τῆς παραμέτρυ, ἡ σύστοιχος ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐφάψεται τῆς καυςικῆς κατὰ σημεῖον, ἐν ᾧ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ ἀπώτατον τῦ ἄξονος σημεῖον Ξ τῆς καυςικῆς (σχ. 47), σημειωτέον, ὅτι τηνικαῦτα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ὀφείλει εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι· ἄρα ἡ ὑπὸ εΜΞ γωνία ἔςαι ὀρθή· ἄρα ἡ γωνία εΜΑ $=$ ΞΜυ $= 45^\circ =$ Μυι· ἄρα δχ $=$ δυ, τῦτ᾽ ἔςιν ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς παράλληλός ἐςι τῷ ἄξονι, ὅταν ᾖ δχ $=$ δυ.

Ἡ τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις, ὑποτιθεμένης τῆς παραμέτρυ $= 1$, ἔςιν $\upsilon^2 = \chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \delta\chi$, ἢ (ἀντικαθισαμένης τῆς τῦ υ δυνάμεως $\chi^{\frac{1}{2}}$), $2\chi^{\frac{1}{2}}\delta\upsilon = \delta\chi$, ϗ διαιρέσει, τῦ μὲν πρώτυ μέλυς διὰ δυ, τῦ δὲ δευτέρυ διὰ δχ, ὅπερ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐςὶν $=$ δυ, πρόεισι $2\chi^{\frac{1}{2}} = 1$, $\chi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, ϗ $\chi = \frac{1}{4}$, τῦτ᾽ ἔςιν „ἐὰν ἡ ἐπι„πίπτυσα ἀκτὶς τέμνῃ τὸν ἄξονα πρὸς μέρει τετάρτῳ „τῆς παραμέτρυ, ἢ, ὃ δήπυ ταυτὸν, διήκῃ διὰ τῆς „κατὰ τὴν παραβολὴν ἑςίας, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς παρ„άλληλος ἔςαι τῷ ἄξονι, ϗ ἐπιψαύσει τῦ ἀπωτάτυ ση„μείυ τῆς καυςικῆς.“

171. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ᾽. *Εὑρεῖν τὴν δι᾽ ἀνακλάσεως καυςικὴν, ὅταν αἱ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι Αα (σχ. 51) ἐπιπίπτυσαι ἀκτῖνες ΕΜ συμβάλωσιν ἡμιπεριφερείᾳ κυκλικῇ τῇ ΑΔα.*

