ἐπιμήκης ἔςι πρὸς τὴν ἐκτενῆ :: $\frac{\pi\alpha\beta\beta}{12\eta} : \frac{\pi\alpha\alpha\beta}{12\eta}$ :: β : α, ὥσπερ ὁ ἐλάσσων πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα.

237. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.** Κυβίσαι κωνοΐδα, ἀπογεγεννωμένην ὑπὸ ἡμιπαραβολῆς ΑΜ, περιενεχθέντος περὶ τὴν αὐτῆ ἀπτομένην ΑΒ (σχ. 76).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ παράμετρος = α, ϗ Αι = Ζν = χ, ϗ ιν = ΑΖ = υ, ϗ ΖΒ = δυ· οὐκοῦν κύκλος ὁ ἀκτῖνι τῇ ΖΝ γεγραμμένος ἔςαι = $\frac{\pi\cdot\chi\chi}{2\eta}$, ὅς τις, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ δυ ἀποδώσει τὸ ςοιχεῖον, τὸ ἀπογεγεννημένον ὑπὸ τῆ ἐπιπέδε ΒΜΖν = $\frac{\pi\chi^2\delta\upsilon}{2\eta} = \frac{\pi\upsilon^4\delta\upsilon}{2\alpha^2\eta}$ (ὅτι $\chi^2 = \frac{\upsilon^4}{\alpha\alpha}$, πηγάζον ἐκ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην φύσεως·) ὃ τὸ ὁλόκληρόν ἐςι $\frac{\pi\upsilon^5}{10\alpha^2\eta} = \frac{\pi\alpha^2\chi^2\upsilon}{10\alpha^2\eta} = \frac{\pi\chi^2\upsilon}{10\cdot\eta}$, τιθεμένε τῆ $\alpha^2\chi^2$ ἀντὶ υ^4· ἐὰν ὑποτεθῇ χ = ΑΠ = β, ϗ ΠΜ = υ = ϑ, ἡ ἐκ τῆ ἐπιπέδε ΑΜΒ ἀπογεννηθεῖσα κωνοῒς ἔςαι = $\frac{\pi\beta^2\vartheta}{10\eta}$· ἀλλὰ κύκλος, ὃ ἡ ἀκτὶς = β, ἔςιν = $\frac{\pi\beta^2}{2\eta}$· ἐὰν αὕτη ἡ ποσότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ϑ, πορισθήσεται κύλινδρος ὁ $\frac{\pi\beta^2\vartheta}{2\eta}$, ὃς ἔςαι πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν κωνοΐδα :: $\frac{\pi\beta^2\vartheta}{2\eta} : \frac{\pi\beta^2\vartheta}{10\eta}$

$:: \frac{1}{2\eta} : \frac{1}{10\eta} :: 10\eta : 2\eta :: 10 : 2 :: 5 : 1$· ῥᾶςα δ' ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι κωνοῖς ἡ ἀπογεννηθεῖσα ἐκ τοῦ ἐπιπέδου ΑΠΜ ἐςὶν $= \frac{2\pi\beta^2\vartheta}{5\eta}$, ὃ δὴ ἀκριβῶς συνᾴδει τοῖς προαποδεδειγμένοις (234).

238. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'.** Κυβίσαι κωνοῖδα ὑπερβολικὴν, ἀπογεννωμένην ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣΡμκ ἐν τῷ τὴν κυκλικὴν ὑπερβολὴν ΖΜΣ περιάγεσθαι περὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΑΡ (σχ. 77).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἐξίσωσις τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς ἡ $\upsilon\chi = \alpha^2$, καὶ ὑποτεθείσθω ΑΡ = ΡΣ = α· οὐκοῦν ἔςαι $\upsilon^2 = \frac{\alpha^4}{\chi\chi}$· ἄρα $\frac{\pi}{2\eta} \times \text{O}\,\upsilon^2\delta\chi = \frac{\pi}{2\eta}.\text{O}\frac{\alpha^4}{\chi^2}\delta\chi = \frac{\pi}{2\eta}$. $\text{O}\,\alpha^4 \chi^{-2}\delta\chi = -\frac{\pi}{2\eta}\alpha^4\chi^{-1} + \Gamma$· ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάβλητος Γ, σημειωτέον, ὅτι τὸ ζητούμενον ςερεὸν ὀφείλει ὑπάρχειν = o, ὅταν ᾖ $\chi = \text{ΑΡ} = \alpha$· ἄρα $-\frac{\pi}{2\eta}\alpha^3 + \Gamma = 0$, καὶ $\Gamma = +\frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$· τὸ δὲ πλῆρες ὁλόκληρον ἔςαι $= \frac{\pi\alpha^3}{2\eta} - \frac{\pi\alpha^4}{2\eta\chi}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\chi = \infty$, τὸ ςερεὸν γίνεται $=\frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$· ἀλλὰ $\frac{\pi\alpha^2}{2\eta}$ παρίςησι κύκλον, οὗ ἡ ἀκτὶς = α, καὶ $\frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$ κύλινδρον, οὗ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως ἐςὶν = α, τὸ δὲ ὕψος καὶ αὐτὸ = α, ἢ κύλινδρον γεγραμμένον ἐκ τῆς τοῦ ΑΡΣΤ ἐπιπέδου περὶ τὴν

ΑΓ εὐθεῖαν περιαγωγῆς· ἄρα ὁ κύλινδρος οὗτος ἴσος ἐςὶ τῇ ἀπειρομήκει κωνοΐδι τῇ γεγραμμένῃ ΡΣΜκ (*).

239. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄. Εὑρεῖν τὴν ςερεότητα τμήματος κυλινδρικοῦ τοῦ ΑΔΒΕ, τοῦ ἀπογεννωμένου, εἰ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΔΑΒ, πλαγίῳ τῇ τοῦ κυλίνδρου βάσει, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς διήκοντι, τμηθείη (σχ. 78.)

ΛΥΣΙΣ. Ἐπινενοήσθω τὸ ςερεὸν τοῦτο τετμημέναι ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων, ἔγγιςα ἀλλήλοις, καὶ καθέτων τῇ βάσει ΑΕΒ (σχ. 79), αἱ τοίνυν τομαὶ ἔσονται τρίγωνα ὅμοια, κάθετα τῇ τοῦ τμήματος βάσει, εἴγε αἱ αὐτῶν γωνίαι, κείμεναι ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καθέτου τῇ ΕΚ, ἔσονται ἴσαι· καὶ ἑπομένως ἔσονται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· οὖν κληθείσης η τῆς ἀκτῖνος ΚΕ τῆς βάσεως, καὶ ι τοῦ ὕψους ΔΕ, καὶ υ τῆς ΠΜ βάσεως τοῦ τριγώνου ΠΜΝ, ποριωθήσεται ΚΕΔ : ΠΜΝ :: ηη : υυ· ἀλλὰ ΚΕΔ $= \frac{\eta\iota}{2}$· ἄρα ΠΜΝ $\frac{\eta\iota\upsilon\upsilon}{2\eta\eta} = \frac{\iota\upsilon\upsilon}{2\eta}$· κληθείσης ἄρα τῆς ΑΠ $= \chi$, ἔςαι τὸ πάχος Ππ τῆς ὑπὸ δύω προσεχῶν ἐπιπέδων ἀπολαμβανομένης ςιβάδος, $= \delta\chi$· αὐτὴ δὲ ἡ ςιβὰς $= \frac{\iota\upsilon\upsilon\delta\chi}{2\eta}$· ἀλλὰ υ ἐςὶν ἡ τεταγμένη τοῦ εἰς βάσιν ὑποκειμένου κύκλου, καὶ ἐν αὐτῷ ἐςὶν ἑπομένως $\upsilon\upsilon = 2\eta\chi - \chi\chi$· ἡ ἄρα ςοιχειώδης ςι-

---

(*) Περὶ τοῦ ἐξαισίου τούτου ἰδιώματος τῆς ὑπερβολῆς, ὅρα καὶ Νικηφ. Θεοτ. Στοιχ. Μαθημ. τόμ. Β. Σελ. 208. εὑρετὴς δὲ τούτου ἐγένετο ὁ ἐκ Φαένσης Τορικέλλιος ὁ τοῦ Γαλιλαίου ἀκροατὴς, ὁ κατὰ τὸ 1647 ἔτος τὸν βίον μεταλλάξας.

