{3}} + E\psi^2 +$ κτλ.· ὁ μὲν γὰρ ἐλάττων δείκτης τοῦ ψ ἐστὶ $\frac{2}{3}$, ὁ δὲ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεικτῶν $\frac{2}{3}$ καὶ 1 τῆς ψ ἐστὶ $\frac{1}{3}$.

Ἐὰν δὲ χ καὶ ψ πολλαπλασιάζωνται ἐπ' ἀλλήλους, τηνικαῦτα μεθόδῳ ἑτέρᾳ χρηστέον, ἣ ἡμῖν μὲν ἀλλοτρία τῆς ἐν χερσὶ προθέσεως ὑπάρχει, ὁ δὲ ταύτην ἰδεῖν βουλόμενος, μετιέτω τά τε τοῦ Νεύτωνος συγγράμματα, καὶ τὴν τοῦ Κραμέρου ἀνάλυσιν τῶν καμπύλων γραμμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Χρῆσις τῶν προεκτεθεισῶν προσεγγίσεων εἰς ὁλοκλήρωσιν διαφόρων ποσοτήτων.

256. Προκειμένων δὲ κανονίων, περιεχόντων τὰ παντοῖα τῆ κύκλυ μέρη, καὶ δὴ καὶ τὺς λογαριθμὺς, εἰ προτεθείη εἰς ὁλοκλήρωσιν ἀπειροστὸν, ἀναγόμενον εἴτε εἰς τὸν κύκλον, εἴτε εἰς τὺς λογαρίθμυς, ἄχρηστον ἔσαι τῦ λοιπῦ εἰς σειρὰς ἀναλύειν ταῦτα τὰ ἀπειροστά· χρήσιμον δὲ γνῶναι μόνον τὰς θαμινώτερον ἀπαντώσας σειρὰς τῶν δὲ τῶν ἀπειροστῶν, καὶ διορίσαι τὰ κυκλικὰ τόξα, ἢ τὺς λογαρίθμυς, ἃ αὐτῶν εἰσι τὸ ὁλόκληρον, κατὰ τὰ ἐφεξῆς ὑποδείγματα.

257. Εἴδομεν (243)· ὅτι τὸ $\frac{\frac{1}{2} a d\chi}{\sqrt{(a\chi - \chi\chi)}}$ ἐμφαίνει στοιχεῖον τόξυ κυκλικῦ τῦ ΑΜ (σχ. 73), ὗ a μέν ἐστιν ἡ διάμετρος, χ δὲ ἡ ἀποτετμημένη· ὥστε τὸ ταύτης τῆς ποσότητος ὁλόκληρον, εἴτ' ὖν τὸ Ο $\frac{\frac{1}{2} a d\chi}{\sqrt{(a\chi - \chi\chi)}}$ παριστᾷ τὸ τόξον ΑΜ· ζητηθήτω τοίνυν ἡ δύναμις τύτυ τῦ ὁλοκλήρυ ἐπὶ δυνάμει διωρισμένῃ τῆς χ· τηνικαῦτα ὖν τῆς ΚΑ $= \frac{1}{2} a$ ἀφῃρήσθω ἡ γνωστὴ τῦ χ δύναμις, εἴτ' ὖν ΑΠ· καὶ δὴ πορισθήσεται ΚΠ· τριγώνυ τοίνυν ὀρθογωνίυ τῦ ΚΠΜ γνωστά εἰσιν, ἥτε ὀρθὴ γωνία, καὶ ἡ αὐτὴν ὑποτείνυσα ΚΜ $= \frac{1}{2} a$, καὶ ἡ πλευρὰ ΚΠ· γνωσθήσεται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΜ· ταύτης δὲ γνωσθείσης, εἴτ' ὖν

τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τῶν μοιρῶν τȣ̃ τόξȣ ΑΜ, ϗ τῆς αὐτȣ̃ ἀκτῖνος ΚΜ, εὐμαρῶς εὑρεθήσεται τὸ τȣ̃ τόξȣ μῆκος (*).