ΛΥΣΙΣ. Ἀχθεισῶν τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων ΜΞ, ϗ τῶν ἄλλων, ἅς τὸ σχῆμα παρίςησιν, ἐπεὶ ἡ τῆς ἐξειλιγμένης κύκλυ ἀκτὶς ἀεί ἐςιν ἴση τῇ τῦ κύκλυ ἀκτῖνι, ἔςαι ΜΗ $= \frac{\text{ΜΚ}}{2}$, ϗ τῆς ΗΞ καθέτυ ὑποτιθεμένης τῇ ΜΞ, ΗΞ, ἔςαι $= \text{ΗΡ} = \frac{\text{ΠΜ}}{2} = \frac{a}{a}$· τῷ δὲ σημείῳ Μ ἐπιπίπτοντος τῷ Δ, ἔςαι $\text{ΜΞ} = \text{ΔΒ} = \frac{\text{ΔΚ}}{2}$. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῆς ἐπιπιπτέσης ἀκτῖνος τῆς τῷ Μ συςοιχέσης, ᾗ διαφέρει τῆς τῷ Α συςοιχέσης, ἔςιν $= \text{ΠΜ}$· ἡ δ' ἀνακλωμένη κατὰ τὸ Α ἀκτὶς ἔςιν $= 0$· ἄρα κατὰ τὰ εἰρημένα (168) τὸ τόξον ΑΞ ἔςιν $= \text{ΠΜ} + \text{ΜΞ} = 3\text{ΜΞ}$, τὸ δὲ τόξον $\text{ΑΒ} = 3\text{ΔΒ}$, τῦτ' ἔςι τὸ τόξον ΑΒ τριπλάσιόν ἐςι τῆς ἡμισείας ἀκτῖνος ΔΒ· Κέντρῳ δὲ τῷ Κ γραφέντος τῷ τόξῳ ΒΣ, ἐπὶ τῆς διαμέτρῳ $\text{ΜΗ} = \text{ΚΗ}$ γεγράφθω κύκλος ὁ ΜΞΗ· ἐπεὶ δὲ ὀρθή ἐςιν ἡ ὑπὸ ΜΞΗ γωνία, τὸ σημεῖον Ξ ἔςαι πρὸς τῇ περιφερείᾳ τῷ κύκλῳ· ἔςι δὲ καὶ ἡ γωνία $\text{ΞΜΗ} = \text{ΚΜΠ} = \text{ΗΚΒ}$ (ὡς ἐναλλάξ)· ἄρα τὰ τόξα $\frac{\text{ΗΞ}}{2}$, ΗΒ, τὰ μετρῦντα ταύτας τὰς γωνίας, πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς αἱ ἀκτῖνες $\frac{\text{ΗΜ}}{2}$, ΒΚ τῶν κύκλων ΗΞΜ, ΒΣ· ἀλλὰ ΒΚ διπλῦν ἐςι τῆς $\frac{\text{ΗΜ}}{2}$· ἄρα τὸ τόξον ΒΗ ἴσον ἐςὶ τῷ τόξῳ ΗΞ· ὐκῦν ἡ καμπύλη ΑΒ ἀπογεννᾶται ἐκ τῆς περιφορᾶς κύκλῳ, ὗ ἡ ἀκτὶς ἔςιν $= \text{ΒΚ} = \frac{\text{ΑΚ}}{2}$, ὡς τὸ τῦ ἀκινήτῳ κύκλῳ τόξον ΒΗ ἀεὶ ἰσῦσθαι τῷ τῷ κινητῷ συςοιχῦντι τόξῳ ΞΗ, καὶ ἐπομένως τὴν καμπύλην ΒΑ τόξον εἶναι ἐπικυκλοειδῦς (*).

(*) Περὶ τῆς ὕτω καλυμένης καμπύλης ὐδὲν ἡμῖν εἴρηται ἐν τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ· ἔςι δὲ ἡ ἀπογεννωμένη

Δυνατὸν δὲ ἰδεῖν ταύτην τὴν καμπύλην φωτίζοντας τὴν ἐσωτερικὴν ἐπιφάνειαν ἄγγους ἡμικυλινδρικȣ̃ διὰ τȣ̃ ἡλιακȣ̃ φωτός.

172. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τῶν ἐπιπιπτȣσῶν ἀκτίνων προβαλλομένων ἀπὸ τȣ̃ πέρατος Ζ διαμέτρȣ τῆς Ζα ἡμικυκλίȣ, εὑρεῖν τὴν φύσιν τῆς δι' ἀνακλάσεως καυστικῆς (σχ. 52).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω, ΖΜ μὲν ἡ ἐπιπίπτȣσα ἀκτὶς, ΜΞ δὲ ἡ ἀνακλωμένη· καὶ ἀχθείσης τῆς ΚΠ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΜ, ἔςαι $ZM = \upsilon$, καὶ $M\Pi = \alpha = \frac{\upsilon}{2}$ (ἡ γὰρ ἀκτὶς δίχα τέμνεται ὑπὸ καθέτȣ ἐκ τȣ̃ κέντρȣ ἀγομένης, Γεωμ. 157)· ἄρα $2\upsilon = 4\alpha$· ἐκεῖ $M\Xi = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha} = \frac{\alpha\upsilon}{4\alpha - \alpha} = \frac{\alpha\upsilon}{3\alpha} = \frac{\upsilon}{3}$· λαμβανομένης ἄρα τῆς ΜΞ ἴσης τῷ τριτημορίῳ τῆς ΖΜ, τὸ σημεῖον Ξ ἔςαι ἐν τῇ καυςικῇ· λαμβανομένης δὲ καὶ τῆς αΒ ἴσης τῷ τριτημορίῳ τῆς διαμέτρȣ Ζα, ἔςαι καὶ τὸ Β ἐν τῇ καυςικῇ, ἐὰν δὲ ληφθῇ Κβ ἴση τῷ τριτημορίῳ τῆς ἀκτῖνος ΚΜ, καὶ ἀχθῇ ἡ βι παράλληλος τῇ ΚΠ, τὰ τρίγωνα ΜΚΠ, Μβι ἔσονται ὅμοια, καὶ δὴ ἔςαι ΜΚ : Μβ :: ΜΠ : Μι· ἄρα Μι ἔςαι δύω τριτημόρια τῆς ΜΠ, ἢ ἓν τριτημόριον τῆς ΖΜ· ἄρα ΜΞ = Μι· διὸ δὴ, ἐὰν ἐπὶ διαμέτρȣ τῆς Μβ γραφῇ κύκλος, αἱ ὀρθαὶ γω-

