ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Τῶν ἀποδοθέντων κανόνων ἐφαρμογὴ εἰς τετραγωνισμὸν τῶν καμπύλων.

211. Εἰς εὕρεσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ (ὅ ταὐτὸν) τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν καμπύλων γραμμῶν, περιεῖν εἰώθασιν ὡς ἀπειρόπλευρα πολύγωνα τὰς καμπύλας· ἐκ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν Μ, μ (σχ. 68) ἐπινοεῖν καθέτους ΜΠ, μπ τῷ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονι· ὅθεν ἡ ὅλη ἐπιφάνεια ἀναλύεται εἰς ἄπειρα τὸν ἀριθμὸν, καὶ ἐλάχιστα τὸ ποσὸν, τραπέζια· θεωροῦσιν οὖν τηνικαῦτα ἕκαστον τραπέζιον, οἷον τὸ ΠπμΜ ὡς ἀπειροστὸν τοῦ πεπερασμένου χωρίου ΑΠΜ· ἐπιεικῶς γὰρ ΠπμΜ = Απμ — ΑΠΜ = δ(ΑΠΜ)· οὐδὲν ἄρα λοιπὸν ἢ συμβολικῶς παραστῆσαι τὸ τραπεζίδιον ΠπμΜ, καὶ ταύτην τὴν ἔκθεσιν διὰ τῶν προαποδοθέντων κανόνων ὁλοκληρῶσαι.

Ἀλλ' ἰστέον, ὅτι τὸ ΠπμΜ, ἐκλαμβανόμενον ὡς ἀπειροστὸν τῆς ἐπιφανείας, οὐ μᾶλλόν ἐστιν ἀπειροστὸν τῆς ὑπὸ τῆς τῶν ἀποτετμημένων ἀρχῆς Α ἀπολαμβανομένης ἐπιφανείας, ἢ παντὸς ἄλλου χωρίου ἀπολαμβανομένου ὑπό τινος μονίμου καὶ διωρισμένου σημείου τοῦ Κ· ἐπίσης γὰρ ἐστι ΠπμΜ = ΚπμΛ — ΚΠΜΛ = δ(ΚΠΜΛ)· τῆς ὁλοκληρώσεως ἄρα γενομένης, τὸ ἐκ τοῦ λογισμοῦ προκύψαν ὁλόκληρον οὐκ ἀμέσως ἀποδοτέον τῷ χωρίῳ ΑΠΜ μᾶλλον, ἢ παντὶ ἄλλῳ χωρίῳ τῷ ΚΠΛΜ, ὃ διαφέρει ἐκείνου χωρίῳ διωρισμένῳ καὶ ἀτρέπτῳ τῷ ΚΑΛ· προσθετέον ἄρα τῷ ἐκ τοῦ λογισμοῦ εὑρεθέντι ὁλοκλήρῳ ποσότητα ἄτρεπτον, ἐμφαίνουσαν χωρίον, ᾧ τὸ διορισθησόμενον διαφέρει τοῦ εὑρεθέντος ἀμέσως ἐκ τοῦ λογισμοῦ· ὅπως δὲ τοῦτο διορισθήσεται ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀψόμεθα.

212. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** Εὑρεῖν τὴν ἔκθεσιν τοῦ χωρίου ΠπμΜ.

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω ΑΠ $= \chi$, καὶ ΠΜ $= \upsilon$· ἐκεῖν ἔσαι Ππ $= \delta\chi$, πμ $= \upsilon + \delta\upsilon$· ἡ δὲ τοῦ τραπεζίου ἐπιφάνεια (Γεωμ. 295) ἔσι $\frac{\Pi\mathrm{M} + \pi\mu}{2} \times \Pi\pi = \frac{2\upsilon + \delta\upsilon}{2} \times \delta\chi = \upsilon\delta\chi + \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{2}$· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ $\frac{\delta\upsilon\delta\chi}{2}$, παρατιθέμενον πρὸς τὸ $\upsilon\delta\chi$, ἀπειροςόν ἐσιν· ἄρα $\upsilon\delta\chi$ ἔσιν ἡ γενικὴ ἔκθεσις τοῦ ἀπειροςοῦ, ἢ τοῦ σοιχείου τῆς ὅλης καμπύλης.

213. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἵνα δὲ ὁ τύπος οὗτος ἐφαρμοσθῇ τῇ προκειμένῃ ἐπιφανείᾳ, ἧς δέδοται ἡ ἐξίσωσις, ληπτέον ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὴν τοῦ υ δύναμιν, ἣν εἰσακτέον τῷ τύπῳ $\upsilon\delta\chi$· τηνικαῦτα γὰρ παρασαθήσεται διὰ χ καὶ δχ ἡ ποσότης, ἥτις, ἣν ὁλοκληρωθῇ, παρέξει μετὰ ποσότητος ἀτρέπτου προσιθεμένης τὴν ἔκθεσιν τῆς ἐπιφανείας ταύτης τῆς καμπύλης, προσλογιζομένης, ἀφ' οὗ τινος ἄντις βουληθείη σημείου· λείπεται δὲ μόνον τὴν ἄτρεπτον προσδιορίσαι, ὅπερ περιέξαι ἐκθεμένοις, ἀφ' οὗ τινος σημείου ἐπιλογίζεται ἡ ἐπιφάνεια· ὅπως δὲ τουτὶ τελεσθήσεται, ὀψόμεθα ἐχομένως.

214. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** Τετραγωνίσαι τὴν κωνικὴν παραβολήν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσιν ἐν αὐτῇ ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = \pi\chi$, $\upsilon = \sqrt{\pi\chi} = \pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}$· ἄρα $\upsilon\delta\chi = \pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}\delta\chi$· ἀλλ' ὁλόκληρον ταύτης τῆς ποσότητος ἔσι τὸ $\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}\delta\chi}{\frac{3}{2}\delta\chi} + \Gamma$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$