258. Ἐὰν ᾖ $\frac{\eta\delta\chi}{\sqrt{(\vartheta\kappa\chi - \pi\chi\chi)}}$, τῶν η, ϑ, π, κ ποσὰ ἐγνωσμένα δηλȣ́ντων, τὸ ἀπειροστὸν τόδε ὅμοιον τῷ προτέρῳ γενήσεται, διαιρεθὲν τόν τε ἀριθμητὴν ϗ τὸν παρονομαστὴν διὰ $\sqrt{\pi}$· ὅθεν προελεύσεται $\frac{\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\chi - \chi\chi)}}$ $= \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\chi - \chi\chi)}}$· ἀλλ' ἐὰν ᾖ πολλαπλασιαστὴς τȣ̃ δχ τὸ ἥμισυ τῆς ποσότητος $\frac{\vartheta\kappa}{\pi}$, τῆς πολλαπλασιαζȣ́σης τὸ ὑπόῤῥιζον χ, τηνικαῦτα τὸ ἀπειροστὸν ὅμοιον ἀποκατασαθήσεται τῷ ἐπὶ τȣ̃ προτέρȣ παραγράφȣ· ἀπονεμηθήτω ἄρα αὐτῇ αὕτη ἡ κατάστασις, πολλαπλασιάσασιν ἅμα ϗ δελȣ̃σιν αὐτὴν διὰ $\frac{1}{2}$· $\frac{\vartheta\kappa}{\pi} = \frac{\vartheta\kappa}{2\pi}$· τοιγαρȣ̃ν πορισθήσεται

$$\frac{\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}}{\frac{\vartheta\kappa}{2\pi}} \times \frac{\frac{\vartheta\kappa}{2\pi}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\chi - \chi\chi)}} = \frac{2\pi\eta}{\vartheta\kappa\sqrt{\pi}}$$

(*) Τῆς γὰρ ἀκτῖνος εὑρεθείσης, διὰ τῶν προαποδοθέντων λόγων (Γεωμ. 370, 371, ϗ ἐνταῦθα, 256) εὑρίσκεται ἡ περιφέρεια· ταύτης δὲ γνωσθείσης, τὸ τȣ̃ τόξȣ μῆκος πορισθήσεται ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης, 368 : μοίρας τȣ̃ τόξȣ : : τὸ μῆκος ὅλης τῆς περιφερείας : τὸ μῆκος τȣ̃ τόξȣ.

$$\times \frac{\frac{\vartheta\kappa}{2\pi}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\chi - \chi\chi)}}$$

· οὕτως ὂν δῆλον, ὅτι τὸ ὁλόκληρον τοῦδε τοῦ ἀπειροστοῦ τόξον ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ μὲν διάμετρος ἐστὶ $\frac{\vartheta\kappa}{\pi}$, ἡ δὲ ἀποτετμημένη χ, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\frac{2\pi\eta}{\vartheta\kappa\sqrt{\pi}}$· εὐπετῶς ἄρα προσδιορίζεται διὰ τῶν προειρημένων.

259. Ἐὰν δὲ αἱ ἀποτετμημέναι πρὸς τῷ κέντρῳ Κ ἀποτμηθῶσι, κληθείσης τῆς ΚΑ ἀκτῖνος β, καὶ τῆς ΚΠ ἀποτετμημένης χ, πορισθήσεται τὸ $\frac{-\beta\delta\chi}{\sqrt{(\beta\beta - \chi\chi)}}$ ὡς στοιχεῖον τοῦ τόξου ΑΜ, εὑρισκόμενον ἔκ τε τῆς παραθέσεως τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΠΜ, Μρμ, καὶ ἐκ ΠΜ $= \sqrt{(\beta\beta - \chi\chi)}$, καὶ δὴ καὶ ὅτι, ἐπεὶ τὸ ΑΜ τόξον ἀπομειοῦται, ὅσον αὔξει ΚΠ $= \chi$, τὸ ἀπειροστὸν ἔσται λειπτικόν· προκειμένου τοίνυν ἀπειροστοῦ, οἷον τὸ $\frac{\kappa\delta\chi}{\sqrt{(\vartheta\eta - \pi\chi\chi)}}$, μεταβλητέον αὐτό, ὥσπερ ἀνωτέρω, εἰς τὸ $\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\eta}{\pi} - \chi\chi)}}$· ἀλλὰ τοῦ $\frac{\vartheta\eta}{\pi}$ παρισῶντος ἐνταῦθα τὸ $\beta\beta$, ἡ ποσότης $-\beta$, ἣν ὑπάρχειν δεῖ ἐν τῷ ἀριθμητῇ, ἔσται $-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$· πολλαπλασια-

στέον ἄρα καὶ διαιρετέον ἄμα διὰ $-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$· καὶ δὴ ἔσται

$$\frac{\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}} \times \frac{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}\,\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\eta}{\pi}-\chi\chi)}}$$

· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ

ΚΑ $=\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$, καὶ ΚΠ $=\chi$, πορισθήσεται

$$\frac{\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{(\frac{\vartheta\eta}{\pi}}} \times \text{ΑΜ}$$

ὡς ὁλόκληρον, ἢ γενικώτερον

$$\frac{\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}} \times \text{ΑΜ} + \Gamma = \frac{-\kappa}{\sqrt{\vartheta\eta}} \times \text{ΑΜ} + \Gamma\cdot$$

ἡ δὲ ἀμετάτρεπτος Κ διορίζεται ἐκ τῶν θέσεων τοῦ μερικωτέρου ζητήματος, ὅπερ ἀνήκει εἰς τὸ περὶ, οὗ ὁ λόγος, ἀπειροστόν· τὸ δὲ τόξον ΑΜ διορίζεται, ὥσπερ ἤδη εἴδομεν (257), τουτέστι διὰ τοῦ τριγώνου ΚΠΜ κτ.

260. Εἴδομεν (243), ὅτι τὸ $-\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$ ἐμφαίνοι τόξον κύκλου, οὗ α μέν ἐστιν ἀκτὶς, χ δὲ ἀπτομένη· δυνατὸν δὲ διορίσαι τουτὶ τὸ τόξον διὰ διωρισμένης τοῦ χ δυνάμεως, εὑρισκομένης τῆς ὑπὸ ΑΚΝ (σχ. 80) γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΝ, εἶτα τοῦ τόξου ΑΜ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν τῆς ὑπὸ ΑΚΝ γωνίας, καὶ τῆς α ἀκτῖνος.

Ἐὰν οὖν προκέηται $\frac{\kappa\delta\chi}{\vartheta\beta^2 + \eta\chi\chi}$, διαιρεθήσεται τόν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν διὰ η· ὅθεν προκύψει $\frac{\kappa}{\eta} \times \frac{\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta} + \chi\chi}$· εἶτα πολλαπλασιαζομένου τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ $\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}$, πορισθήσεται

$$\frac{\frac{\kappa}{\eta}}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}} \times \frac{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta} + \chi\chi}$$

, εἴτ' οὖν $\frac{\eta}{\vartheta\beta^2} \times$

$$\frac{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta} + \chi\chi}$$

· εὑρεθήσεται ἄρα τὸ ὁλόκληρον, θηρευομένου τοῦ μήκους τόξου, οὗ ἁπτομένη μέν ἐστιν ἡ χ, ἀκτὶς δὲ ἡ $\sqrt{(\frac{\vartheta\beta^2}{\eta})}$, καὶ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ $\frac{\eta^2}{\vartheta\beta}$.

261. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ταῦτα μὲν τὰ τρία ἀπειροστὰ ὁλοκληροῦνται δια τῶν κυκλικῶν τόξων· ἃ δὲ διὰ τῆς κυκλικῆς ἐπιφανείας, ὀψόμεθα ἐχομένως.

Στοιχεῖον τοῦ ἡμιτμήματος ΑΠΜ ἐστὶ τὸ $\delta\chi\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$ κληθείσης χ τῆς ΑΠ (σχ. 73.)· ἐστὶ γὰρ $\upsilon = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου $\upsilon\delta\chi$, εἴτ' οὖν ΠπμΜ $= \delta\chi\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$· ἅπαν ἄρα ἀπειροστὸν, τοιόνδε φέρον σχῆμα, ἢ εἰς τοιοῦτον διὰ προπαρασκευῶν ὁμοίων ταῖς προδεδειγμέναις μετασχηματιζόμενον, ὁλοκληρωθήσεται διὰ τοῦ ἡμιτμήματος κύκλου, οὗ ἡ μὲν ἀποτετμημένη ἐστὶ χ, ἡ δὲ διάμετρος α· τὸ δὲ τμῆμα εὐχερῶς διορίζεται διὰ τῶν προλελεγμένων ἐνταῦθα.

262. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** Τετραγωνίσαι τὸ ἐλλειπτικὸν ἡμίτμημα ΑΠΜ (σχ. 81).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστιν $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, $\upsilon\delta\chi = \delta$

$$(\text{ΑΠΜ}) = \frac{\beta\delta\chi}{\alpha}\cdot\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}\cdot$$

ἀλλὰ $\delta\chi\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$ ἐμφαίνει στοιχεῖον ἡμιτμήματος τοῦ ΑΠΜ' κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ· ἄρα $\delta\,(\text{ΑΠΜ}) = \frac{\beta}{\alpha}\,\delta\,(\text{ΑΠΜ}')$, ὧν τὰ ὁλόκληρα $\text{ΑΠΜ} = \frac{\beta}{\alpha}\,\text{ΑΠΜ}'$· ὅθεν ΑΠΜ : ΑΠΜ' :: β : α, τοῦτ' ἔστιν „ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐλλειπτικοῦ „ἡμιτμήματος πρὸς τὴν τοῦ συστοιχοῦντος κυκλικοῦ λόγον „ἔχει, ὃν ὁ ἐλάττων πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα" ἐντεῦθεν ἄρα „ὅλη ἡ ἔλλειψις πρὸς κύκλον γεγραμμένον ἐπὶ τοῦ „μεγάλου ἄξονος λόγον ἔχει, ὃν ὁ ἐλάττων ἄξων πρὸς „τὸν μείζονα" ὃ δὴ καὶ ἐν (Τ.ψ. Γ. 101) δέδεικται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲ πρὸς τῷ κέντρῳ Κ (σχ. 73.) τέμνωνται αἱ ἀποτετμημέναι, κληθείσης β τῆς ΚΑ, καὶ χ τῆς ΚΠ, ἔσται $-\delta\chi\cdot\sqrt{(\beta\beta - \chi\chi)}$ στοιχεῖον τοῦ ἡμιτμήματος ΑΠΜ· τηνικαῦτα γὰρ $\upsilon = \sqrt{(\beta\beta - \chi\chi)}$, τὸ δὲ τμῆμα ΑΠΜ ἀπομειοῦται αὐξούσης τῆς χ· διὸ λειπτικὸν ἀποβαίνει τὸ τοῦ ΑΠΜ ἀπειροστόν· τὸ δ' ἐφεξῆς πρόβλημα ἀπειροστὸν ἕξει, εἰς τοιόνδε ἐπαναγόμενον σχῆμα.

263. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** *Τετραγωνίσαι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐπιμήκους ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος.*

ΛΥΣΙΣ. Γενικὸς τύπος τῶν τοιούτων ἐπιφανειῶν ἐστιν ὁ $\frac{\pi\upsilon}{\eta}\sqrt{(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}$ (225)· ἔστι δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi)$· ἄρα $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\times\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha-\chi\chi)}$, καὶ $\delta\upsilon = -\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha-\chi\chi)}}$· ἄρα $\frac{\pi\upsilon}{\eta}\sqrt{(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}$ γίνεται $\frac{\pi\beta}{\eta\alpha}\times\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha-\chi\chi)}\times\sqrt{(\delta\chi^2+\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}\times\frac{\chi^2\delta\chi^2}{\frac{1}{4}\alpha\alpha-\chi\chi})}$, ἢ (τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σημειωθέντος, καὶ ἀναγωγῆς γενομένης, καὶ τοῦ $\delta\chi^2$ ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ ἀχθέντος) $\frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha}\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha-\chi\chi+\frac{\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha})} = \frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha}\cdot\sqrt{(\frac{\frac{1}{4}\alpha^4-\alpha\alpha\chi\chi+\beta\beta\chi\chi}{\alpha\alpha})}$ ἀλλ᾽ ἐὰν κληθῇ κ ἡ ἐκκεντρότης ΚΕ (σχ. 82.), ἔσται $\kappa\kappa = \frac{1}{4}\alpha\alpha - \frac{1}{4}\beta\beta$, καὶ $4\kappa\kappa = \alpha\alpha - \beta\beta$ (*)· στοιχεῖον

(*) Τοῦ μὲν γὰρ μείζονος ἡμιάξονος κληθέντος $\frac{1}{2}\alpha$, τοῦ δ᾽ ἐλάττονος $\frac{1}{2}\beta$, ἐπείπερ ἡ τὸ τοῦ ἐλάττονος ἄξονος πέρας καὶ τὴν ἑστίαν ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα ἐστὶν ἴση τῷ μείζονι ἡμιάξονι (Τ'Ψ. Γ. 87.)· ἐντεῦθεν συσταθήσεται τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ μὲν εἰρημένη εὐθεῖα ἡ ἴση τῷ μείζονι ἄρα τῆς ἐπιφανείας γίνεται τὸ $\frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha}$

$$\surd\left(\frac{\frac{1}{4}\alpha^4 - 4\,\kappa\kappa\chi\chi}{\alpha\alpha}\right) = \frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha\alpha}\surd\left(\tfrac{1}{4}\,\alpha^4 - 4\,\kappa\kappa\chi\chi\right)\cdot$$