---

ὑπὸ κύκλȣ, ἐπὶ κύκλον ἀκίνητον μένοντα περιαγομένȣ· διαφέρει δὲ τῆς λεγομένης κυκλοειδȣ̃ς, ὅτι ἐκείνη ὑπὸ κύκλȣ ἐπ' εὐθεῖαν γραμμὴν κυλιομένȣ γράφεται (Υ'ψ. Γ. 332)· διὸ καὶ ὄνομα αὐτῇ παρὰ τῶν νεωτέρων ἀφωσίωται ἐπικυκλοειδής· κύκλȣ γὰρ ἐπὶ κύκλον περιεκκυλιομένȣ, ἀναφύεται ἡ γραμμὴ αὕτη.

νίαι Ξ, ι ἔσονται πρὸς τῇ αὐτῇ περιφερείᾳ, ϗ ὁ κύκλος ὗτος ἴσος ἔςαι κύκλῳ, ὗ ἀκτὶς ἡ Κβ.

Τὸ τόξον βΒ τῦ ἡμικυκλίȣ ΒβΔ ἴσον ἐςὶ τῷ τόξῳ βΞ τῦ κύκλȣ βΜ· ἡ γὰρ γωνία ΜΚα (ἡ ἐκτὸς τῦ ἰσοσκελῦς τριγώνȣ ΖΜΚ) ἴσον δύναται ταῖς δυσὶ γωνίαις ΜΖΚ. ΖΜΚ· διπλασία ἄρα ἐςὶ τῆς γωνίας ΖΜΚ = ΚΜΞ· ἴση ἄρα ἐςὶ τῇ γωνίᾳ ιΜΞ, ἥτις ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῦ τόξȣ ιβΞ, ἢ τὸ τόξον ΒΞ· ἀλ' ἡ γωνία ΜΚα ἔχει μέτρον τὸ τόξον Ββ· ἄρα τὸ τόξον Ββ ἴσον ἐςὶ τῷ τόξῳ βΞ, ϗ ἑπομένως ἡ καυσικὴ ΒΞΖ ἔςιν ἐπικυκλοειδὴς, ἀπογεννωμένη ἐκ τῆς περιφορᾶς σημείȣ τῦ Ξ κύκλȣ τῦ Μιβ, ὃς περιάγεται ἐπὶ κύκλον ἴσον τὸν ΒβΔ.

173. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν ἀκτὶς φωτὸς ἡ ΑΒ (σχ. 41), διϊκνῦσα ἐκ μέσȣ τῦ Η (*) ἐφ' ἕτερον τὸ πΝβ, ἀντὶ τῦ χωρεῖν τὴν πρώτην φορὰν ΒΚ, ἀποχωρῇ, ἢ προχωρῇ τῇ εὐθείᾳ ΒΝ, τῇ πρὸς ὀρθὰς ἐφιςαμένῃ τῇ ἐπιφανείᾳ, ἥτις διακρίνει τὰ δύω μέσα, ἡ ἀκτὶς αὕτη *θραυςὴ* ἀκύει· ἡνίκα μὲν ὖν προχωρεῖ τῇ καθέτῳ ΒΝ, *θραῦσιν πρὸς τῇ καθέτῳ*, ἡνίκα δ' ἀφίςαται αὐτῆς, *θραῦσιν ἀπὸ τῆς καθέτȣ*, ὑφίςαθαι λέγεται· ἡ δὲ ὑπὸ νΒΚ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ ταύτης τῆς ἀκτῖνος ϗ τῆς ΒΝ καθέτȣ, *γωνία θραύσεως*· ἔςι δὲ νόμος ἀπαράβατος τῦ ὕτω διϊόντος φωτὸς, ἵνα τὸ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας ΑΒΜ, ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης νΒα (ἣν ϗ αὐτὴν καλέσομεν *ἐπιπτώσεως γωνίαν*) πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας ὑπάρχῃ ἐν λόγῳ ἀ-

---

(*) Ἅπαν τὸ διάςημα, ὃ δίεισι τὸ φῶς, ὀνομάζομεν *Μέσον*.