δὰς γίνεται $\frac{\upsilon\delta\chi.(2\eta\chi-\chi\chi)}{2\eta}$, ἢ $\frac{\upsilon}{2\eta}$. $(2\eta\chi\delta\chi-\chi\chi\delta\chi)$, ἒ τὸ ὁλόκληρον, τῦ ςερεῦ ἀπὸ τῦ Α ἀρχομένε, ἔςιν $\frac{\upsilon}{2\eta}(\eta\chi^2-\frac{\chi^3}{3})$. εἰς ἄρα εὕρεσιν ὅλε τῦ ςερεῦ ὑποτεθείσθω $\chi=2\eta$. ὅθεν πρόεισιν $\frac{\upsilon}{2\eta}\times(4\eta^3-\frac{8\eta^3}{3})$ εἴτ' ἒν $\frac{2}{3}\upsilon\eta^3=\frac{\upsilon\eta}{2}\times\frac{4}{3}\eta=$ ΚΕΔ $\times\frac{2}{3}$ ΑΚ $=$ ΚΕΔ $\times\frac{2}{3}$ ΑΒ, τῦτ' ἔςι δυσὶ τριτημορίοις τῦ πρίσματος, ἒ βάσις μὲν τὸ τρίγωνον ΚΕΔ, ὕψος δὲ ἡ διάμετρος ΑΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως ποσοτήτων, αἷς ἐνυπάρχεσιν ἡμίτονα ϗ συνημίτονα.

240. Ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν, αἷς ἔνεςιν ἡμίτονα ϗ συνημίτονα, ποσοτήτων ἐπερείδεται ὅλως τοῖς ἀποδοθεῖσι (35) περὶ τῆς λήψεως τῶν κατ' αὐτὰς ἀπειροςῶν· εἴδομεν ἒν ἐκεῖθι, ὅτι δ(ημ. ψ) $=$ δψ. συνημ. ψ, ϗ δ (συνημ. ψ) $=-$ δψ. ἡμ. ψ. ἐναλλὰξ ἄρα, τὸ ὁλόκληρον τῦ δψ. συνημ. ψ ἔςαι ἡμ. ψ, ἢ γενικώτερον ἡμ. ψ $+$ Γ, ὃ ϗ αὐτὸ ἔχει τὸ προτεθὲν ἀπειροςόν· ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τῦ $-$ δ. ψ. ἡμ. ψ. ἔςαι συνημ ψ $+$ Γ· εἰς ταύτας δὲ τὰς δύω περιπτώσεις ἀνάγεται ἡ ὁλοκλήρωσις πασῶν τῶν ἄλλων ποσοτήτων, αἳ σύγκεινται ἐξ ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων, διατηρῦσι ϗ τὲς ἐς δεῦρο ἀποδοθέντας γενικὲς κανόνας τῆς ὁλοκληρώσεως.

Τὸ τοίνυν ὀλόκληρον τȣ̃ δψ συνημ. 3 ψ, εἴτ' οὖν $\frac{3\,\delta\psi\ \text{συνημ.}\ 3\psi}{3}$, ἔςαι $\frac{\text{ἡμ.}\ 3\psi}{3} + \Gamma$· ὡσαύτως τὸ ὀλόκληρον τȣ̃ δψ. ἡμ. 3ψ εὑρεθήσεται, γραφέντος $\frac{-3\,\delta\psi.\ \text{ἡμ.}\ 3\psi}{-3}$, ȣ̃ ὀλόκληρον ἔςαι τὸ $\frac{\text{συνημ.}\ 3\psi}{-3} + \Gamma$.

Ἐν γένει δὲ, Οδψ.ἡμ· μψ (τȣ̃ μ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ἄτρεπτον) μεταβάλλει εἰς $\frac{\text{Ο} - \mu\delta\psi.\ \text{ἡμ.}\ \mu\psi}{-\mu}$, ȣ̃ ἀποκαθίςαται $\frac{-\text{συνημ.}\ \mu\psi}{\mu} + \Gamma$.

Ἐὰν δὲ προκέηται $(\text{ἡμ.}\ \psi)^{\nu}\ \delta\psi.\ \text{συνημ.}\ \psi$, παρατηρητέον ὡς αὕτη ἡ ποσότης ταυτίζεται τῇ $(\text{ἡμ.}\ \psi)^{\nu}\ \delta\ (\text{ἡμ.}\ \psi)$· ἀλλ' ἐκληφθεῖσαν τὴν ἡμ. ψ ὡς ἁπλῶς τρεπτὴν ποσότητα ὀλοκληρώσαντες διὰ τȣ̃ γενικȣ̃ κανόνος, ἕξομεν $\frac{(\text{ἡμ.}\ \psi.)^{\nu+1}}{\nu+1} + \Gamma$.

Ἐὰν ᾖ τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν $(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)^{\nu}\ \delta\psi.$ συνημ. μψ, γραπτέον αὐτὸ $\frac{(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)^{\nu}\ \mu\delta.\psi\ \text{συνημ.}\ \mu\psi}{\mu}$, ὅπερ ταυτίζεται τῷ $\frac{(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)^{\nu}\ \delta(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)}{\mu}$, ȣ̃ ὀλόκληρόν ἐςι τὸ $\frac{(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)^{\nu+1}}{\mu(\nu+1)}$.

Ὡσαύτως, ἵν' ὀλοκληρωθῇ τὸ $(\text{συνημ.}\ \mu\psi)^{\nu}\ \delta\psi$ ἡμ. μψ, γραπτέον $\frac{(\text{συνημ.}\ \mu\psi)^{\nu}. - \mu\delta\psi.\ \text{ἡμ.}\ \mu\psi}{-\mu}$, ȣ̃περ ὀλόκληρόν ἐςι τὸ $\frac{(\text{συνημ.}\ \mu\psi)^{\nu+1}}{-\mu(\nu+1)} + \Gamma$.

Ἐὰν δὲ προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν δψ ἡμ. πψ. συνημ. κψ, ἀναμνηςέον (Γεωμ. 507) ὅτι α, β δυεῖν οἱωνδήποτε γωνιῶν ἐσῶν, ἐςὶν ἡμ $(\alpha+\beta)=$ ἡμ. α. συνημ. β $+$ ἡμ. β. συνημ. α· κ̀ ἡμ $(\alpha-\beta)=$ ἡμ. α. συνημ. β $-$ ἡμ. β. συνημ. α· ὅθεν συνάγεται ἡμ. α συνημ. β $=\frac{1}{2}$ ἡμ. $(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}$ ἡμ. $(\alpha-\beta)$. ὡσαύτως ἐπεί (Γεωμετ. 508) ἐςὶ συνημ. $(\alpha+\beta)$ συνημ. α. συνημ. β $-$ ἡμ. α. ἡμ. β· κ̀ συνημ. $(\alpha-\beta)=$ συνημ. α. συνημ. β $+$ ἡμ. α. ἡμ. β, πορισθήσεται συνημ. α $\times$ συνημ. β $=\frac{1}{2}$ συνημ. $(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}$ συνημ. $(\alpha-\beta)$, κ̀ ἡμ. α $\times$ ἡμ. β $=\frac{1}{2}$ συνημ. $(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}$ συνημ. $(\alpha+\beta)$.