διαιρέσει μὲν οὖν τοῦ ὑποῤῥίζου διὰ 4 κκ, πολλαπλασιασμῷ δὲ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ ἐπὶ τὴν ῥίζαν 2κ, πορίζεται $\frac{2\pi\beta\kappa\delta\chi}{\eta\alpha\alpha} \times \surd\left(\frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi\right)$ ποσότης, ᾗ ἀφοσιωτέον τὸ σύμβολον —, ἵν᾽ ἐμφήνῃ τὴν ἐπιφάνειαν ἀρχομένην ἐκ τοῦ σημείου Α· αὕτη γὰρ ἀπομειοῦται τοσοῦτον, ὅσον αὔξει ἡ χ· ἕξομεν ἄρα $- \frac{2\pi\delta\beta\kappa\delta\chi}{\kappa\alpha\alpha} \times \surd\left(\frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi\right)\cdot$ ταύτης ἄρα τῆς ποσότητος παραβαλλομένης πρὸς τὴν $-\delta\chi\,\surd(\beta\beta - \chi\chi)$, ἣν εἴδομεν τύπον οὖσαν ἡμιτμήματος κυκλικοῦ, οὗ ἡ ἀκτίς ἐστι β, συναχθήσεται ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῆς $-\delta\chi\,\surd\left(\frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi\right)$ ἐστὶν ἡμίτμημα κυκλικὸν ΟΠΜ[1], οὗ ἡ μὲν ἀκτίς ἐστιν $\frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\kappa}$, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένη χ, προσεπιτιθεμένης αὐτῷ καὶ ἀτρέπτου τινὸς ποσότητος· ἐὰν ἄρα ἀκτῖνι τῇ ΚΟ $= \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\kappa}$, τοῦτ᾽ ἔστι τρίτῃ ἀναλόγῳ τῶν ΚΕ, ΚΑ γραφῇ κύκλος ὁ ΟΝΡ,

ἡμιάξονι ὑποτείνει, περιέξουσι δὲ ἥτε ἐκκεντρότης, καὶ ὁ ἐλάττων ἡμιάξων· ἄρα (Γεωμ. 349..) $\frac{1}{4}\,\alpha\alpha = \kappa\kappa + \frac{1}{4}\,\beta\beta$, καὶ $\kappa\kappa = \frac{1}{4}\,\alpha\alpha - \frac{1}{4}\,\beta\beta$.

πορισθήσεται $O - \delta\chi \sqrt{(\frac{\frac{1}{15}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi)} = \text{ΟΠΜ}' +$ Γ· ἄρα $O - \frac{2\pi\beta\kappa\delta\chi}{\eta\alpha\alpha}\sqrt{(\frac{\frac{1}{15}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi)} = \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha} \times$ $\text{ΟΠΜ}' + \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha} + \Gamma$.

Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάτρεπτος Γ, σημειωτέον, ὅτι ἡ ζητυμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τῦ σημείυ Α ἀρχομένη, μηδέν ἐςι πρὸς αὐτῷ τῷ σημείῳ· ἀλλὰ πρὸς τῷ σημείῳ Α τὸ ἡμίτμημα ΟΠΜ' γίνεται ΟΑΝ· ἄρα $o = \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha} \times$ ΟΑΝ $+ \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha} + \Gamma$· ὅθεν $\Gamma = -$ ΟΑΝ· τὸ ἄρα πλῆρες ὁλόκληρον ἐςὶ $\frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha} \times \text{ΟΠΜ}' - \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}$ $\times$ ΟΑΝ, εἴτ' ὖν $\frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}$ (ΟΠΜ' — ΟΑΝ), ἤ τελευταῖον $\frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}$ (ΑΠΜ' Ν)· ἡ ἄρα ἡμίσεια ἐπιφάνεια τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος ἔςαι $\frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}$ (ΑΚΡΝ), ἤ (ἐπεὶ $\text{ΚΟ} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\alpha}{\kappa}$, καὶ ἐπομένως $\frac{2\kappa}{\alpha\alpha} = \frac{1}{\text{ΚΟ}}$) ἔςαι $=$ $\frac{\pi}{\eta} \times \frac{\beta}{2\text{ΚΟ}} \times$ ΑΚΡΝ, ἧς τὸ διπλῦν ἐμφαίνει ὅλην τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος τὴν ἐπιφάνειαν.

264. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἁπλέςατα δὲ διορίζεται ἡ ἀκτὶς ΚΟ· κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΑ, γε-

γράφθω τόξον τὸ ΑΛ τέμνον κατὰ τὸ Λ τὴν ἐπὶ τῆς ΚΑ ἀνιςαμένην πρὸς τῷ Ε κάθετον ΕΛ, ϗ προήχθω ἡ ΚΛ ἕς τ' ἂν συμβάλῃ κατὰ τὸ Ν τῇ πρὸς τῷ Α ἀνεγερθείσῃ καθέτῳ ΑΝ· ὅθεν προκύψει ἡ ΚΝ ἴση τῇ ΚΟ, ἢ τῇ $\frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\mu}$· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΕΛ, ΚΑΝ πρόεισι ΚΕ : ΚΛ :: ΚΛ : ΚΝ, εἴτ' οὖν $\kappa : \frac{1}{2}\alpha :: \frac{1}{2}\alpha :$ $\mathrm{KN} = \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\kappa} = \mathrm{KO}$.

265. Αἱ δὲ ἐπὶ τὲς λογαρίθμυς ἀμέσως ἀναγόμεναι ποσότητες εἰσὶν, ἐν αἷς τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν, ἤται ἐςὶν, ἢ γίνεται κλάσμα, ἕ ὁ ἀριθμητὴς ἐςι τὸ ἀπειροςὸν τῦ παρονομαςῦ· ἢ γῦν τὸ ἀπειροςὸν πολλαπλασιάζεται, ἢ διαιρεῖται δὶ ἀριθμῦ ἀμεταβλήτυ.

266. **ΘΕΩΡΗΜΑ Γ.** Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἀκριβῶς ὑπάρχῃ ἀπειροςὸν τῦ παρονομαςῦ, τὸ ὁλόκληρον ἐςιν ὁ λογάριθμος τῦ παρονομαςῦ· ὕτως $O\,\frac{\delta\chi}{\chi} = \lambda.\chi + \Gamma$, ϗ $O\,\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi} = \lambda\,(\alpha+\chi) + \Gamma$, ϗ $O.\,\frac{2\alpha\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi} = \lambda\,(\alpha\alpha+\chi\chi) + \Gamma$.

267. **ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.** Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἀπειροςὸν ᾗ τῦ παρονομαςῦ, πολλαπλασιαζόμενος, ἢ διαιρύμενος, δὶ ἀριθμῦ ἀμετατρέπτυ, τὸ μὲν προκείμενον ἀπειροςὸν ἀναλύεται εἰς δύω ποιητὰς, ὧν ὁ μὲν ἐςι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ἀκριβὲς ἀπειροςὸν τῦ παρονομαςῦ, ἅτερος δὲ ἐςιν ἀριθμὸς ἀμετάτρεπτος· τὸ δὲ ὁλόκληρον ἔςαι ὁ λογάριθμος τῦ τρεπτῦ παρονομαςῦ, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀμετάτρεπτον ποιητήν. οὕτως εἰς ὁλοκλήρωσιν τῦ

$\frac{\alpha\chi^2\delta\chi}{\alpha^3+\chi^3}$, ἐπείπερ ἀπειροστὸν τοῦ $\alpha^3+\chi^3$ ἐστὶ τὸ $3\chi^2\delta\chi$, προδιαθετέον τὸ ἀπειροστὸν, ὡς εἶναι ἐν τῷ ἀριθμητῇ $3\chi^2$ $\delta\chi$· ἐπὶ δὲ τοῦτο γραπτέον $\frac{\alpha}{3}\times\frac{3\chi^2\delta\chi}{\alpha^3+\chi^3}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον $\frac{\alpha}{3}\lambda(\alpha^3+\chi^3)+\Gamma$ ὡσαύτως O $\frac{\delta\chi}{\alpha-\chi}$ O $\frac{1}{-1}$.