τρέπτω· ὡς εἶναι $\mu\alpha : \nu K :: \mu : \nu$· ὁποία γὰρ ἂν εἴη ἡ τῆς ἐπιπτώσεως γωνία, ἐὰν ἡ φωτὸς ἀκτὶς μεταχωρῇ ἐξ ἀέρος ἐπὶ ὕελον, ὁ λόγος ὗτος ἔςι μικρῦ δεῖν ἴσος τῷ $3 : 2$, ϗ ἴσος τῷ $2 : 3$, ὅταν ἐξ ὑέλυ μεταβαίνῃ εἰς ἀέρα· ὑποτεθήσεται δ' ἡμῖν ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὁ λόγος ὗτος ὡς ἀκριβῶς ἔχων.

Ἐὰν ἡ θραςὴ ἀκτὶς ΒΚ ἀναςρέψῃ τὴν ἑαυτῆς πορείαν, φημὶ, ὡς αὕτη ὁδεύσει τὴν ΒΑ ὁδὸν, δι' ἧς τὸ πρῶτον ἀφίκετο· ἔςαι γὰρ $\nu : \mu :: \nu K : AM = \frac{\mu}{\nu} K\nu = \mu\alpha$, ὑποτιθεμένης $BA = B\alpha$· ἀλλ' ἔςιν $AM = \mu\alpha : \nu K :: \mu : \nu$· ἄρα $MA = \frac{\mu}{\nu} K\nu$· ἄρα κτ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν ἀπειράριθμοι ἀκτῖνες ΒΑ, ΒΜ, ἀπὸ σημείυ προβαλλόμεναι ἀκτινοβόλυ τῦ Β (σχ. 53), ϗ ἐπιπίπτυσαι ἀκτῖνι τῇ ΑΔ, θραύωνται πρὸς τῇ καθέτῳ, ἢ ἄπο τῆς καθέτυ ΜΓ, ὡς τὸ ΓΕ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας ΕΜΓ πρὸς τὸ ΓΘ ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας ἀεὶ εἶναι ἐν δεδομένῳ λόγῳ $\mu : \nu$, ἡ καμπύλη ΝΖΗ, ἧς ἐπιψαύυσιν αἱ θραυςαὶ ἀκτῖνες, ἢ αἱ αὐτῶν προαγωγαὶ ΑΗ, ΜΖ (σχ. 28) ἀκύει καυςικὴ διὰ θραύσεως.

Ἐὰν ἐπινοηθῇ νῆμα τὸ ΑΗ (σχ. 53) ἐξελισσόμενον ἐκ τῆς καυςικῆς ΗΝ, τὸ πέρας Α καταγράψει καμπύλην τὴν ΑΚ, ἧς ἔςαι ἐξειλιγμένη ἡ καυςική· ϗ ἔςαι τὸ τῆς καυςικῆς τόξον ΖΗ σὺν τῇ ἁπτομένῃ ΖΛ ἴσον τῇ εὐθείᾳ ΗΑ· ὑποτεθείσθω ἁπτομένη ἑτέρα τῇ πρώτῃ προσεχεςάτη ἡ Ζμλ, ϗ ἀκτὶς ἑτέρα ἐπιπίπτυσα ἡ Βμ· ϗ κέντροις τοῖς Ζ, Β γεγράφθωσαν τόξα τὰ Μν, Μτ·