$+ \Gamma$· αὕτη ἄρα ἐμφαίνει τὴν τῆς παραβολῆς ἐπιφάνειαν· ὥστε, γνωσθείσης τῆς ἀποτετμημένης χ, καὶ τῆς παραμέτρου π, εὑρεθήσεται ἡ δύναμις τοῦ χωρίου ΑΠΜ, ἢ τοῦ χωρίου ΚΠΜΛ, τοῦ ἐπιλογιζομένου ἐκ τοῦ μονίμου σημείου Κ, εἰ διορισθείη τὸ ποσὸν Γ, τοῦτ' ἔστιν εἰ ἀληθῶς τὸ ὁλόκληρον ἐμφαίνει, ἐκ τίνος σημείου ἡ ἀρχὴ γίνεται· ζητηθήτω οὖν τὰ ἐκ τοῦ Α ἀρχόμενα χωρία· ἔσται τοίνυν ΑΠΜ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἵνα δὲ μάθωμεν, ὅ,τι δύναται τὸ Γ, ἐπιστατέον, ὅτι, ἡνίκα ἔστι $\chi = 0$, καὶ τὸ χωρίον ΑΠΜ γίνεται ὡσαύτως 0· τηνικαῦτα ἡ ἐξίσωσις τρέπεται εἰς $0 = 0 + \Gamma$· ἄρα $\Gamma = 0$· ἵν' ἄρα τὸ ὁλόκληρον ἐμφήνῃ τὰ ἐκ τοῦ Α ἀρχόμενα χωρία, τὴν ἄτρεπτον Γ δεῖ εἶναι μηδέν· τοῦτ' ἔστι τηνικαῦτα οὐδεμίαν προσθετέον ἄτρεπτον· καὶ ἐν γένει τοίνυν ἔσται τὸ ἀδιόριστον χωρίον ΑΠΜ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$· ἐὰν μέντοι τὰ χωρία ἄρχωνται ἐκ τοῦ σημείου Κ, καθ' ὃ ΑΚ $= \beta$ (τοῦ β γνωστοῦ ποσοῦ ὑπάρχοντος), ἔσται τηνικαῦτα ΚΠΜΛ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἀλλὰ τὰ χωρία ταῦτα γίνεται μηδέν, ὅταν ΑΠ, ἢ χ, γένηται $= \beta$· ἔσται ἄρα τότε $0 + \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἄρα $\Gamma = -\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, καὶ ἑπομένως ΚΠΜΛ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$. Ο. Ε. Π.

215. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δῆλον ἄρα, εἰς ὅ,τι συμβάλλεται ἡ προσθετέα ἄτρεπτος, καὶ ὅπως μόνη ἡ τοῦ προβλήματος κατάστασις ταύτην διορίζει· ἔστιν οὖν $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}\times\chi$, ἀλλὰ $\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}} = \upsilon$· ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}\times\chi = \frac{2}{3}\chi\upsilon$· ἐπεὶ ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$ παρίστησι τὸ χωρίον ΑΠΜ, δηλώσει ἄρα τοῦτο καὶ ἡ ἔκθεσις $\frac{2}{3}\chi\upsilon$, τοῦτ' ἔστι

$\frac{2}{3}$ ΑΠ × ΠΜ, ἢ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΠΜΟ, ὁποία ἂν εἴη ἡ ΑΠ· εὕρηται δὲ οὕτω καὶ (Τψ. Γ. 70).

Ὡσαύτως $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\chi\beta$, ἀλλ' ὅταν ἡ $\chi = AK = \beta$, ἡ ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = \pi\chi$ δίδωσιν $\upsilon\upsilon = \pi\beta$, καὶ ἐπομένως $\upsilon = \pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}$, τοῦτ' ἔστι ΚΛ $= \pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}$· ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} \times \beta = \frac{2}{3}$ ΚΛ × ΑΚ· ἐπεὶ οὖν τοῦ χωρίου ΚΠΜΛ ἔκθεσίς ἐστιν ἡ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, ἔσται ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἔκθεσις καὶ ἡ $\frac{2}{3}$ ΑΠ × ΠΜ — $\frac{2}{3}$ ΑΚ × ΚΛ, τοῦτ' ἔστι $\frac{2}{3}$ ΑΠΜΟ — $\frac{2}{3}$ ΑΚΛΙ· μόνη δὲ τῶν τεσσάρων κωνικῶν τομῶν ἡ παραβολὴ τετραγωνισμοῦ ὑπάρχει ἐπιδεκτική.

216. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τετραγωνίσαι τὰς παντὸς γένους παραβολάς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις αὐτῶν ἐστιν (Τψ. Γ. 268) $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$· ἄρα $\upsilon = \sqrt[\mu+\nu]{(\alpha^{\mu}\chi^{\nu})} = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$. ἄρα $\upsilon\delta\chi = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}\delta\chi$, οὗ ὁλόκληρον $\dfrac{\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}}{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}$ $+ \Gamma$, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\dfrac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}$ $+ \Gamma$, ὅπερ ταὐτόν ἐστι τῷ $\dfrac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}\times\chi$ $+ \Gamma$, ἢ (ἐπεὶ $\upsilon = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$) $\dfrac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\chi\upsilon + \Gamma$· ὡς εἴπερ ἄρχοιντο τὰ χωρία ΑΠΜ (σχ. 69) ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς Α, ὅπερ ἀπαιτεῖ μηδὲν εἶναι τὸ ὁλόκληρον, ὅταν ΑΠΜ ᾖ μηδὲν, καὶ ἑπομένως ὅταν χ ᾖ μηδὲν, τηνικαῦτα τὸ ἄτρεπτον Γ μηδὲν γίνεται, λειπομένου ἁπλῶς τοῦ $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\chi\upsilon$, τουτέστι τὸ χωρίον ΑΠΜ ἀεὶ ἐστὶ μέρος διωρισμένον τοῦ γινομένου χυ, ἢ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΠΜΟ, ἐμφαινόμενον τῷ κλάσματι $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}$, οὗ ἡ δύναμις ἐξέχεται τῆς τῶν μ, ν, τουτέστιν ἐκ τοῦ βαθμοῦ τῆς παραβολῆς· τοιγαροῦν τετραγωνισμοῦ εἰσὶν ἐπιδεκτικαὶ πᾶσαι αἱ παραβολαί.

217. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δʹ. Τετραγωνίσαι τὰς παντὸς γένους ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολάς, ἐξαιρουμένης τῆς ἐκ τοῦ κώνου.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπ' αὐτῶν ὑπάρχει $\upsilon^{\mu} = \alpha^{\mu+\nu}\chi^{-\nu}$ (Τ'ψ. Γ. 273), $\upsilon = \alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{\frac{-\nu}{\mu}}$· ἄρα $\upsilon\delta\chi = \alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{\frac{-\nu}{\mu}}\delta\chi$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{\alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{1-\frac{\nu}{\mu}}}{1-\frac{\nu}{\mu}}+\Gamma$, ἢ

$$\frac{\mu}{\mu-\nu}\alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{1-\frac{\nu}{\mu}}+\Gamma,$$

ἔνθα ἡ ἄτρεπτος εὐκόλως διορίζεται, ὅταν μ ὑπερέχῃ τὴν ν· ἀλλ' ὅταν μ ἐλάττων ᾖ τοῦ ν, εὑρίσκεται ὡς ἄτρεπτος ποσότης, ἄπειρος μέν, τῶν χωρίων ἀρχομένων ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς, πεπερασμένη δέ, ὅταν ἄρχωνται ἀπὸ παντὸς ἄλλου χωρίου· ἔστω γὰρ $\mu = 1$, καὶ $\nu = 2$, ἔνθα ἡ ἐξίσωσίς ἐστιν $\upsilon =$