$\frac{-1\delta\chi}{\alpha-\chi} = -\lambda(\alpha-\chi)+\Gamma = 0-\lambda(\alpha-\chi)+\Gamma = \lambda 1-\lambda(\alpha-\chi)+\Gamma = \lambda\frac{1}{\alpha-\chi}+\Gamma.$

ὁμοίως O $\frac{\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi} = \frac{1}{2}\chi\frac{2\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi} = \frac{1}{2}\lambda(\alpha\alpha+\chi\chi)+\Gamma = \lambda\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}+\Gamma$. τέλος δὲ O $\frac{\alpha\chi^{\nu-1}\delta\chi}{\kappa+\beta\chi^{\nu}} = \mathrm{O}\ \frac{\alpha}{\beta\nu}\times\frac{\nu\beta\chi^{\nu-1}\delta\chi}{\kappa+\beta\chi^{\nu}} = \frac{\alpha}{\beta\nu}\lambda(\kappa+\beta\chi^{\nu})+\Gamma = \lambda(\kappa+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\alpha}{\beta\nu}}+\Gamma.$

268. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ζητηθήτω ἡ δύναμις τοῦ $(\alpha+\chi)$ (τοῦ α ὄντος 5, τοῦ δὲ $\chi = 2$), τοῦτ' ἔστι ζητηθήτω ὁ τοῦ 7 ἀριθμοῦ λογάριθμος· εἰλήφθω τοίνυν ἐκ τῶν κοινῶν κανονίων ὁ τοῦ 7 λογάριθμος, ὅς ἐστι 0,8450980, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ (253) 2,30258509, ἢ 2,302 5851· ὅθεν προκύψει 1,9459100, ἢ 1,94591 δύναμις τοῦ $\lambda(\alpha+\chi)$, οὗ τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, ὅταν ᾖ, α μὲν $= 5$, χ δὲ $= 2$.

269. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐνίοτε δὲ ἀπαντῶσιν ἀπει-

ρατὰ, εὐθέως διὰ τῶν λογαρίθμων ὁλοκληρούμενα, καίτοι μὴ προδιατιθέμενα, καθάπερ τὰ προδιαληφθέντα· ταὐτόν ἐστι τὸ $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}$· ἔσθ᾽ ὅτε δὲ τοῦ σκοποῦ τυγχάνομεν, μετασχηματίζοντες αὐτὰ εἰς ἀπειροστὸν λογαριθμικὸν, ἀποπειρώμενοι, εἰ πολλαπλασιάζοντες αὐτὰ ἐπὶ συνέκθεσιν τοῦ χ, ποιοῦμεν τὸ γινόμενον ἀπειροστὸν ταύτης τῆς συνεκθέσεως, ἢ αὐτὸ τὸ ἀπειροστὸν, πολλαπλασιαζόμενον, ἢ διαιρούμενον, δι᾽ ἀριθμοῦ ἀμετατρέπτου· τηνικαῦτα γὰρ διὰ τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως διαιροῦντες εὑρίσκομεν προφανῶς ἀπειροστὸν λογαριθμικόν· ταύτην οὖν τὴν θεωρίαν ἐφαρμόζοντες τῷ $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}$, πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ $\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}$, ὅθεν πρόεισι $\frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}$ $+\delta\chi$, ὅπερ ἐστὶν ἀληθῶς ἀπειροστὸν τοῦ $\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}$· ὥστε Ο $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}} =$ Ο $\frac{\delta\chi+\frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}}{\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}} = \lambda\,[\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}]+\Gamma$, εὑρεθήσεται ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(1-\chi\chi)}}$, πολλαπλασιάσασι τόν τε ἀριθμητὴν, καὶ τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ $\sqrt{(-1)}$, ὅθεν πρόεισι $\frac{\delta\chi\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(\chi\chi-1)}}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον, ὥσπερ εἴδομεν, ἐστὶ $\sqrt{(-1)}\,\lambda\,[\chi+\sqrt{(\chi\chi-1)}]+\Gamma$.

270. Τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\delta\chi}{\chi}$ δύναται εἶναι πεπερασμένον, ἢ ἄπειρον, καθ᾽ ὃ ἂν μέρος αὐτοῦ βουλομένοις ᾖ