κεῖν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Μτμ, Μνμ ἔσονται ὅμοια τοῖς τριγώνοις ΜΕΓ, ΜΓΘ ἑκατέρῳ ἑκάτερον· ἐὰν γὰρ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΕΜτ, μΜΓ, ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ μΜΕ γωνία, αἱ κατάλοιποι γωνίαι τΜμ, ΕΜΓ ἴσαι ἔσονται· ὡσαύτως, εἰ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΘΜν, ΓΜμ ἀφαιρεθείη ἡ ὑπὸ ΘΜμ γωνία, αἱ κατάλοιποι γωνίαι μΜν, ΘΜΓ ἴσαι ἔσονται· ἢ δὴ ἔςαι τμ : Μν :: ΓΕ : ΓΘ :: μ : ν· ἀλλὰ τμ ἐςὶν ἡ διαφορὰ τῆς ΑΜ, ἢ ἡ Μν τῆς ΑΜ· ἄρα (166) ΒΜ — ΒΑ, ἄθροισμα πασῶν τῶν τμ διαφορῶν τῶν ἐν τῷ ΑΜ μέρει τῆς καμπύλης, πρὸς ΜΛ = ΑΗ — ΜΖ — ΖΗ, ἄθροισμα πασῶν τῶν συςοιχούσων διαφορῶν νμ, ὡς μ : ν· ἄρα μ : ν :: ΒΜ — ΒΑ :

$$(\mathrm{AH} - \mathrm{MZ} - \mathrm{ZH}) = \frac{\nu}{\mu} . (\mathrm{BM} - \mathrm{BA}),$$ ὅθεν ἀποφέρεται $$\mathrm{ZH} = \mathrm{AH} - \mathrm{MZ} + \frac{\nu}{\mu} . \mathrm{BA} - \frac{\nu}{\mu} . \mathrm{BM}.$$

Παντοῖαί εἰσι περιπτώσεις, ὡς ἂν εἴη ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς ΒΑ μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς ΒΜ, ἢ ἡ θραυςὴ ἀκτὶς ΑΗ ἐνελίσσηται, ἢ ἐξελίσσηται τοῦ τόξου ΗΖ· εὑρεθήσεται μέντοι ἀεὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων οὖσα πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν θραυςῶν ἀκτίνων, συναπτομένου μιᾷ αὐτῶν τοῦ τῆς καυςικῆς τόξου, τοῦ ἐξελιχθέντος πρὶν ἢ θατέρᾳ ἐπιπεσεῖν, ὥσπερ μ : ν· οὕτω φέρε (σχ. 28) ΒΑ — ΒΜ : ΑΗ — ΜΖ — ΖΗ :: μ : ν (*)· ὅθεν εὐπετῶς ἀποφέρεται ἡ ἐξίσωσις $\mathrm{ZH} = \mathrm{AH} - \mathrm{MZ} + \frac{\nu}{\mu} . \mathrm{BM} - \frac{\nu}{\mu}\ \mathrm{BA}$· ἐὰν δὲ, κέντρῳ μὲν τῷ Β, δια-

(*) Ἐνταῦθα ἡ ΜΖ ἐξελίσσει τὸ τόξον ΖΗ, πρὶν ἢ ἐπιπέσῃ τῇ ΑΗ.

σήματι δὲ τῷ ΒΑ (σχ. 27), γραφῇ τόξον τὸ ΑΠ, ΠΜ ἔςαι ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων ΒΜ, ΒΑ· τοῦ δὲ σημείου Β ἀπείρως ἀφεςῶτος τοῦ τόξου ΑΜ, αἱ μὲν εὐθεῖαι ΒΑ, ΒΜ ὡς παράλληλοι ἐκληφθήσονται, τὸ δὲ ΠΑ τόξον ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, κάθετος ταῖς ἐπιπιπτούσαις ἀκτῖσι· καὶ δὴ ἔςαι $ZH = AH - MZ - \frac{\nu}{\mu}$ ΠΜ.

174. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Δοθέντων τῆς καμπύλης ΑΔ, καὶ τοῦ ἀκτινοβόλου σημείου Β, καὶ τῆς ἐπιπιπτούσης ἀκτῖνος ΒΜ, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς θραυςῆς ἀκτῖνος ΜΖ τὸ σημεῖον Ζ, καθ' ὃ ἐπιψαύει τῆς καυςικῆς (σχ. 53).