Ἐκ τούτων τοίνυν τῶν ἀρχῶν τραπείη ἂν τὸ ἡμ. πψ $\times$ συνημ. κψ εἰς $\frac{1}{2}$ ἡμ. $(\pi\psi+\kappa\psi)+\frac{1}{2}$ ἡμ. $(\pi\psi-\kappa\psi)=\frac{1}{2}$ ἡμ. $(\pi+\kappa)\psi+\frac{1}{2}$ ἡμ. $(\pi-\kappa)\psi$· ἐκεῖν ὁλοκληρωτέον ἔςαι τὸ $\frac{1}{2}$ δψ ἡμ. $(\pi+\kappa)\psi+\frac{1}{2}$ δψ ἡμ. $(\pi-\kappa)\psi$, ὅτινος, γραφέντος οὕτω, $\frac{1}{2}$

$$\frac{(\pi+\kappa)\,\delta\psi\times \text{ἡμ.}\,(\pi+\kappa)}{\pi+\kappa}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{(\pi-\kappa)\,\delta\psi\times \text{ἡμ.}\,(\pi-\kappa)\psi}{(\pi-\kappa)},$$ ὁλόκληρον προδήλως ἐςὶ τὸ $$\frac{-\frac{1}{2}\ \text{συνημ.}\,(\pi+\kappa)\,\psi}{\pi+\kappa}-\frac{\frac{1}{2}\,\text{συνημ.}\,(\pi-\kappa)\psi}{\pi-\kappa}+\Gamma.$$

Ὁλοκληρωθήσεται ὡσαύτως τὸ δψ. ἡμ. πψ συνημ. κψ. ἡμ. ρψ κτ, μετατρεπομένων τῶν δε τῶν γινομένων εἰς ἡμίτονα, ἢ συνημίτονα, τοῦ ἀθροίσματος, ἢ τῆς διαφορᾶς, τῶν τόξων πψ, κψ, ρψ κτ διὰ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν.

Ἐὰν προτεθῇ δψ (ἡμ. ψ)^3, μεταβαλεῖ εἰς δψ. ἡμ. ψ (ἡμ. ψ)^2· ἀλλὰ (ἡμ. ψ)^2, ἢ ἡμ. ψ $\times$ ἡμ. ψ ἐςι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν, $=\frac{1}{2}$ συνημ. $(\psi-\psi)-\frac{1}{2}$

συνημ. $(\psi + \psi) = \frac{1}{2}$ συνημ. $0 - \frac{1}{2}$ συνημ. $2\psi = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$ συνημ. 2ψ, εἰ συνημ. $0 = 1$· ἄρα ἡμ. ψ (ἡμ. $\psi)^2 = \frac{1}{2}$ ἡμ. $\psi - \frac{1}{2}$ ἡμ. $\psi \times$ συνημ. 2ψ. ἄρα $\delta\psi$ (ἡμ. $\psi)^3 = \frac{1}{2}\,\delta\psi$. ἡμ. $\psi - \frac{1}{2}\,\delta\psi$. ἡμ. ψ. συνημ. 2ψ. γενήσεται ἄρα ἡμ. ψ. συνημ. 2ψ, ὥσπερ γέγονε ϗ ἐπὶ τῦ ἡμ. $\pi\psi$. συνημ. $\kappa\psi$, ϗ εὐπετῶς ὁλοκληρωθήσεται· δῆλον ἄρα, ὅπως ὁλοκληρωθήσεται τὸ $\delta\psi$ (ἡμ. $\psi)^\nu$, τῦ ν ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ ὑπαρκτικὸν ἐμφαίνοντος· κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ϗ τὸ $\delta\psi$ (συνημ $\psi)^\nu$· δυνατὸν ἄρα διὰ τῶν ἐκτεθειμένων τῶνδε ἀρχῶν ὁλοκληρῶσαι καὶ τὰς τοιυτώδεις ποσότητας $\delta\psi$ (ἡμ. $\pi\psi)^\mu$ (συνημ. $\kappa\psi)^\nu$ (ἡμ. $\rho\psi)^\sigma$ κτ. τῶν μ, ν, σ ἀριθμὺς ὁλοσχερεῖς ὑπαρκτικὺς ἐμφαινόντων.

Τελευταῖον δὲ, διὰ τῶν ἀρχῶν τύτων, ϗ τῶν προαποδεδομένων εἰς ὁλοκλήρωσιν κανόνων, ὁλοκληρωθήσεται ἅπαν ἀπειροςὸν, ἡμίτονα ϗ συνημίτονα περιέχον, ὅταν ὑπάρχῃ γεωμετρικῆς ὁλοκληρώσεως ἐπιδεκτικόν· ἀλλὰ ϗ ὅταν ἁπτομένας περιέχῃ, ἀναχθήσεται εἰς τὰ ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων περιεκτικὰ, παρατηρῦσι μόνον, ὅτι απ. $\psi = \frac{\text{ἡμ. } \psi}{\text{συνημ. } \psi}$ (Γεωμ. 502).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῦ τρόπυ τῦ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκληρῦν, καὶ τινων αὐτῦ χρήσεων.

241. Τὰς μωνωνύμυς τῶν ἀπειροςῶν ποσοτήτων ὐδὲ λόγυ ἀξιῦμεν ἐνταῦθα, ὡς μαλ' εὐπετῶς ἀεὶ, ὡς εἴδομεν, ὁλοκληρυμένας· μόνας δέται τὰς πολυωνύμυς κατὰ τὰ ἐφεξῆς ἡμῖν ἀπαντήσοντα ὑποδείγματα.

Ἡ δὲ τέχνη τοῦ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκληροῦν ἐν τῷ μεταβάλλειν κεῖται τὴν προτιθεμένην ποσότητα εἰς σειρὰν μονωνύμων, ὧν ἡ δύναμις προϊοῦσα ἀπομειοῦται· ἑκάστου γὰρ ὅρου τηνικαῦτα εὐχερῶς ὁλοκληρουμένου, ἀπόχρη λαβεῖν αὐτῶν ἱκανούς τινας, ὅσους ἐμφαίνειν παρὰ μικρὸν ἅπασαν τὴν τοῦ ὁλοκλήρου δύναμιν.

242. Οὓς δ' ἀπεδώκαμεν κανόνας (Συμ. Λ. 152) τοῦ πᾶσαν ποσότητα εἰς βαθμὸν τὸν προκείμενον αἴρειν, τῷ αὐτῷ κἀνταῦθα χρησόμεθα εἰς τὴν διὰ προσεγγίσεως ὁλοκλήρωσιν.

243. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὐθύναι τὸ κυκλικὸν τόξον ΑΜ διὰ τοῦ αὐτοῦ παρημιτόνου ΑΠ (Σχ. 73).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω τόξον ἐλάχιστον τὸ Μμ· ἀχθείσης οὖν τῆς Μρ παραλλήλου τῇ ΑΠ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ἀκτῖνος ΚΜ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΠΜ, Μρμ, ἔσται ΠΜ : ΚΜ :: Μρ : Μμ· ἀλλὰ γὰρ κληθείσης, τῆς μὲν ΑΠ $= \chi$, τῆς δὲ διαμέτρου ΑΒ $= \alpha$, ἢ $= 1$ (διὰ τὸ ἁπλούστερον), πορισθήσεται Μρ $= \delta\chi$, καὶ ΚΜ $= \frac{1}{2}$, καὶ ΠΜ $= \sqrt{(\chi - \chi\chi)}$· ἄρα $\sqrt{(\chi - \chi\chi)} : \frac{1}{2} :: \delta\chi :$ Μμ $= \dfrac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\sqrt{(\chi - \chi\chi)}}$, καὶ ἑπομένως ΑΜ $= \mathrm{O}\dfrac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\sqrt{(\chi - \chi\chi)}}$· αὕτη δὲ ἡ ποσότης ὁλοκλήρωσιν οὐκ ἐπιδέχεται διὰ τῶν προαποδεδομένων κανόνων· διὸ δὴ μεταβλητέον αὐτὴν εἰς

$$\mathrm{O}\frac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\chi^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-\alpha)}},\ \text{ἔπειτα εἰς}\ \mathrm{O}\,\tfrac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi(1-\chi)^{-\frac{1}{2}}.$$

τὸ δὲ $(1-\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἀνακτέον (Συμβ. Λογ. 149) εἰς σειράν· ὅθεν δι' ἀναγωγῆς εὑρεθήσεται $(1-\chi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\chi + \frac{3}{8}\chi^2 + \frac{5}{16}\chi^3 +$ κτ.· ἄρα $\mathrm{O}\,\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi\,(1-\chi)^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{O}\,\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi\,(1 + \frac{1}{2}\chi + \frac{3}{8}\chi^2 + \frac{5}{16}$

$\chi^3 + \text{κτ.}) = \int (\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi + \frac{1}{4}\chi^{\frac{1}{2}}\delta\chi + \frac{3}{16}\chi^{\frac{3}{2}}\delta\chi + \frac{5}{32}\chi^{\frac{5}{2}}\delta\chi + \text{κτ.}) = \frac{\frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\chi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16}\chi^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32}\chi^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \text{κτ.} = \chi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\chi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}\chi^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}\chi^{\frac{7}{2}} +$ κτ., ποσότης, ᾗ ὐδὲν ἐςὶ προςθεῖναι ποσὸν ἄτρεπτον, εἴγε, ὅταν ἡ $\chi = 0$, ϗ αὕτη φέρεται εἰς 0, ὥσπερ ϗ ἔχειν ἐπάναγκες, ὅτι τὸ ἐμφαινόμενον ὑπ' αὐτῆς τόξον AM τηνικαῦτα ὑπάρχει μηδέν.

Δυνατὸν δὲ, διὰ τὸν κοινὸν πολλαπλασιαςὴν $\chi^{\frac{1}{2}}$, μετασχηματίσαι τὴν τῦ AM τόξυ ἔκθεσιν εἰς τήνδε $\chi^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{6}\chi + \frac{3}{40}\chi^2 + \frac{5}{112}\chi^3 + \text{κτ.})$· τὸ δὲ παρημίτονον χ, ἀεὶ ἔλαττον ὂν τῆς διαμέτρυ 1 (πλὴν εἰ ζητοῖτο ἡ τῆς ἡμιπεριφερείας εὔθυνσις), ἀεί ἐςι κλάσμα, ϗ ἐπομένως αἱ δυνάμεις τῶν τῆς σειρᾶς ὅρων ἀπομειωθήσονται τοσύτῳ μᾶλλον, ὅσῳ τὸ παρημίτονον τῦ ζητυμένυ τόξυ ὑπάρχει ἔλαττον· θηρευομένοις ὖν, φέρ' εἰπεῖν, τὸ μῆκος τόξυ, ῦ τὸ παρημίτονον ἑκατοςημόριον ἂν εἴη τῆς διαμέτρυ, ἔςαι $\chi = \frac{1}{100} = 0{,}01$, ϗ ἐπομένως $\chi^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$· εὑρεθήσεται ἄρα τῦ τόξυ τῦδε δύναμις ἡ $0{,}1\left[1 + \frac{0{,}01}{6} + \frac{3(0{,}01)^2}{40} + \frac{5}{112}(0{,}01)^3\right]$· ϗ ἐπείπερ ὁ ἐφεξῆς ὅρος ταύτης τῆς σειρᾶς ἑκατοντάκις ἐλάττων ἐςὶ τῦ ἐσχάτυ τῶν ἐκτεθέντων (ἕκαςος γὰρ ἑκατοςημόριόν ἐςι τῦ ἡγησαμένυ, ἐξετάσασιν, ἥτις ἐςὶν ἡ δύναμις τῦ ὅρυ $\frac{5}{112}(0{,}01)^3$), ἐξέςαι λαβεῖν αὐτῦ τὸ ἑκατοςημόριον, ϗ γνῶναι τὴν ἀκρίβειαν τῆς τῦ τόξυ δυνάμεως, ἐκδηλυμένης διὰ τῶν τεσσάρων ἀρκτικῶν ὅρων· ἀλλὰ $\frac{1}{112}(0,01)^3 = \frac{1}{112}(0,000001) = \frac{0,000005}{112}$ $= 0,0000044б$, ὅπερ ἑκατοςημόριόν ἐςι τὸ $0,00000\,0000446$· δυνατὸν ἄρα ἀδεῶς ἐκτιμῆσαι ἕκαςον ὅρον τῆς καθ' ἡμᾶς ταύτης σειρᾶς ἕως δεκαδικῶν 10, μηδόλως διςάσαντας, μὴ ἡ ἐντεῦθεν προϊῦσα τῦ τόξυ δύναμις ἐλλειπὴς τῦ ἀληθῦς εἴη μονάδι κατὰ τὸν ἔννατον χῶρον· ὄντως ἔξομεν, $\frac{1}{112}(0,01)^3 = 0,000000044б$, $\frac{1}{6}$ τῦ

$$(0,01)^3 = 0,0000075000,\ \frac{0,01}{6} = 0,0016666666\cdot$$

ἄρα τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς ἔςαι $0,1\,(1,0016742112)$, ἢ τελευταῖον (ἀρκεσθεῖσιν ἐννέα δεκαδικοῖς) $0,100167\,421$· ἀδεῶς δ' ἂν εὑρεθείη καὶ ὁ δέκατος ὅρος· τοιαύτη ἄρα ἐςὶν ἡ δύναμις τῦ τόξυ, καὶ τὸ παρημίτονον ἑκατοςημόριόν ἐςι τῆς ἀκτῖνος.

244. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰ τοίνυν ἐγινώσκομεν, ὁσάκις ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τῦδε τῦ τόξυ ἐμπεριέχοιτο ταῖς 360°, πολλαπλασιάσαντες τόδε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸν, ὁσάκις ἐμπεριέχονται αἱ μοῖραι τῦ τόξυ ταῖς 360°, ἐμφαίνοντα ἀριθμὸν, εὑρίσκομεν ἂν τὸ προσεχὲς τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ μῆκος· ἀγνοεῖται μέντοι ὁ λόγος ὗτος.

245. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπειδὴ (Γεωμ. 495) τὸ ἡμίτονον τῦ 30° ἥμισύ ἐςι τῆς ἀκτῖνος· γινωσκομένυ δὲ τῦ ἡμιτόνυ εὐχερῶς εὑρίσκεται τὸ παρημίτονον (Γεωμ. 494)· δυνατὸν ἄρα λαβεῖν ἐν τῷ λογισμῷ τὸ παρημίτονον τῦ 30°, καὶ ἀντὶ χ ἀντικαταςῆσαι ἐπὶ τῆς εἰρημένης σειρᾶς· πολλαπλασιάσαντας δὲ τὸ ἀποτελεσθὲν ἐπὶ 12, ὃς ἐμφαίνει ὁσάκις τὸ 30° ἔνεςι ταῖς 360°, εὑρεῖν τὸ τῇ κυκλι-

κῇ περιφερείᾳ προσεχὲς μῆκος· ἀλλ' ἐπείπερ ἡ σειρὰ βραχύτι συγκλίνει, ὡς δεῖσθαι πολλῶν ὅρων εἰς εὕρεσιν τοῦ ἔγγιον τῇ περιφερείᾳ μήκους, χρησόμεθα πρὸς τοῦτο μεθόδῳ ἑτέρᾳ διὰ τοῦ ἐφεξῆς προβλήματος.

246. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Κύκλου τόξου δοθὲν ἑτέρῳ λόγῳ εὐθύναι (σχ. 80).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν, ἥτε ἁπτομένη ΑΝ, καὶ ἡ τέμνουσα ΚΜΝ, καὶ αὐτῇ προσεχεστάτη τέμνουσα ἡ Κμν, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΝ, γεγράφθω τόξον ἐλάχιστον τὸ Νρ, ὅπερ ἂν ἐκληφθείη ὡς κάθετος τῇ Κν· οὐκοῦν τὸ τριγωνίδιον Νρν ὅμοιον ἔσται τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΚΑν· παρὰ γὰρ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, κοινὴν ἔχουσι τὴν πρὸς τῷ ν· ἔσται ἄρα ὅμοιον καὶ τῷ τριγώνῳ ΚΑΝ, τῷ ἐλάχιστα διενηνοχότι τοῦ ΚΑν· ἄρα $KN : KA :: N\nu : N\rho = \frac{KA \times N\nu}{KN}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τομέων ΚΝρ, ΚΜμ, ἔστι $KN : KM$, ἢ $KA :: N\rho = \frac{KA \times N\nu}{KN} : M\mu = \frac{KA^2 \times N\nu}{KN^2}$· ληφθέντος οὖν τοῦ $AN = \chi$, καὶ τῆς ἀκτῖνος $KA = \alpha$, ἔσται $N\nu = \delta\chi$, καὶ $KN = \sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)}$· ἄρα ἡ τοῦ Μμ δύναμις γενήσεται $\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$· ἄρα $OM\mu = AM = O.\ \frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$· αὕτη οὖν ἡ ποσότης ἀκριβῶς οὐχ ὁλοκληροῦται· ἵνα δὲ ὡς ἔγγιστα τοῦτο γένηται, μεταχηματιστέον αὐτὴν εἰς τὴν $O.\,\alpha\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$· καὶ δὴ εὑρεθείσης (Συμβ. Λογ. 149, 548) τῆς $(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1} =$

$\alpha^{-2}\left(1 - \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} - \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\alpha^8} - \text{κτ.}\right)$, ποριωθήσεται $\mathrm{O}.\,\alpha\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1} = \mathrm{O}.\,\delta\chi\left(1 - \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} - \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\chi^8} - \text{κτ.}\right) = \mathrm{O}.\left(\delta\chi - \frac{\chi^2\delta\psi}{\alpha^2} + \frac{\chi^4\delta\chi}{\alpha^4} - \frac{\chi^6\delta\chi}{\alpha^6} + \frac{\chi^8\delta\chi}{\alpha^8} - \text{κτ.}\right) = \chi - \frac{\chi^3}{3\alpha^2} + \frac{\chi^5}{5\alpha^4} - \frac{\chi^7}{7\alpha^6} + \frac{\chi^9}{9\alpha^8} - \text{κτ.}) = \chi\left(1 - \frac{\chi^2}{3\alpha^2} + \frac{\chi^4}{5\alpha^4} - \frac{\chi^6}{7\alpha^6} - \frac{\chi^8}{9\alpha^8} - \text{κτ.}\right)$. Λοιπὸν ἓν ἐστιν εἰδέναι, εἰ τόξον ἐγνωσμένον, ὁσάκις ἐμπεριέχεται τῇ περιφερείᾳ, ἔχει γνωστὴν ἁπτομένην· ἀλλὰ τὸ 45° τόξον, ὀκτάκις ἐμπεριεχόμενον τῇ περιφερείᾳ, ἁπτομένην ἔχει τῇ ἀκτῖνι ἴσην (Γεωμ. 498)· ὑποτεθέντος ἄρα τοῦ $\chi = \alpha$, τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου ἐμφαίνει ἡ σειρὰ $\alpha.(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{κτ.})$· ἀλλ' ἐπείπερ οἱ ὅροι ταύτης τῆς σειρᾶς πάνυ βραδέως ἀπομειοῦνται, σκεπτέον, εἰ ἄρα δυναίμεθα τὸ 45° τόξον ἀναλῦσαι εἰς δύο ἕτερα, ὧν εἶεν αἱ ἁπτόμεναι γνωσταί· οὐδὲν δὲ ὅλως συμφέρει εἰδέναι τὸν τῶν μοιρῶν ἑκατέρου τούτων ἀριθμὸν, εἰ μόνον ἄμφω 45° πληροῦσιν· διὰ γὰρ τῶν αὐτῶν ἁπτομένων εὑρεθέντων τῶν κατ' αὐτὰ μήκεων, συνάψαντες αὐτὰ, ἕξομεν τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου· ἐπεὶ δὲ ἑκάτερον ἔλαττον ἔσται τοῦ 45°, ἑκατέρα τῶν αὐτῶν ἁπτομένων ἐλάττων ἔσται τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἡ σειρὰ συγκλινεῖ τάχιον, καὶ ὁ λογισμὸς τελεσθήσεται ῥᾷον.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα (Γεωμ. 502) παρέχεται ἡμῖν τὴν μέθοδον τοῦ εὑρεῖν δύω τοιάδε τόξα· ϗ γὰρ ὁποιωνοῦν ὄντων δύω τόξων τῶν α, β, ἔςαι $\text{απ.}\,(α+β) =$

$$\frac{\text{ημ.}\,(α+β)}{\text{συνημ.}\,(α+β)} = \frac{\text{ημ.}\,α \times \text{συνημ.}\,β + \text{ημ.}\,β \times \text{συνημ.}\,α}{\text{συνημ.}\,α \times \text{συνημ.}\,β - \text{ημ.}\,β \times \text{ημ.}\,α}$$

(Γεωμ. 507, 508)· ἄρα διαιρεθέντος τούτου τοῦ τύπου ἄνω ϗ κάτω διὰ $\text{συνημ.}\,α \times \text{συνημ.}\,β$ εὑρεθήσεται $\text{απ.}\,(α+β) =$

$$\frac{\frac{\text{ημ.}\,α}{\text{συνημ.}\,α} + \frac{\text{ημ.}\,β}{\text{συνημ.}\,β}}{1 - \frac{\text{ημ.}\,α \times \text{ημ.}\,β.}{\text{συνημ.}\,α \times \text{συνημ.}\,β}},$$

τοῦτ' ἐςὶν $\text{απ.}\,(α+β) = \frac{\text{απ.}\,α + \text{απ.}\,β}{1 - \text{απ.}\,α + \text{απ.}\,β}$· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ $α+β = 45°$, ὅτε ϗ $\text{απ.}\,(α+β) = 1$, ἔςαι $\frac{\text{απ.}\,α + \text{απ.}\,β}{1 - \text{απ.}\,α + \text{απ.}\,β} = 1$, ὅθεν διὰ τῶν κοινῶν κανόνων ἀποφέρεται $\text{απ.}\,β = \frac{1 - \text{απ.}\,α}{1 + \text{απ.}\,α}$.