$\alpha^3\chi^{-2}$, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τηνικαῦτα ἀνάγεται εἰς $-\alpha^3\chi^{-1} + \Gamma$, ἢ $\Gamma - \frac{\alpha^3}{\chi}$· εἰ μὲν οὖν ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς Α (σχ. 70) ἄρχωνται τὰ χωρία, δεήσει μηδὲν εἶναι τὸ $\Gamma - \frac{\alpha^3}{o}$, ὄντος $\chi = o$, τοῦτ' ἔστι $\Gamma - \frac{\alpha^3}{o} = o$, καὶ ἑπομένως $\Gamma = \frac{\alpha^3}{o}$, τοῦτ' ἔστιν, ἄπειρον· τὐναντίον δὲ, εἰ ἄρχοιντο ἐκ τοῦ Κ, ὡς εἶναι $\text{ΑΚ} = \beta$, ἔσται $\Gamma - \frac{\alpha^3}{\beta} = o$, ὅθεν $\Gamma = \frac{\alpha^3}{\beta}$· ὃ δὲ ταῦτα σημαίνει, δῆλον ποιήσομεν. ἡ γὰρ καμπύλη, ἧς ἐξίσωσις ἡ $\upsilon = \alpha^3\chi^{-2}$, ἢ $\upsilon = \frac{\alpha^3}{\chi^2}$, ἐπεκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους ΑΖ, ΑΤ (σχ. 70)· ἐγγίζει μέντοι μᾶλλον τῇ ἀσυμπτώτῳ ΑΖ, ἢ τῇ ΑΤ, ὥσπερ ἐκ τῆς κατ' αὐτὴν ἐξισώσεως συναγαγεῖν δυνατόν· ὡς, εἴπερ ἐπιλογισθεῖεν τὰ χωρία ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου ΑΤ, ἔσονται ἄπειρα, εἴγε τὸ χωρίον, τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτου, καὶ τοῦ ἀπείρου κλωνὸς ΒΣ, ἔστιν ἄπειρον· ἀμήχανον ἄρα δηλωθῆναι τὰ χωρία ΑΠΜΣ, τὰ ἐπιλογιζόμενα ἐπὶ τῆς ΑΤ ἀσυμπτώτου· τὐναντίον δὲ, τὰ χωρία, τὰ ἀπολαμβανόμενα ὑπὸ τοῦ κλωνὸς ΒΜ καὶ τῆς ἀσυμπτώτου ΑΖ, καὶ ἐπ' ἄπειρον προήκοντα, πεπερασμένην ἔχουσι δύναμιν, εἴγε μετὰ βραχύ τι διάστημα τάχιστα προσεγγίζει ὁ κλὼν τῇ ἑαυτοῦ ἀσυμπτώτῳ· ὥστε τὸ ἀπειρόμηκες χωρίον ΚΛΜΟΖ ἐκτίθεσθαι διὰ $\frac{\alpha^3}{\beta}$, καὶ $\text{ΠΜΟΖ} = \frac{\alpha^3}{\chi}$, καὶ ἑπομένως $\text{ΚΛΜΠ} = \frac{\alpha^3}{\beta} - \frac{\alpha^3}{\chi}$.

ἐντεῦθεν ἄρα, κἂν εἴη ἀμήχανον εὑρεῖν τὰ χωρία, τὰ ἐπὶ τῆς ΑΥ ἀσυμπτώτȣ λαμβανόμενα, δυνατὸν μέντοι θηρεύσασθαι τὰ ΚΛΜΠ, τὰ ἀρχόμενα ἐκ τȣ̃ σημείȣ Κ, κειμένȣ, ὅσον ἄντις βέλοιτο, ἐγγὺς τῆς ΑΥ.

218. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Τετραγωνίσαι τὴν καμπύλην, ἣν ἐμφαίνεσιν ἡ $\upsilon = \frac{\alpha\alpha\chi - \chi^3}{\alpha\alpha}$ ἐξίσωσις ϗ τὸ 71 σχῆμα.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς λήψεως τῶν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἀπειροςῶν ποριθήσεται $\upsilon\delta\chi = \frac{\alpha\alpha\chi\delta\chi - \chi^3\delta\chi}{\alpha\alpha}$, ȣ̃ ὁλόκληρόν ἐςι (196) $\text{O}\upsilon\delta\chi$, ἢ $\text{ΑΠΜ} = \frac{2\alpha\alpha\chi^2 - \chi^4}{4\alpha\alpha} + \Gamma$· ἐὰν ȣ̃ ἄρχωνται ἐκ τῆς ἀρχῆς Α τῶν ἀποτετμημένων τὰ χωρία ΑΠΜ, δεήσει μηδὲν εἶναι τὸ ὁλόκληρον, ὄντος $= 0$ τȣ̃ χ· ὅθεν μηδὲν ἔςαι ϗ ἡ ἀμετάτρεπτος Γ· ὥςε τὸ ἀδιόριςον χωρίον ΑΠΜ ἔςαι ἁπλῶς $= \frac{2\alpha\alpha\chi^2 - \chi^4}{\alpha\alpha} + \Gamma$.

Ἐν γένει ȣ̃ν, ἐὰν ἡ υ ἐκ μονωνύμων ποσῶν, ὡς ἐν ταῖς ἀνωτέρω περιπτώσεσι, συγκέηται, ἀεὶ εὐπετῶς ποριθήσεται ἡ ἐπιφάνεια (196).

219. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. Τετραγωνίσαι καμπύλην, ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν ἡ $\alpha^5\upsilon\upsilon = \chi^4(\alpha^3 - \chi^3)$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως πρόεισιν $\upsilon = \pm\sqrt{\left(\frac{\chi^4(\alpha^3 - \chi^3)}{\alpha^3}\right)} = \pm\frac{\chi^2}{\alpha^2\sqrt{\alpha}}\sqrt{(\alpha^3 - \chi^3)}$· ἄρα (μιᾶς μόνης λαμβανομένης δυνάμεως τȣ̃ υ), $\upsilon\delta\chi =$

$\frac{\chi^2 \delta\chi}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} \sqrt{(\alpha^3 - \chi^3)} = \frac{\chi^2 \delta\chi}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} (\alpha^3 - \chi^3)^{\frac{1}{2}}$· ἐστι δὲ αὕτη ποσότης ἐπιδεχομένη ὁλοκλήρωσιν (203), εἴγε $\chi^2 \delta\chi$ ἐστιν ἀπειροστὸν τοῦ χ^3, διαιρούμενον διὰ ποσοῦ ἀτρέπτου· ἄρα (196) Ουδ$\chi = \frac{\chi^2\delta\chi \cdot (\alpha^3 - \chi^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\alpha^2\sqrt{\alpha} - 3\chi^2\delta\chi} + \Gamma =$

$- \frac{2(\alpha^3 - \chi^3)^{\frac{3}{2}}}{9\alpha^2\sqrt{\alpha}} + \Gamma$· τὸ δὲ ἄτρεπτον Γ διορισθήσεται, γνωσθέντος τοῦ σημείου, ἀφ' οὗ ἄρχεται ἡ ἐπιφάνεια.

220. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ εὑρίσκειν τὰς τῶν καμπύλων ἐπιφανείας καὶ εἰς τρίγωνα ἀντὶ τρεπεζίων, ἀναλυομένων· δυνατὸν γὰρ εὑρεῖν τὴν τοῦ τμήματος ΑΝΞ ἐπιφάνειαν (σχ. 68), θεωρουμένην, ὡς εἰ συγκέοιτο ἐξ ἀπειραρίθμων τριγώνων ἐλαχίστων, οἷόν ἐστι τὸ ΑΞξ, οὗ ἔκθεσις ἡ $\frac{\text{Α}\xi\chi\text{Ξ}\tau}{2}$, καταγομένης τῆς καθέτου Ξτ, ἢ (ὃ ταὐτὸν), κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΞ, τόξου ἐλαχίστου γραφέντος τοῦ Ξτ· τηνικαῦτα γάρ, κληθείσης τῆς ΑΞ $= \tau$, καὶ τοῦ τόξου Ξτ $= \delta\chi$, ποριοθήσεται Αξ $= \tau + \delta\tau$, καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΞξ $= \frac{\tau + \delta\tau}{2}\delta\chi =$

$\frac{\tau\delta\chi}{2} + \frac{\delta\tau\delta\chi}{2}$, τοῦτ' ἐστιν $= \frac{\tau\delta\chi}{2}$, ἀποῤῥιπτομένου τοῦ ὅρου $\frac{\delta\tau\delta\chi}{2}$, ὅτι δχ καὶ δτ εἰσὶν ἀπειροστά, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ἀπειροστὸν δευτεροταγές· οὐδὲν οὖν ἄλλο λοιπόν, ἢ εὑρεῖν τὴν μεταξὺ χ καὶ τ ἐξίσωσιν, καὶ ἐντεισαγαγόντας ἀντὶ τ τὴν τοῦ χ δύναμιν, τὴν ὁλοκλήρωσιν ἀπεργάσασθαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ εὐθύνσεως τῶν καμπύλων γραμμῶν.

221. Καμπύλην εὐθύνειν διορίζειν ἐστὶν αὐτῆς τὸ μῆκος, ἢ δηλοῦν, τίνι εὐθείᾳ γραμμῇ ἰσοῦται, ἤτοι ὅλη ἡ καμπύλη, ἢ τόξον αὐτῆς δεδομένον· ἰδοὺ δὴ τουτὶ, ὅταν ἐξῇ, ὅπως περαίνεται· ἐκλαμβανομένης ἀεὶ ἁπάσης καμπύλης AM (σχ. 68) ὡς ἀπειροπλεύρου πολυγώνου, ἡ ἐλαχίστη πλευρὰ Mμ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἀπειροστὸν τοῦ τόξου AM, εἴγε $Mμ = Aμ - AM = δ(AM)$· ἀγομένης τοίνυν τῆς Mρ παραλλήλως τῇ AΠ, ἔσται $Mμ = \sqrt{(Mρ^2 + ρμ^2)} = \sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$· λείπεται ἄρα ὁλοκληρῶσαι μόνον τὸ $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$· ἐπὶ δὲ τούτῳ εἰλήφθω τὰ ἀπειροστὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, καὶ ἐντεῦθεν πορισθεῖσα ἡ τοῦ δυ δύναμις, παρισταμένη διὰ χ καὶ δχ, ἢ ἡ τοῦ δχ, παρισταμένη διὰ υ καὶ δυ, ἀντικατασταθήτω ἐν $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$, ἥτις μόνον χ καὶ $δχ^2$, ἢ μόνον υ καὶ δυ, περιέξει· ἐξήχθω δὲ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκτὸς τὸ $δχ^2$, ἢ $δυ^2$ (Συμβ. Λογισ. 167), καὶ γενέσθω ἡ ὁλοκλήρωσις.

222. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Τόξον κυκλικὸν εὐθῦναι.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστιν (Ὑψηλ. Γ. 10) $υ = \sqrt{2αχ - χχ}$, καὶ $δυ = \frac{αδχ - χδχ}{\sqrt{(2αχ - χχ)}}$, καὶ $δυ^2 = δχ^2 \cdot \frac{(α - χ)^2}{2αχ - χχ}$· ἀντικαταστάσει δὲ ταύτης τῆς τοῦ $δυ^2$ δυνάμεως ἐν τῷ $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$, πορίζεται $\sqrt{\left(δχ^2 + \frac{δχ^2 . (α - χ)^2}{2αχ - χχ}\right)} =$

$$\frac{2\alpha\chi\delta\chi^2 - \chi\chi\delta\chi^2 + \alpha^2\delta\chi^2 - \alpha\alpha\chi\delta\chi^2 + \chi\chi\delta\chi^2}{2\alpha\chi - \chi\chi} =$$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2\delta\chi^2}}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}} = \frac{\alpha\delta\chi}{\sqrt{2\alpha\chi - \chi\chi}}$$, ὅπερ ἐςὶν ἀπειροςὸν παντὸς τόξου, ὁλοκληρέμενον διὰ προσεγγίσεως, ὡς ὀψόμεθα ὕςερον.

223. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐκ τῶν ἐν γένει διὰ $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$ ἐμφαινομένων παραβολῶν εὐθύναι τὴν δηλουμένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^3 = \alpha\chi^2$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως πρόεισι $\chi^2 = \frac{\upsilon^3}{\alpha}$, ϗ $\chi = \frac{\upsilon^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$· ἄρα $\delta\chi = \frac{\frac{3}{2}\upsilon^{\frac{1}{2}}\delta\upsilon}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$, ϗ $\delta\chi^2 = \frac{9\upsilon\delta\upsilon^2}{4\alpha}$· ἄρα $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \sqrt{(\delta\upsilon^2 + \frac{9\upsilon\delta\upsilon^2}{4\alpha})} = \delta\upsilon\sqrt{(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})}$ (Συμβολ. Λογ. 167)· ὁλοκληροῦται δ' εὐπετῶς (193) ἡ ποσότης αὕτη, εἴγε ὁ ἐκτὸς τοῦ διωνύμου δείκτης τῆς υ ἐλάττων ἐςὶ μονάδι τοῦ ἐν τῷ διωνύμῳ· πορισθήσεται ἄρα

$$\mathrm{O}\,\delta\upsilon\sqrt{(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})} \text{ ἢ } \mathrm{O}\,\delta\upsilon\,(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta\upsilon\,(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9\delta\upsilon}{4\alpha}}$$

$$+ \Gamma = \frac{8\alpha}{27}\cdot(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{3}{2}} + \Gamma$$· ἡ δὲ ἀμετάτρεπτος Γ οὕτω διορισθήσεται· ἐὰν ἐκ τῆς τῶν υ ἀρχῆς Α ἄρχηται τὸ τόξον ΑΜ, δεήσει τὸ ὁλόκληρον, ἢ τὴν τοῦ ΑΜ τόξου δύναμιν, εἶναι μηδὲν, ὅταν ᾖ $\upsilon = 0$· τηνικαῦτα ἄρα

τὸ ὁλόκληρον ἀνάγεται εἰς $\frac{8\alpha}{27}(1)^{\frac{3}{2}}+\Gamma$, ἢ $\frac{8\alpha}{27}+\Gamma$· ἔσται ἄρα $\frac{8\alpha}{27}+\Gamma=0$· ἄρα $\Gamma=-\frac{8\alpha}{27}$· ἄρα τὸ μῆκος παντὸς τόξου ΑΜ, ἐκ τῆς κορυφῆς ἀρχομένου, ἔστι $\frac{8\alpha}{27}(1+\frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{3}{2}}-\frac{8\alpha}{27}$.

224. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Βουλομένοις δὲ εἰδέναι, αἳ ἂν εἶεν ἄλλαι τῶν παραβολῶν εὐθύνσιμοι, ἐπιχειρητέον οὕτως· ἡ παντὸς γένους παραβολῶν ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu+\nu}=\alpha^{\mu}\chi^{\nu}$ δίδωσιν $\upsilon=\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$· γενέσθω δὲ εὐμαρείας χάριν $\frac{\mu}{\mu+\nu}=\kappa$, καὶ $\frac{\nu}{\mu+\nu}=\zeta$· ἕξομεν ἄρα $\upsilon=\alpha^{\kappa}\chi^{\zeta}$· ἄρα $\delta\upsilon=\zeta\alpha^{\kappa}\chi^{\zeta-1}\delta\chi$, καὶ $\delta\upsilon^2=\zeta^2\alpha^{2\kappa}\chi^{2\zeta-2}\delta\chi^2$· ἄρα $\sqrt{(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}=\sqrt{(\delta\chi^2+\zeta^2\alpha^{2\kappa}\chi^{2\zeta-2}\delta\chi)}=\delta\chi$ $=\delta\chi\sqrt{(1+\zeta^2\alpha^{2\kappa}\chi^{2\zeta-2})}$ ποσότης, ἥτις, ὡς ἔχουσά ἐστιν, οὐχ' ὁλοκληροῦται, εἰμὴ εἴη $2\zeta-2=1$· ἐὰν μέντοι μεταβληθῇ τὸ σύμβολον τοῦ δείκτου τῆς ὑπορρίζου χ, προκύψει $\chi^{-\zeta+1}\delta\chi\sqrt{(\chi^{-2\zeta+2}+\zeta^2\alpha^{2\kappa})}$, ἥτις (195) ὁλοκληροῦται, εἴπερ $-\zeta+1$, αὐξηθεὶς μονάδι, καὶ διαιρεθεὶς διὰ $-2\zeta+2$, προβάλλει ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν, τοῦτ' ἔστιν, εἰ $\frac{\zeta}{-2\zeta+2}=\tau$, τοῦ τ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· ἐντεῦθεν ἄρα ἀποφέρεται $\zeta=\frac{2\tau}{2\tau+1}$· ἀλλὰ $\zeta=\frac{\nu}{\mu+\nu}$· ἄρα

$\frac{\nu}{\mu+\nu} = \frac{2\tau}{2\tau+1}$ · ὅθεν $\mu = \frac{\nu}{2\tau}$ · ἄρα εὐθύνονται αἱ παραβολαί, ὧν ἐστιν ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^{\frac{\nu.(2\tau+1)}{2\tau-2}} = \alpha^{\frac{\nu}{2\tau}} \chi^{\nu}$, ἢ (ἐξαγομένης τῆς ῥίζης ν) $\upsilon^{\frac{2\tau+1}{2\tau}} = \alpha^{\frac{1}{2\tau}} \chi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ τετραγωνισμοῦ τῶν καμπύλων ἐπιφανειῶν.

225. Τῶν ἐκ περιαγωγῆς καμπύλης τινὸς ἀπογεννωμένων ἐπιφανειῶν τὸν τετραγωνισμὸν ἐνταῦθα ζητήσομεν· τῆς τοίνυν ΑΜ (σχ. 72) καμπύλης περὶ εὐθεῖαν τὴν ΑΠ περιαγομένης, αἱ, περὶ ὧν ὁ λόγος, παράγονται ἐπιφάνειαι.

Ἀλλὰ τῆς ΑΜ περὶ τὴν ΑΠ περιστρεφομένης, ἡ μικρὰ πλευρὰ Μμ, ζώνην περιγράφει, ἢ κώνου κολούρου μέρος, ὅπερ στοιχεῖόν τε ὑπάρχει τῆς ἐπιφανείας, καὶ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ Μμ καὶ τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς Μμ τῇ ΑΠ ἀγομένη κάθετος, ἢ (ὃ ταὐτὸν, εἴγε ἀπειροστημόριός ἐστιν ἡ Μμ) ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ· ἀλλὰ τὸ τόξον $\mathrm{M}\mu = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· ἐὰν οὖν διὰ $\eta : \pi$ ὁ λόγος τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν περιφέρειαν δηλωθῇ, πορισθήσεται $\eta : \pi :: \upsilon$ πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ, ἥτις ἔσται $= \frac{\pi\upsilon}{\eta}$· ἔστιν ἄρα $\frac{\pi\upsilon}{\eta} \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ στοιχεῖον τῶν εἰρημένων καμπύλων ἐπιφανειῶν.

226. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** *Τετραγωνίσαι τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν* (σχ. 73).

ΛΥΣΙΣ. Τοῦ γεννήτορος κύκλου ΑΜΒ ἐστὶν ἐξίσωσις $υυ = αχ - χχ$· ἄρα $υ = \sqrt{(αχ - χχ)}$, καὶ $δυ = \frac{\frac{1}{2} αδχ - χδχ}{\sqrt{(αχ - χχ)}}$· ἄρα $δυ^2 = \frac{\frac{1}{4} ααδχ^2 - αχδχ^2 + χ^2 δχ^2}{αχ - χχ}$, ἄρα $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)} = \sqrt{(δχ^2 + \frac{\frac{1}{4} ααδχ^2 - αχδχ^2 + χ^2δχ^2}{αχ - χχ})} = \frac{\frac{1}{2} αδχ}{\sqrt{(αχ - χχ)}}$· ἀντικαθισταμένων ἄρα ἐν τῷ τύπῳ $\frac{πυ}{α}\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$ ἀντὶ $υ$ καὶ $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$ τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, πορισθήσεται $\frac{π\sqrt{(αχ - χχ)}}{η} \cdot \frac{\frac{1}{2} αδχ}{\sqrt{(αχ - χχ)}}$, ὅπερ ἀνάγεται ἐπὶ $\frac{\frac{1}{2} απδχ}{η}$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{\frac{1}{2} απχ}{η} + Γ$, ἢ ἁπλῶς $\frac{\frac{1}{2} απχ}{η}$, ἀρχομένης ἀμέλει τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τοῦ σημείου Α.

227. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** *Τετραγωνίσαι τὴν τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος ἐπιφάνειαν* (σχ. 72).