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω διά τινος τῶν προαποδεδομένων τύπων ἡ ΜΓ ἀκτὶς τῆς κατὰ τὸ Μ ἐξειλιγμένης, καὶ εἰλήφθω ἀπειροςὸν τὸ τόξον Μμ, καὶ ἤχθω ἡ εὐθεῖα Γμ, καὶ ἐςάθωσαν κάθετοι ταῖς τε ἐπιπιπτούσαις καὶ ταῖς θραυςαῖς ἀκτῖσιν αἱ ΓΕ, Γε, ΓΘ, Γϑ· ἤχθωσαν δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ δοθεῖσαι $BM = \upsilon$, καὶ $ME = \alpha$, καὶ $M\Theta = \beta$, καὶ γεγράφθω τὸ τόξον $M\tau = \delta\chi$· τούτου τεθέντος, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΕΓ, ΜΓμ, καὶ ΜΘΓ, μνμ, καὶ ΒΜτ, ΒΞε, πρόεισι $ME = \alpha : M\Theta = \beta :: M\tau = \delta\chi : M\nu = \frac{\beta\delta\chi}{\alpha}$, καὶ $BM = \upsilon : B\Xi = BE$ (*) $= \upsilon + \alpha :: M\tau = \delta\chi : \Xi\epsilon = \frac{\delta\chi . (\alpha + \upsilon)}{\upsilon}$. ἀλλά, διὰ τὸν τῆς θραύσεως νόμον, ἐςὶ $\Gamma\epsilon : \Gamma\vartheta :: \Gamma E : \Gamma\Theta :: \mu : \nu$. ἄρα (διαιρέσει) $\Gamma\epsilon - \Gamma E = \Xi\epsilon : \Gamma\vartheta - \Gamma\Theta = \Sigma\vartheta :: \mu : \nu$, ἢ $\mu : \nu ::$

(*) Αὗται γὰρ αἱ εὐθεῖαι οὐδενὶ ἀλλ' ἢ ποσότητι ἀπειροςῇ τῇ ΞΕ διαφέρουσιν ἀλλήλων.

$\Xi\epsilon = \frac{\delta\chi.(\alpha+\upsilon)}{\upsilon} : \Sigma\vartheta = \frac{\alpha\nu\delta\chi + \nu\upsilon\delta\chi}{\mu\upsilon}$. ἔςι δὲ ϗ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΖΜν, ΖΣϑ, Μν : Σϑ :: ΜΖ : ΖΣ, ἢ (διαιρέσει) $M\nu - \Sigma\vartheta = \frac{(\beta\mu\upsilon\delta\chi - \alpha\nu\delta\chi - \alpha\alpha\nu\delta\chi)}{\alpha\mu\upsilon}$

$: M\nu = \frac{\beta\delta\chi}{\alpha} :: M\Sigma = M\Theta = \beta : MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}$, ὅθεν προκύπτει ἡ ἐφεξῆς κατασκευή.

Γενέσθω ἐπὶ τὰ πρὸς τὴν ΓΜ (σχ. 55) ἡ γωνία ΕΓΗ = ΜΓΘ, ϗ εἰλήφθω ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ σημεῖον Β ἡ γραμμὴ $MT = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon}$. ἐὰν οὖν γένηται ΗΤ : ΗΕ :: ΜΘ : ΜΖ (Τ), τὸ σημεῖον Ζ ἔςαι ἐν τῇ διὰ θραύσεως καυςικῇ· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΘΜ, ΓΕΗ πρόεισι ΓΘ : ΓΕ :: ΜΘ = β : ΕΗ· ἀλλὰ ΓΘ : ΓΕ :: ν : μ :: $EH = \frac{\beta\mu}{\nu}$· ἄρα $HE - ME = HM = \frac{\beta\mu - \alpha\nu}{\alpha}$, ϗ $HM - MT = HT = \frac{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}{\nu\upsilon}$· ἄρα ἀντικαθιςαμένων ἐν τῇ ἀναλογίᾳ Τ τῶν ἀναλυτικῶν δυνάμεων τῶν τριῶν ὅρων, πορισθήσεται $\frac{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}{\nu\upsilon} : \frac{\beta\mu}{\nu} :: \beta : MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}$. τῆς δὲ κατὰ τὴν ΗΤ δυνάμεως λειπτικῆς οὔσης, δῆλον, ὅτι ἔςαι ϗ ἡ τῆς ΜΖ· ἄρα τὸ Μ σημεῖον πεσεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Θ, Ζ, ὅταν εὑρεθῇ τὸ Η μεταξὺ Τ ϗ Ε.