εἰλήφθω τοίνυν $\text{απ.}\,α = \frac{1}{2}$, ϗ δὴ ἕξομεν $\text{απ.}\,β = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$· λογιςέον ἄρα διὰ τῆς εἰρημένης σειρᾶς τὸ μῆκος τόξου, οὗ ἡ ἀπτομένη $χ = \frac{α}{2}$, εἴτ' οὖν τῆς ἀκτῖνος ἡμισεια· μεθ' ὃ, τὸ μῆκος τόξου, οὗ ἡ ἀπτομένη χ ἐςὶν $\frac{α}{3}$· ταῦτα δὲ συνάψαντες ἕξομεν τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου· ἀντὶ τοίνυν χ ἀντικαθιςαμένων τοῦ $\frac{α}{2}$, ϗ τοῦ $\frac{α}{2}$, ποριωθήσονται αἱ σειραὶ $\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{3\cdot2^2}+\frac{1}{5\cdot2^4}-\frac{1}{7\cdot2^6}+\frac{1}{9\cdot2^8}-\frac{1}{11\cdot2^{10}}+\frac{1}{13\cdot2^{12}}\text{ κτ.}\right)$ ϗ $\frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot3^2}+\frac{1}{5\cdot3^4}-\frac{1}{7\cdot3^6}+\frac{1}{9\cdot3^8}-\frac{1}{11\cdot3^{10}}+\frac{1}{13\cdot3^{12}}\text{ κτ.}\right)$

Βουλομένοις δ' εὑρεῖν τὰς δυνάμεις ἑκατέρου τῶνδε τῶν τόξων, ἀκριβῶς παριςαμένας μέχρι τοῦ ἐννάτου δεκαδικοῦ, λογιςέον, 15 μὲν ἀρκτικοὺς ὅρους τῶν πρώτης, 10 δὲ τῆς δευτέρας σειρᾶς· εὐχερῶς δὲ ὁ λογισμὸς διαπράττεται, παρατετηρηκόσιν, ὡς ἐν τῇ πρώτῃ λογιωθείησαν ἂν οἱ ἀλληλεχεῖς ὅροι, συςαθείσης σειρᾶς, ἧς ἕκαςος ὅρος ἴσος εἴη τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡγουμένου ϗ τοῦ $\frac{1}{2^2}$, τοῦτ' ἔςιν ἕκαςος ὅρος εἴη ἴσος $\frac{1}{4}$ τοῦ ἡγησαμένου, ϗ ταύτης εἶτα πολλαπλασιαθείσης ἀνὰ ἕκαςον ὅρον ἐπὶ τὴν σειρὰν $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ κτ.· τελευταῖον δὲ συναφθέντων τῶν ἀρτίων ὅρων, ϗ τῶν περιττῶν, ϗ τοῦ τούτων ἀθροίσματος ἀπὸ τοῦ ἐκείνων ἀφαιρεθέντος, τοῦ δὲ καταλοίπου πολλαπλασιαθέντος ἐπὶ $\frac{\alpha}{2}$· ὁ δὲ τῆς δευτέρας σειρᾶς λογισμὸς οὕτω γενήσεται· συνεςάσθω σειρά, ἧς ἕκαςος ὅρος ἴσος εἴη τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡγουμένου ϗ τοῦ $\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$, τοῦτ' ἔςιν ἕκαςος ὅρος εἴη $\frac{1}{9}$ τοῦ ἡγησαμένου· ϗ πεπολλαπλασιάσθω ἀνὰ ἕκαςον ὅρον ἐπὶ τὴν σειρὰν $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ κτ, ϗ τὰ ἄλλα πεπράχθω ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης σειρᾶς· μόνον δὲ τὸ ἔσχατον ἀποτέλεσμα πεπολλαπλασιάσθω οὐχὶ ἐπὶ $\frac{\alpha}{2}$, ἀλλ' ἐπὶ $\frac{\alpha}{3}$· ταύτης δὲ τῆς πράξεως ἐπιμελῶς διαπραχθείσης, ϗ τῆς προσεγγίσεως μέχρι τῶν 10 δεκαδικῶν προαχθείσης, πορισθήσεται, ὑπὲρ μὲν τῆς πρώτης σειρᾶς $\frac{\alpha}{2}(0,9272952180)$, ἢ $\alpha(0,4636476090)$, ὑπὲρ δὲ τῆς δευτέρας, $\frac{\alpha}{3}(0,9652516632)$, ἢ $\alpha(0,3217505544)$· ἄρα τὸ $45°$ τόξον, ὅπερ ἐςὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύω εὑρεθέντων, ἔςαι $\alpha(0,785398 1634)$· τετραπλασιασθὲν ἄρα ἀποδώσει τὴν ἡμιπεριφέρειαν $= \alpha(3,141592 6536)$· ἡ ἄρα ἀκτὶς πρὸς τὴν ἡμιπεριφέρειαν (ἢ ἡ διάμετρος πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν) $:: \alpha : \alpha(3,1415926536) :: 1 : 3,1415926536$· λόγος ἀκριβέςερος τῦ τεθέντος (Γεωμ. 370, 371, 377), καὶ εὐχερῶς πάνυ ἀκριβέςερον ἔτι ἀποδοθῆναι δυνάμενος.

247. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** Ἀριθμῦ δοθέντος εὑρεῖν αὐτῦ τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον.

ΛΥΣΙΣ. Διῃρήσθω ὁ ἀριθμὸς εἰς δύω μέρη α, χ, α ὄντος τῦ μείζονος· ἐκεῖν κατὰ τὰ ἀποδεδομένα (47) ἔςι $\delta.\lambda o\gamma.(\alpha+\chi) = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, ποσότης, ἥτις ὁλοκληρωθῆναι γεωμετρικῶς ὀκ ἔχει· ἀνακτέον ἄρα ταύτην εἰς σειρὰν, μετασχηματίσαντας εἰς $\delta\chi(\alpha+\chi)^{-1}$· ἀλλὰ (Συμβ. Λογ. 149, 548) $(\alpha+\chi)^{-1} = \alpha^{-1}\left(1 - \frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\chi^3}{\alpha^3}\,\kappa\tau\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\chi}{\alpha^2} + \frac{\chi^2}{\alpha^3} - \frac{\chi^3}{\alpha^4}\,\kappa\tau$· ἄρα, δλ

$(\alpha+\chi) = \delta\chi(\alpha+\chi)^{-1} = (\frac{\delta\chi}{\alpha} - \frac{\chi\delta\chi}{\alpha^2} + \frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha^3} - \frac{\chi^3\delta\chi}{\alpha^4}$ κτ)· ὁλοκληρυμένης ἄρα ταύτης τῆς ποσότητος, εὑρίσκεται $\lambda(\alpha+\chi) = (\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4} +$ κτ$)$ $+ \Gamma$· ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάτρεπτος Γ, σημειωτέον, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπικρατεῖ ϗ ὅταν ᾖ $\chi = 0$· ἀνάγεται μέντοι τηνικαῦτα εἰς $\lambda\alpha = \Gamma$· ἄρα $\Gamma = \lambda\alpha$· ἄρα $\lambda(\alpha+\chi) = \lambda\alpha + (\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4}$, κτ$)$· ἑνὸς ἄρα ἀριθμῦ τῦ λογαρίθμυ γνωσθέντος, δυνατὸν διὰ ταύτης τῆς σειρᾶς τὸν παντὸς ἄλλυ ἀριθμῦ εὑρεῖν λογάριθμον· ἔςω φέρε $\alpha = 10$, ϗ $\alpha + \chi = 11$· ὑκῦν ἔςαι $\chi = 1$, ϗ $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{1}{10}$, ὅθεν εὑρεθήσεται $\lambda.11 = \lambda.10 + (0,1) - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3}$, κτ· ἐκ δὲ τύτων γινώσκεται, ὅ,τι ἐςὶ προσθετέον τῷ τῦ 10 λογαρίθμῳ εἰς εὕρεσιν τῦ κατὰ τὸν 11.

248. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπεὶ ἡ ἄρτι ἀποδοθεῖσα γενικὴ σειρὰ, ὐχ ἅλις συγκλίνυσα εὑρίσκεται, προκείσθω μέθοδος ἑτέρα διὰ τῦ ἐφεξῆς προβλήματος, ἐξ ὗ εὐπετῶς θηρεύεται ὁ ζητύμενος λογάριθμος.

249. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον κλάσματος, ὗ ὁ ἀριθμητὴς μείζων ἐςὶ τῦ παρονομαςῦ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω, α μὲν τὸ ἄθροισμα τῦ ἀριθμητῦ ϗ τῦ παρονομαςῦ, χ δὲ ἡ αὐτῶν διαφορά· ἔςαι ὖν, ὁ μὲν ἀριθμητὴς (Συμβ. Λογ. 442) $= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\chi$, ὁ δὲ παρ.

ονομαςῆς $= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi$, ϗ ἑπομένως τὸ προτεθὲν κλά-σμα ἔςαι $\frac{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\chi}{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi} = \frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}$ (ἐκβολῇ τῦ κοινῦ ποιητῦ $\frac{1}{2}$), ϗ ἑπομένως $\lambda.\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}$, $\lambda(\alpha+\chi) - \lambda(\alpha-\chi)$ ἐμ-φανεῖ τὸν αὐτῦ λογάριθμον· λαβόντες ὖν αὐτῦ τὰ ἀπει-ροςά, ϗ μόνην μὲν τὴν χ ὡς μεταβλητὴν ἐκδεξάμενοι, ὡς δὲ ἀμετάβλητον τὴν α (*) τηρήσαντες, ἕξομεν (47)

$$\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi} - \frac{\delta\chi}{\alpha-\chi} = \frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha-\chi\chi} = 2\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-1}\cdot$$

ἐκεῖ (Συμβ. Λογ. 149, 548) $(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-1} = \alpha^{-2}\left(1 + \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} + \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\alpha^8} + \kappa\tau\right)$· ἄρα $2\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-1} = 2\alpha^{-1}\delta\chi\left(1 + \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} + \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\alpha^8} + \kappa\tau\right)$

(*) Εἰ ϗ τὸ κλάσμα τόδε ἐμφαίνειν ὀφείλει ἅπαν προτιθέμενον κλάσμα, ὐδὲν ἀλλ' ὖν τὸ κωλύον μὴ ὐχὶ θεωρεῖν τὸ α ἄθροισμα τῦ ἀριθμητῦ ϗ τῦ παρονομαςῦ ὡς ἄτρεπτον· ὐδὲν γάρ ἐςι κλάσμα, ὃ μὴ ἄντις ὕτω διαθείη, ὡς τὸ ἄθροισμα τῦ ἀριθμητῦ ϗ τῦ παρονομαςῦ ἴσον εἶναι, ᾧ ἂν βέλοιτο ἀριθμῷ· κείσθω γὰρ κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$, ὃ διαθεῖναι χρὴ ὕτως, ὡς τὸ ἄθροισμα τῦ ἀριθμητῦ ϗ τῦ παρονομαςῦ ἰσῦσθαι τῷ 12 ἀριθμῷ· πεπολλαπλασιάσθω ἑκάτερος τῶν ὅρων ἐπὶ ν· ὅθεν ἔςαι $\frac{3\nu}{5\nu}$, ϗ ὑποτεθείσθω $3\nu + 5\nu = 12$, ἢ $8\nu = 12$· ἄρα $\nu = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$· ἄρα $\frac{3\times\frac{3}{2}}{5\times\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, ὗ τὸ ἄθροισμα τῦ ἀριθμητῦ ϗ τῦ παρονομαςῦ ἐςιν ὡς ἀληθῶς $= 12$.

$$= 2\left(\frac{\delta\chi}{\alpha} + \frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha^3} + \frac{\chi^4\delta\chi}{\alpha^5} + \frac{\chi^6\delta\chi}{\alpha^7} + \frac{\chi^8\delta\chi}{\alpha^9} + \text{κτ}\right)\cdot$$

ἄρα ο. $\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$, εἴτ' ἦν $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi} = 2\left(\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3}\right.$ $\left.+ \frac{\chi^5}{5\alpha^5} + \frac{\chi^7}{7\alpha^7} + \frac{\chi^9}{9\alpha^9} + \text{κτ}\right) + \Gamma\cdot$ τὸ δὲ ἀμετάτρεπτον Γ ὁλοκληρωθήσεται, εἰ μάθοιμεν ὅ,τι γένοιτο ἡ ἐξίσωσις, ἐπειδὰν ἡ $\chi = 0\cdot$ ἀλλὰ τηνικαῦτα ἀνάγεται εἰς $\lambda\frac{\alpha}{\alpha} = \Gamma\cdot$ ἄρα $\Gamma = \lambda\frac{\alpha}{\alpha} = \lambda 1 = 0\cdot$ ὅλη ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἁπλῶς ἔςαι $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi} = 2\left(\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} + \frac{\chi^5}{5\alpha^5}\right.$ $\left.\frac{\chi^7}{7\alpha^7} + \text{κτ}\right)$, ἔνθα καταφαίνεται, ὅτι ἕκαςος ὅρος συνίςαται ἐκ τοῦ ἡγουμένου, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ ἀπὸ $\frac{\chi}{\alpha}$, εἴτ' οὖν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου, τετράγωνον, εἶτα δὲ λαμβάνεται ὁ πρῶτος, τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ δευτέρου, τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ τρίτου, κτ, καὶ ὅλον τὸ ἄθροισμα διπλασιάζεται. Ταῦτα δὲ ἐφαρμοςέον ἐφεξῆς μερικωτέροις ὑποδείγμασι.

250. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὸν τοῦ 2 ὑπερβολικὸν λογάριθμον.

ΛΥΣΙΣ. Μετασχηματισθήτω ὁ 2 εἰς $\frac{4}{2}$· οὐκοῦν ἔξομεν $\alpha = 3$, καὶ $\chi = 1$, καὶ $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{1}{3}$, καὶ $\frac{\chi^2}{\alpha^2} = \frac{1}{9}\cdot$ ἕκαςος ἄρα ὅρος εὐπετῶς συγκροτηθήσεται· ζητεῖται γὰρ εἰς τοῦτο ἄλλο οὐδὲν, ἢ ληφθῆναι τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ ἡγουμένου ὅρου, ἵνα γεννηθῇ ἡ σειρὰ $\frac{\chi}{\alpha}$, $\frac{\chi^3}{\alpha^3}$, $\frac{\chi^5}{\alpha^5}$ κτ.· ἕξομεν ἄρα

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\chi}{\alpha} &= 0,333333333\\
\frac{\chi^3}{\alpha^3} &= 0,037037037\\
\frac{\chi^5}{\alpha^5} &= 0,004115226\\
\frac{\chi^7}{\alpha^7} &= 0,000457247\\
\frac{\chi^9}{\alpha^9} &= 0,000050805\\
\frac{\chi^{11}}{\alpha^{11}} &= 0,000005645\\
\frac{\chi^{13}}{\alpha^{13}} &= 0,000000627\\
\frac{\chi^{15}}{\alpha^{15}} &= 0,000000069
\end{aligned}\right\}\text{ἄρα}\left\{\begin{aligned}
\frac{\chi}{\alpha} &= 0,333333333\\
\frac{\chi^3}{3\alpha^3} &= 0,012345679\\
\frac{\chi^5}{5\alpha^5} &= 0,000823045\\
\frac{\chi^7}{7\alpha^7} &= 0,000065321\\
\frac{\chi^9}{9\alpha^9} &= 0,000005645\\
\frac{\chi^{11}}{11\alpha^{11}} &= 0,000000513\\
\frac{\chi^{13}}{13\alpha^{13}} &= 0,000000048\\
\frac{\chi^{15}}{15\alpha^{15}} &= \alpha,000000004
\end{aligned}\right.$$

τὸ ἄρα ἄθροισμα ἐςὶ 0,346573508, οὗ τὸ διπλοῦν, ὅπερ ἐςὶν ὁ ζητούμενος τοῦ 2 λογάριθμος, ὑπάρχει 0,693147176, ὃς ἐν μόνοις 8 δεκαδικοῖς ἔςι 0,69314718.

251. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δὲ 4 ὁ ἀπὸ 2 ἐςὶ τετράγωνος, καὶ 8 ὁ ἀπ' αὐτοῦ κύβος, τὸ μὲν ἄρα διπλοῦν τοῦ εὑρεθέντος ἔςαι ὁ τοῦ 4, τὸ δὲ τριπλοῦν ὁ τοῦ 8, λογάριθμος· εἰς δὲ εὕρεσιν τοῦ κατὰ τὸν 3 λογαρίθμου, ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ κλάσματος $\frac{4}{3}$, ὅστις ἀφαιρεθεὶς τοῦ κατὰ τὸν 4 ἀποδώσει τὸν τοῦ 3, καὶ γὰρ 3 ἔςι 4 διῃρημένος διὰ $\frac{4}{3}$· ἄρα $\lambda.3 = \lambda 4 - \lambda\frac{4}{3}$· ἀλλ' εὐπετέςερον εὑρεθήσεται, εἰ ζητηθείη ὁ τοῦ $\frac{8}{9}$ κλάσματος λογάριθμος, καὶ ἀφαιρεθείη τοῦ κατὰ τὸν 8 λογαρίθμου ἐγνω-

σμένε ἤδη· τὸ ἓν κατάλοιπον ἔςαι ὁ τῦ 9 λογάριθμος, ὃ τὸ ἥμισυ ἔςαι ὁ τῦ 3· προςεθέντος δὲ τῦ κατὰ τὸν 3 τῷ τῦ 2, πορισθήσεται ὁ τῦ 6 λογάριθμος· ἵνα δὲ εὑρεθείη ὁ τῦ 5, ζητηθήτω πρῶτον ὁ τῦ 10, θηρωμένοις τὸν τῦ $\frac{10}{8}$, ὃς συναφθεὶς τῷ τῦ 8, ἀποδώσει τὸν τῦ 10· τέτε δὲ ἀφαιρεθεὶς ὁ τῦ 2, ἀποδώσει τὸν τῦ 5· κατάδηλον ἄρα, ὅ,τι χρὴ ποιεῖν εἰς εὕρεσιν παντὸς ἄλλε λογαρίθμε.

252. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Σημειωτέον δὲ, ὡς ὁ λογισμὸς ἀεὶ μᾶλλον ϗ μᾶλλον ἐπιτέμνεται, ὅσῳ μείζων γίνεται ὁ ἀριθμός· ὥςε εὑρεθέντων ἅπαξ τῶν μέχρι 10 λογαρίθμων, οἱ μέχρις 100 πορισθήσονται, μηδὲ τρισὶν ὅροις τῆς σειρᾶς χρησαμένοις, ἡνίκ᾽ ἂν ςέργωμεν 8 δεκαδικοῖς· παρελθῦσι δὲ τὸν 100 μέχρι τῶν 1000, οἱ δύω ἀρκτικοὶ ἀρκέσωσιν· ἐντεῦθεν δὲ μόνος ὁ πρῶτος ἐξικανοῖ.

253. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄.** Τὲς ὑπερβολικὲς λογαρίθμες εἰς τὲς ἐν τοῖς κανονίοις τρέψαι.

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω πρῶτον ὁ τῦ 10 λογάριθμος· ἐὰν τοίνυν διὰ τῦ λογισμῦ ζητηθῇ ὁ τῦ $\frac{10}{8}$, διὰ τῦ προεκτεθέντος τύπε, εὑρεθήσεται $\lambda\,\frac{10}{8} = 0{,}22314355$· τέτῳ δὲ συναφθέντος τῦ κατὰ τὸν 8 (210), πορισθήσεται $\lambda\,10 = 2{,}30258509$· τέτε τεθέντος, ἀναμνηςέον, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\delta\chi = \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$ (47), ἐφ᾽ ὃ ἐπιςηρίζεται ὁ πρακτικὸς τῶν λογαρίθμων λογισμὸς, μόνῳ τῷ συςήματι τῶν λογαρίθμων, ὧν τὸ μέτρον $= 1$, ἐπανήκει· ἡ δὲ πάντων τῶν δυνατῶν λογαριθμικῶν συςημάτων ἐξίσωσις ἐςὶ $\delta\chi = \frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon}$· ἡ δέ γε πάντων τῶν λογαριθμικῶν συςημάτων, ἐν οἷς ὁ α πρῶτος ὅρος τῆς θεμελιώδες γεωμετρικῆς προόδȣ ὑποτίθεται $= 1$, ἐςὶ $\delta\chi = \frac{\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$. ϗ τῆς μὲν, εἴτ' ȣ̃ν τῆς $\delta\chi = \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$, ὁλόκληρόν ἐςι τὸ $\chi = \lambda\upsilon$, τῆς δὲ, εἴτ' ȣ̃ν τῆς $\delta\chi = \frac{\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$, τὸ $\chi = \mu\lambda\upsilon$· ὅθεν δῆλον, ὅτι, ἐπεὶ χ παρίςησι τὸν λογάριθμον, ἵν' ἀχθῶσιν οἱ ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι εἰς τȣ̀ς συςήματος ἄλλȣ, ȣ̃ τὸ μέτρον ἐςι μ, πολλαπλασιαςέον ἐςὶ τȣ́τȣς ἐπὶ τὸ μέτρον μ· ἀλλὰ λογάριθμος τȣ̃ 10 ἐν τοῖς κοινοῖς κανονίοις ἐςι 1· ὁ δὲ λογάριθμος τȣ̃ 10 ἐν τοῖς ὑπερβολικοῖς ἐςιν, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, 2,30258509· ἄρα μ × 2,30258509 = 1· ἄρα τὸ μέτρον μ τῶν κοινῶν κανονίων ἐςιν

$$= \frac{1}{2,30258509} = \text{(γενομένης τῆς διαιρέσεως)}$$

0,43429448· „ἵν' ἄρα ἀναχθεῖεν οἱ ἤδη ἀποδεδομέναι „ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι εἰς τȣ̀ς ἐν τοῖς κανονίοις, πολ„λαπλασιαςέοι εἰσὶν ἐπὶ 0,43429448· τȣ̓ναντίον δὲ, „ἵν' οἱ ἐν τοῖς κανονίοις ἀναχθῶσιν εἰς τȣ̀ς ὑπερβολικȣ̀ς, „διαιρετέοι εἰσὶ διὰ 0,43429448, ἢ (ὃ εὐχερέςερόν τε „ἐςὶ, ϗ εἰς τὸ αὐτὸ ἄγει τέλος) πολλαπλασιαςέοι ὑπάρ„χȣσιν ἐπὶ 2,30258509“· ȣ̃τως, εἰ πολλαπλασιασθείη ὁ ἄρτι εὑρημένος τȣ̃ 2 λογάριθμος 0,69314718 ἐπὶ 0,43429448, προκύψει λογάριθμος τȣ̃ 2 ὁ 0,3010300, οἷος τῷ ὄντι ἀπαντᾷ ἐν τοῖς κανονίοις.

254. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.** Λογαρίθμȣ ὑπερβολικȣ̃ δοθέντος, εὑρεῖν αὐτȣ̃ τὸν ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι, τȣ̃ $\alpha + \chi$ ἀριθμὸν ὁντιναȣ̃ν ἐμφαίνοντος, εὑρίσκεται $\lambda(\alpha + \chi) = \lambda\alpha +$