ΛΥΣΙΣ. Τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις ἐστὶν $υυ = πχ$· ἄρα $χ = \frac{υυ}{Π}$, $δχ = \frac{2υδυ}{Π}$, $δχ^2 = \frac{4υ^2δυ^2}{Π}$· ἄρα $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)} = \sqrt{(δυ^2 + \frac{4υ^2δυ^2}{ΠΠ})} = δυ\sqrt{(1 + \frac{4υ^2}{ΠΠ})}$· ἄρα $\frac{πυ}{η}\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$ γίνεται $\frac{πυδυ}{η}\sqrt{(1 + \frac{4υ}{ππ})}$, ποσότης ὁλοκληρώσεως ἐπιδεκτικὴ (193), ἧς τὸ ὁλόκληρόν ἐστι

$$\frac{\frac{\pi \upsilon \delta \upsilon}{\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\frac{1}{4}.8\upsilon\delta\upsilon}{\pi\pi}} + \Gamma,$$ ἥτις ἀνάγεται ἐπὶ $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{3}{2}}+\Gamma$· ἀλλὰ γὰρ ἡ ποσότης αὕτη τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀρχομένην δηλοῦσα ἐπιφάνειαν, ὅταν ἡ $\upsilon = 0$, καὶ αὕτη μηδὲν ἔσται· ἀλλὰ τηνικαῦτα γίνεται $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}(1)^{\frac{3}{2}}+\Gamma$, εἴτ' οὖν $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}+\Gamma = 0$, καὶ $\Gamma = -\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}$· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἀδιορίστου παραβολικῆς κωνοΐδος ΑΜΛΑ ἐστὶν $=\frac{\pi\Pi\Pi}{12\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν στερεῶν καταμετρήσεως.

228. Πρὸς καταμέτρησιν τῆς τῶν σωμάτων στερεότητος, ἐννοητέον ταῦτα συγκείμενα ἐκ στιβάδων λεπτοτάτων τε καὶ παραλλήλων, ἢ γοῦν ἐξ ἀπειραρίθμων πυραμίδων, ὧν αἱ κορυφαὶ εἰς ἓν σημεῖον συντρέχουσιν· ὅταν δ' ἐκείνως ἐξεικονίζωνται, τὴν τῶν δύο ἀντιθέτων ἐπιφανειῶν διαφορὰν, τὴν ἑκατέραν στιβάδα περατοῦσαν, ἀπειροστήν τε ἐκληπτέον, καὶ παροπτέον ἐν τῷ ὑπολογισμῷ· λαβεῖν οὖν χρὴ εἰς ἔκθεσιν τῆς στερεότητος ταύτης τῆς στιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν δύο ἀντιθέτων βά-

σεων, ϗ τῦ ἀπειροςῦ ὕψυς· ἐὰν φέρε ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ (σχ. 74) ἐκληφθῇ ὡς συγκειμένη ἐκ ςιβάδων λεπτοτάτων, οἷα ἡ αβγδεζ, ληπτέον ὡς μέτρν ταύτης τῆς ςιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας αβγ, ἢ τῆς δεζ ϗ τῦ πάχυς αὐτῆς.

Ὡσαύτως, ἐὰν τὸ περιαγωγῇ τῆς ΑΜ (σχ. 72) καμπύλης περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΠ ἀπογεννώμενον ςερεὸν ἐκληφθῇ ὡς συγκείμενον ἐκ ςιβάδων παραλλήλων ϗ λεπτοτάτων, ἐκληπτέον ὡς μέτρον ἑκάςης ςιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς κυκλικῆς ἐπιφανείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ, ϗ τῦ πάχυς Ππ. Τύτυ τεθέντος, ἰδὲ ὅπως ἐκτιμηθήσεται ἡ παντὸς σώματος ςερεότης.

Ἐννοηθήτω ἑκάςη ςιβὰς ὡς ὖσα τῦ ςερεῦ τὸ ἐπειροςὸν, εἴγε ἡ ςιβὰς ΜμλΛ ἐςιν = ΑμλΑ — ΑΜ ΛΑ = δ(ΑΜΛΑ)· ϗ διορισθεῖσα ἡ συμβολικὴ αὐτῆς ἔκθεσις ὁλοκληρώσθω· ἡ δὲ παντὸς ςερεῦ καταμέτρησις ϗ κυβισμὸς αὐτῦ ὀνομάζεται, ὥσπερ τετραγωνισμὸς ἡ τῶν ἐπιφανειῶν.

229. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** Κυβίσαι τὴν πυραμίδα ΚΑΒΓ (σχ. 74).

ΛΥΣΙΣ. Ἐμφαινέτω τὴν τῆς κατ' αὐτὴν βάσεως ΑΒΓ ἐπιφάνειαν ἡ γνωςὴ ποσότης ββ· τὸ δ' ὕψος αὐτῆς ΚΤ, τὸ υ· τὸ δὲ χ ἐμφαινέτω τὸ μιᾶς τινος ςιβάδος ἀπόςημα· ὅθεν πάχος ταύτης τῆς ςιβάδος ἔςαι τὸ δχ· ἡ δ' ἐπιφάνεια αβγ εὑρεθήσεται (*) διὰ τῆς ἀναλογίας $ΣΤ^2 : Στ^2$

(*) Τῆς ἀναλογίας ταύτης τὴν δεῖξιν περιττὸν, οἶμαι, ἐκθέσθαι ὧδε· οἱ γὰρ ἐνταῦθα γενόμενοι οἷοι πάντως ἔσονται αὐτόθεν τῆς ταύτης ἀλήθειαν συνιδεῖν, ϗ, εἰ δέοι, δεῖξαι.

:: ΑΒΓ : $\alpha\beta\gamma$, τᾶτ' ἔστιν $\upsilon\upsilon : \chi\chi :: \beta\beta : \alpha\beta\gamma = \frac{\beta\beta\chi\chi}{\upsilon\upsilon}$.

ὃκᾶν ἡ τῆς στιβάδος στερεότης ἔσαι $\frac{\beta\beta\chi\chi\delta\chi}{\upsilon\upsilon}$, ᾗ ὁλόκληρόν

ἐστι τὸ $\frac{\beta\beta\chi^3}{3\upsilon\upsilon} + \Gamma$, ἢ ἁπλῶς $\frac{\beta\beta\chi^3}{3\upsilon\upsilon}$, ἐὰν ἄρχηται ἐκ τῆς

κορυφῆς Κ τὸ στερεόν· αὕτη ὖν ἡ ποσότης, ἡ ἐμφαίνεσα

ἐπαιονᾶν μέρος Καβγ τῆς πυραμίδος, ταὐτίζεται τῇ $\frac{\beta\beta\chi\chi}{\upsilon\upsilon}$

$\times \frac{\chi}{3}$, ἥτις ὐδέν ἐστιν ἀλλ' ἢ $\alpha\beta\gamma \times \frac{\text{Κ}\tau}{3}$, ὅπερ συνᾴδει

τοῖς δεδειγμένοις ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ (457).