εὑρεῖν· ἵνα δὲ τὸ πρᾶγμα ἀναπτύξωμεν, σημειωτέον, ὅτι εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\delta\chi}{\chi}$ οὐδέν ἐστιν ἄλλο, ἢ τετραγωνίσαι τὴν κωνικὴν ὑπερβολὴν, ἀναφερομένην πρὸς τὰς αὐτῆς ἀσυμπτώτους· ἡ γὰρ ταύτης τῆς καμπύλης ἐξίσωσις ἐστὶ $\chi\upsilon = \alpha\alpha$, ἢ $\chi\upsilon = 1$, ὑποτιθεμένοις, διὰ τὸ ἁπλούστερον, $\alpha = 1$· ἀλλ' ἐκ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἀποφέρεται $\upsilon = \frac{1}{\chi}$· ἄρα τὸ στοιχεῖον $\upsilon\delta\chi$ τῆς ἐπιφανείας γίνεται $\frac{\delta\chi}{\chi}$. βουλομένοις ἄρα εὑρεῖν τὰ χωρία, τὰ ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτου ΑΖ (σχ. 83), τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\delta\chi}{\chi}$, εἴτ' οὖν $\lambda\chi + \Gamma$ χρεὼν εἶναι ἴσον μηδενὶ, ὅταν τὸ σημεῖον Π πίπτῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Α, εἴτ' οὖν ὅταν ἡ $\chi = o$· ἔστιν ἄρα τηνικαῦτα $\lambda o + \Gamma = o$, καὶ ἑπομένως $\Gamma = -\lambda o$· τὸ ἄρα ὁλόκληρον ἐστὶ $\lambda\chi - \lambda o = \lambda\frac{\chi}{o}$, τοῦτ' ἔστι τὰ χωρία ΖΑΠΜΤ, τὰ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτου ἀρχόμενα, εἰσὶν ἄπειρα, τῶν Ζ, Τ περάτων ὑπάρχειν ὑποτεθέντων τῆς τε ἀσυμπτώτου καὶ τοῦ συστοιχοῦντος ὑπερβολικοῦ κλωνός.

Ἀλλ' ἐὰν, τοῦ σημείου Ο κορυφὴ ὄντος τῆς ὑπερβολῆς (ὅτε καὶ ἡ συστοιχοῦσα ἀποτετμημένη ΑΝ ἐστιν $= 1$), βουλομένοις ᾖ εὑρεῖν τὰ ἀπὸ τοῦ Ν ἀρχόμενα χωρία, τηνικαῦτα τὸ ὁλόκληρον $\lambda\chi + \Gamma$ χρεὼν γίνεσθαι μηδὲν, ὅταν τὸ Π πίπτῃ ἐπὶ τοῦ Ν σημείου, ἢ ὅταν ἡ $\chi = 1$· ἔστιν ἄρα $\lambda 1 + \Gamma = o$, καὶ ἑπομένως $\Gamma = -\lambda 1 = o$· τὰ ἄρα χωρία ΝΟΜΠ ἐκτίθενται διὰ $\lambda\chi$.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν δῆλον α. ὅτι οἱ λογάριθμοι, οἱ ἐκ τῦ λογισμῦ ἀμέσως προκύπτοντες, ἐμφαίνυσι τὰ ὑπερβολικὰ χωρία, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτυ ϗ τῆς καμπύλης, ϗ ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κορυφῆς Θ· διὰ τῦτο δὲ ϗ ὑπερβολικοὶ ἤκυσαν (47) οἱ τοιῦται λογάριθμοι· β΄. ἐὰν τὸ ὁλόκληρον τῦ $\frac{\delta\chi}{\chi} = \chi^{-1}\delta\chi$, ληφθὲν κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, ᾖ ἄπειρον, ἐμφαίνει τὰ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀσυμπτώτων ἀρχόμενα χωρία· ὀψόμεθα δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὑποδείγματα ὁλοκληρώσεως, διὰ τῶν λογαρίθμων ἐπιτηδευομένης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῦ τρόπυ, καθ' ὃν ἡ ἀπειροςῦ δυωνύμυ προκειμένυ ὁλοκλήρωσις ἀνάγεται, ὅταν ἐξῇ, εἰς ὁλοκλήρωσιν ἀπειροςῦ δυωνύμυ ἐγνωσμένυ.

272. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τὴν ὁλοκλήρωσιν ἀπειροςῦ δυωνύμυ εἰς τὴν δυωνύμυ ἀπειροςῦ γνωςῦ ὁλοκλήρωσιν τρέψαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξετάσαντες τὸ προτεθὲν ἀπειροςὸν (207, 209) εἰ εἴη ὁλοκληρώσιμον, ϗ τοιῦτο μὴ εὑρόντες, τὰς τῆς προσεγγίσεως μεθόδυς, περὶ ὧν διείληπται (241, κ.τ.λ.), ἀφέντες, ἐρευνήσωμεν, εἰ τὸ προτεθὲν ἀπειροςὸν ἀναχθῆναι ἔχοι εἰς ἀπειροςὸν δυώνυμον ἁπλύςερον, ὑπερ ἤδη ἔγνωςαι ἡ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκλήρωσις· τῆς δὲ τοιαύτης ἀναγωγῆς χαρακτῆρες, αἱ ἐφεξῆς.