230. Περὶ δὲ τῶν ἐκ περιαγομένης καμπύλης οἱασ-ᾶν ἀπογεννωμένων στερεῶν, ἕξεσι γενικώτερον εὑρεῖν τὴν ἔκθεσιν τῆς στοιχειώδυς στιβάδος, ἢ τὸ ἀπειροστόν· ἐμφαινέτω γὰρ $\eta : \pi$ τὸν τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον· εὑρεθήσεται ὖν περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ $= \upsilon$ (σχ. 72), ἐκ τῆς ἀναλογίας $\eta : \pi :: \upsilon : \frac{\pi\upsilon}{\eta}$· ἐὰν δὲ ἡ τῆς περιφερείας ταύτης $\frac{\pi\upsilon}{\eta}$ δύναμις πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΠΜ, εἴτ' ὖν ἐπὶ $\frac{1}{2}\upsilon$, εὑρεθήσεται ἡ κυκλικὴ ἐπιφάνεια $\frac{\pi\upsilon^2}{2\eta}$, ἥτις, πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ τὸ πάχος $\Pi\pi = \delta\chi$, δίδωσι $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta}$, ἔκθεσιν τᾶ στοιχείε τῆς στερεότητος παντὸς ἐκ περιαγωγῆς στερεᾶ· ἵνα δὲ χρησώμεθα τῷ τύπῳ τέτω ἐπὶ μερικωτέραις περιπτώσεσι,

εἰσακτέον αὐτῷ ἀντὶ υ τὴν αὐτῦ δύναμιν, διὰ χ πορίζομένην ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης ΑΜ τῆς τῦ ςερεῦ γεννητρίας, ἠ ὁλοκληρωτέον αὐτόν.

231. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Σφαῖραν κυβίσαι (σχ. 73).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ διάμετρος ΑΒ $=2\eta$, ἠ ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ $=\chi$, ἠ ἡ τεταγμένη ΠΜ $=\upsilon$· ἔςαι τοίνυν, διὰ τὴν φυσικὴν ἰδιότητα τῦ γεννήτορος κύκλυ ΑΜΒ, $\upsilon^2 = 2\eta\chi + \chi^2$· ἀντικαταςάσει ἄρα τῆς τῦ υ^2 δυνάμεως γίνεται ὁ τύπος $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta} = \pi\chi\delta\chi - \frac{\pi\chi\chi\delta\chi}{2\eta}$, καὶ Ο $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta} = \frac{\pi}{2\eta}$ · Ο · $\upsilon\upsilon\delta\chi = \frac{\pi\chi^2}{2} - \frac{\pi\chi^3}{3.2\eta}$· ἄρα τὸ μέρος τῆς σφαίρας τῆς ἀπογεννωμένης τῷ ἡμίσει τμήματι ΑΠΜ, περιςρεφομένῳ περὶ τὸν ἄξονα ΑΒ, ἐςὶν $= \frac{\pi\chi^2}{2} - \frac{\pi\chi^3}{6\eta} = \frac{3\pi\eta\chi^2 - \pi\chi}{6\eta}$. ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\chi = 2$, ἡ ὅλη σφαῖρα ἔςαι $= \frac{12.\pi\eta^3 - 8.\pi.\eta^3}{6.\eta} = \frac{4\pi.\eta^3}{6\eta} = \frac{2}{3}.\pi\eta^2 = 2\pi\eta.\frac{1}{3}\eta$. ἀλλὰ $\frac{\pi\eta}{2}$ δηλοῖ μέγιςον κύκλον τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας, ἠ $2\pi\eta$ τὸ τετραπλῦν αὐτῦ· ἄρα ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ τετραπλῦ μεγίςυ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλυ, ἠ τριτημορίυ τῆς ἀκτῖνος· ὅπερ συνᾴδει τοῖς δεδειγμένοις (Γεωμ. 452, 463).

232. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Κυβίσαι τὴν τῆς ἐλλείψεως κωνοΐδα (σχ. 75).

ΛΥΣΙΣ. Τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσίς ἐστιν $\upsilon\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(\alpha\chi - \chi\chi)$ (Τ'ψ. Γ. 91)· ἐκεῖν ὁ τύπος $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta}$ γίνεται $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\delta\chi\,(\alpha\chi - \chi\chi)$, εἴτ' οὖν, $\frac{\pi.\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\cdot(\alpha\chi\delta\chi - \chi^2\delta\chi)$, οὗ τὸ ὁλόκληρόν ἐστι $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\times(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}) + \Gamma$, ἢ ἁπλῶς $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3})$, εἴπερ ἡ στερεότης ἐκ τοῦ σημείου Α ἄρχοιτο· ἵνα δὲ εὑρεθείη ὅλη ἡ ἐλλειπτικὴ κωνοῖς, ὑποτεθείσθω $\chi = AB = \alpha$· καὶ δὴ ποριθήσεται $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\times(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3})$, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\frac{\pi\alpha\beta\beta}{12\eta} = \frac{\pi\beta\beta}{4\eta}\times\frac{1}{3}\alpha = \frac{\pi\beta\beta}{8\eta}\times\frac{2}{3}\alpha$· ἀλλὰ $\frac{\pi\beta\beta}{8\eta}$ ἐμφαίνει τὴν ἐπιφάνειαν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ $\beta = \Delta\delta$, καὶ $\frac{\pi\beta\beta}{8\eta}\times\alpha$ ἐμφαίνει ἑπομένως τὴν στερεότητα κύκλου τῇ ἐλλειπτικῇ κωνοΐδι περιγεγραμμένου· ἐπεὶ ἄρα ἡ τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος στερεότης ἐστὶ $\frac{\pi\beta\beta}{8\eta}\times\frac{2}{3}\alpha$, ὑπάρχει $\frac{2}{3}$ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου· ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐλλειπτικὴ κωνοΐς ἐστιν, ἧς ἴσοι οἱ ἄξονες, καὶ αὕτη ἄρα $\frac{2}{3}$ ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου, ὡς καὶ ἀλλαχοῦ δέδεικται (Γεωμ. 464).

233. ΣΧΟΛΙΟΝ. Βουλομένοις δ' εὑρεῖν τὴν ἀπὸ σημείου διωρισμένου τοῦ Κ ἀρχομένην στερεότητα, θετέον

ΑΚ = ε, καὶ χρηστέον τῷ γενικῷ ὁλοκλήρῳ $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\chi^3}{2} - \frac{\chi^3}{3}\right) + \Gamma$· ἐν τῷ εἰρημένῳ οὖν σημείῳ, τὸ ὁλόκληρον γίνεται ο, τοῦτ' ἔστιν ὅταν ᾖ $\chi = \varepsilon$· ἄρα $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3}\right) + \Gamma = 0$, καὶ ἑπομένως $\Gamma = -\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3}\right)$· ἡ ἄρα ἐκ τοῦ Κ ἀρχομένη στερεότης ἐστὶν =

$$\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}\right) - \frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3}\right)$$

· οὗτος τύπος ὑπάρχει τμήματος ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος, ἀπολαμβανομένου ὑπὸ δύω παραλλήλων ἐπιπέδων, οἷς ὁ ἄξων πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε, καὶ ὧν τὸ ἀπόστημα ἐστὶν $= \chi - \varepsilon$.

234. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Κυβίσαι τὴν παραβολικὴν κωνοΐδα (σχ. 72).

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ἐστὶν $\upsilon\upsilon = \Pi\chi$· οὐκοῦν ὁ τύπος $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta}$ γίνεται $\frac{\pi\Pi\chi\delta\chi}{2\eta}$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta} + \Gamma$, ἢ $\frac{\pi\Pi\chi}{2\eta} \times \frac{\chi}{2} + \Gamma$, ἢ (τιθεμένου ἀντὶ $\Pi\chi$ τοῦ $\upsilon\upsilon$) $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta} \times \frac{\chi}{2} + \Gamma$· ἢ (ἐκ τοῦ Α τοῦ στερεοῦ ἀρχομένου) $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta} \times \frac{\chi}{2}$· ἀλλὰ $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta}$ ἐμφαίνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, οὗ ἀκτὶς ἡ ΠΜ, εἴτ' οὖν τῆς κατὰ τὴν παραβολικὴν κωνοΐδα βάσεως· ἄρα ἡ παραβολοῒς ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κατ' αὐτὴν βάσεως, καὶ τοῦ κατ' αὐτὴν ἡμίσεως ὕψους χ· ἡμίσεια ἄρα ἐστὶ κυλίνδρου, τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος.

235. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ ἡ στερεότης ἄρχηται ἀπὸ σημείου γνωστοῦ τοῦ Κ, ὡς εἶναι ΑΚ $=\varepsilon$, τηνικαῦτα μηδὲν εἶναι δέον τὴν στερεότητα πρὸς τῷ σημείῳ Κ, τοῦτ' ἔστιν ὅταν ἡ $\chi=\varepsilon$, καὶ τὸ γενικὸν ὁλόκληρον ἔσται ἴσον μηδενί, εἴτ' οὖν $\frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta}+\Gamma=0$, καὶ ἑπομένως $\Gamma=-\frac{\pi\Pi\varepsilon^2}{4\eta}$ ἡ στερεότης ἄρα τμήματος παραβολικῆς κωνοΐδος, ἀπολαμβανομένου ὑπὸ δύω παραλλήλων ἐπιπέδων, ὧν τοῦ μὲν τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀπόστημα $=\chi$, θατέρου δὲ $=\varepsilon$, ὑπάρχει $=\frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta}-\frac{\pi\Pi\varepsilon^2}{4\eta}$.

236. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον καὶ ἡ ὑπερβολικὴ κωνοΐς, εἴτ' οὖν τὸ στερεὸν, τὸ ἀπογεννώμενον περιαγωγῇ τῆς ὑπερβολῆς περὶ ἕνα τῶν ἑαυτῆς ἀξόνων, κυβίζεται· ἤτε ἐλλειπτικὴ κωνοΐς, ἡ περιαγωγῇ τῆς ἐλλείψεως περὶ τὸν αὐτῆς ἐλάσσω ἄξονα ἀπογεννωμένη, ἥτις καὶ ἐκτενὴς καλεῖται, ἀντιδιαστελλομένη τῆς ἑτέρας, ἥτις ἐπιμήκης ὀνομάζεται· εὑρεθήσεται δὲ ὅτι ἡ ἐκτενὴς ἴση ἐστὶ $\frac{2}{3}$ κυλίνδρου αὐτῇ περιγεγραμμένου, τοῦτ' ἔστιν α καὶ β ἀξόνων ὄντων τῆς γεννητρίας ἐλλείψεως, τοῦ μὲν μείζονος, θατέρου δὲ ἐλάσσονος, ἡ μὲν ἐπιμήκης ἐστὶν $=\frac{\pi\alpha\beta\beta}{12\eta}$, ἡ δ' ἐκτενὴς $=\frac{\pi\alpha\alpha\beta}{12\eta}$· ἡ ἄρα

ἐπιμήκης ἐςὶ πρὸς τὴν ἐκτενῆ :: $\frac{\pi\alpha\beta\beta}{12\eta} : \frac{\pi\alpha\alpha\beta}{12\eta}$ :: $\beta : \alpha$, ὥσπερ ὁ ἐλάσσων πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα.

237. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Κυβίσαι κωνοΐδα, ἀπογεννωμένην ὑπὸ ἡμιπαραβολῆς AM, περιενεχθέντος περὶ τὴν αὐτῆ ἀπτομένην AB (σχ. 76).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ παράμετρος $= \alpha$, καὶ $\mathrm{A}\iota = \mathrm{Z}\nu = \chi$, καὶ $\iota\nu = \mathrm{AZ} = \upsilon$, καὶ $\mathrm{ZB} = \delta\upsilon$· ἐκεῖν κύκλος ὁ ἀκτῖνι τῇ ZN γεγραμμένος ἔςαι $= \frac{\pi \cdot \chi\chi}{2\eta}$, ὅς τις, πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ $\delta\upsilon$ ἀποδώσει τὸ ςοιχεῖον, τὸ ἀπογεννώμενον ὑπὸ τῆ ἐπιπέδε $\mathrm{BMZ}\nu = \frac{\pi\chi^2\delta\upsilon}{2\eta} = \frac{\pi\upsilon^4\delta\upsilon}{2\alpha^2\upsilon}$ (ὅτι $\chi^2 = \frac{\upsilon^4}{\alpha\alpha}$, πηγάζον ἐκ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην φύσεως·) ἐ τὸ ὁλόκληρόν ἐςι $\frac{\pi\upsilon^5}{10\alpha^2\eta} = \frac{\pi\alpha^2\chi^2\upsilon}{10\alpha^2\eta} = \frac{\pi\chi^2\upsilon}{10\cdot\eta}$, τιθεμένε τῆ $\alpha^2\chi^2$ ἀντὶ υ^4· ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = \mathrm{A\Pi} = \beta$, καὶ $\mathrm{\Pi M} = \upsilon = \vartheta$, ἡ ἐκ τῆ ἐπιπέδε AMB ἀπογεννηθεῖσα κωνοΐς ἔςαι $= \frac{\pi\beta^2\vartheta}{10\eta}$· ἀλλὰ κύκλος, ἐ ἡ ἀκτὶς $= \beta$, ἐςιν $= \frac{\pi\beta^2}{2\eta}$· ἐὰν αὕτη ἡ ποσότης πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ ϑ, πορισθήσεται κύλινδρος ὁ $\frac{\pi\beta^2\vartheta}{2\eta}$, ὅς ἔςαι πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν κωνοΐδα :: $\frac{\pi\beta^2\vartheta}{2\eta} : \frac{\pi\beta^2\vartheta}{10\eta}$