Ἐὰν ἡ καμπύλη κοίλη ᾖ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον Β (σχ. 54), υ γενήσεται λειπτικὸν, ϗ ἔςαι

$$\text{MZ} = \frac{-\beta\beta\mu\upsilon}{-\beta\mu\upsilon+\alpha\nu\upsilon-\alpha\alpha\nu} = \frac{\beta\beta\mu\nu}{\beta\mu\upsilon-\alpha\nu\upsilon+\alpha\alpha\nu}$$ ἡ δὲ κατασκευὴ ἡ αὐτὴ ἔσεται· ἐὰν δὲ υ ὑποτεθῇ ἄπειρον, εἴτ' ὖν παράλληλαι αἱ ἐπιπίπτυσαι ἀκτῖνες, τορισθήσεται $\text{MZ} = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon-\alpha\nu\upsilon} = \frac{\beta\beta\mu}{\beta\mu-\alpha\nu}$· ἔςαι δὲ καὶ (σχ. 55) $\text{MT} = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon} = 0$· ἐν ἄρα ταύτῃ τῇ περιπτώσει γενήσεται ΗΜ : ΗΕ :: ΜΘ : ΜΖ, ἐὰν ΑΜ ὑποτεθῇ τόξον κύκλυ, ὗ ἄπειρος ἡ ἀκτὶς, ἢ ἐὰν ΑΜ ὑποτεθῇ γραμμὴ εὐθεῖα, τηνικαῦτα ΜΓ ἔςαι ἄπειρος, καὶ $\text{ME} = \alpha$, καὶ $\text{M}\Theta = \beta$· ἄρα ἡ ποσότης $\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon$, παραβαλλομένη τῇ $\alpha\alpha\nu$, ἐξυδενωθήσεται, καὶ ἔςαι $\text{MZ} = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\mp\alpha\alpha\nu}$ (τῦ μὲν — ἀπονεμομένυ τῷ 55 σχήμ. τῦ δὲ + τῷ 54), καὶ γενομένυ $\text{HT} = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon}$, ἡ κατασκευὴ ἔσεται ἡ αὐτή.

175. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Τῦ λόγυ, ὃν ἔχει τὸ τῆς ἐπιπτώσεως ἡμίτονον πρὸς τὸ τῆς θραύσεως, μὴ ὄντος τῦ αὐτῦ ἐπὶ πάντων τῶν διαφανῶν σωμάτων, πρὶν ἢ ζητῆσαι τὴν καυςικὴν, ἀνάγκη γνῶναι τὸν λόγον $\mu : \nu$, ἐπὶ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς σύγκειται ἡ καμπύλη, ἧς ζητεῖται ἡ καυςική.

176. Ἐὰν μ ἄπειρον ᾖ ὡς πρὸς τὸ ν, ἡ θραυςὴ ἀκτὶς ΜΖ πεσεῖται ἐπὶ τῆς ΓΜ καθέτυ, ἡ δὲ διὰ θραύσεως καυςικὴ γενήσεται ἐξειλιγμένη· τηνικαῦτα γὰρ εὑρεθήσεται $\text{MZ} = \beta$, ἥτις ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει γίνεται $= \text{M}\Gamma$.

Ἐὰν ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς (σχ. 54) ΒΑ κάθετος ᾖ τῇ καμπύλῃ, τηνικαῦτα αἱ γραμμαὶ ΜΕ, ΜΘ γενήσονται ἴσαι καὶ ἀλλήλαις, καὶ τῇ ἀκτῖνι ΜΓ· τηνικαῦτα ἄρα $\alpha = \beta$· καὶ ὑποτιθεμένων τῶν τεταγμένων ν παραλλήλων, προσδιορισθήσεται $\text{MZ} = \frac{\beta\beta\mu\nu}{\beta\mu\nu - \alpha\nu} = \frac{\beta\mu}{\mu - \alpha}$.

177. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω ἡ καμπύλη ΑΔ (σχ. 56) τεταρτημόριον κύκλου, οὗ κέντρον ἔστω τὸ Κ, καὶ αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες παράλληλαι καὶ κάθετοι τῇ ΔΚ, ὑποτεθείσθω δὲ καὶ $\mu : \nu :: 3 : 2$· τούτων τεθέντων, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα ΜΖ τῆς καυστικῆς.

Ἐπεὶ πᾶσαι αἱ κυκλικαὶ ἀκτῖνες κατὰ τὸ κέντρον συνίασι, τὸ σημεῖον Κ ἔσται τοῦ κύκλου ἡ ἐνειλιγμένη· ἐὰν ἄρα γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΚΕΜ, οὗ ἡ διάμετρος ΚΜ εἴη ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΔ, καὶ γένηται $3 : 2 ::$ ΚΕ : ΚΘ, ἢ $\text{K}\Theta = \frac{2}{3}\,\text{KE}$, ἡ ἀδιόριστος ΜΘ ἔσται ἡ θραυστὴ ἀκτὶς, ἡ δὲ ΜΖ διορισθήσεται, ὥσπερ ἀνωτέρω δέδεικται.

Ἵνα εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Η, καθ' ὃ ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς ΒΑ (προαχθεῖσα) πρὸς ὀρθὰς τῷ κυκλικῷ τεταρτημορίῳ ἐπιψαύει τῆς καυστικῆς, εἰλήφθω ὁ τύπος $\frac{\beta\mu}{\mu - \nu}$, ὅστις γίνεται $\frac{3\beta}{3 - 2} = 3\beta = 3\text{AK}$.

Ἐὰν γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΔΝΚ, οὗ διάμετρος εἴη ἡ ΚΔ, καὶ γένηται $\text{KN} = \frac{2}{3}\,\text{K}\Delta$, τὸ Ν σημεῖον ἔσται ἐν τῇ καυστικῇ· ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀκτὶς ΒΔ ἐπιψαύει τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Δ, ἔσται ΜΕ (σχ. 29) $= \alpha = 0$· ἄρα $\text{MZ} = \frac{\beta\beta\mu\nu}{\beta\mu\nu - \alpha\nu - \alpha\alpha\nu}$ γίνεται $= \frac{\beta\beta\mu\nu}{\beta\mu\nu} = \beta = \text{M}\Theta$· ἄρα κτ.

Τὸ τόξον ΖΗ (σχ. 30) ἐστιν $= \mathrm{AH} - \mathrm{MZ} - \frac{1}{3}\,\Pi\mathrm{M}$, ἡ δὲ ὅλη καυστικὴ $\mathrm{HN} = 3\beta - \Delta\mathrm{N} - \frac{1}{3}\,\mathrm{AK} = 3\beta - \frac{2}{3}\beta - \Delta\mathrm{N} = \frac{7}{3}\beta - \Delta\mathrm{N}$· ἀλλὰ $\mathrm{KN} = \frac{2}{3}\,\mathrm{K}\Delta = \frac{2}{3}\beta$· καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΝΔ δίδωσι $\Delta\mathrm{N}^2 = \beta^2 - \frac{4}{9}\beta^2 = \frac{5}{9}\beta^2$, ἢ $\Delta\mathrm{N} = \frac{\beta\sqrt{5}}{3}$· ἄρα $\mathrm{HN} = \frac{\beta.(7 - \sqrt{5})}{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν σημείων τῆς καμπῆς καὶ τῆς ἀνακάμψεως.

178. Τὸ σημεῖον Δ, καθ' ὃ ἡ καμπύλη ἐκ κοίλης γίνεται κυρτὴ, ἢ τοὐναντίον (σχ. 57, 58), σημεῖον καμπῆς ὀνομάζεται· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη μΔΜ (σχ. 33, 34), ἐκ τοῦ μ ἐπὶ τὸ Δ φθάσασα, τρέψῃ τὴν ὁδὸν αὐτῆς πρὸς τὸ Μ, τὸ Δ ἀκούει σημεῖον ἀνακάμψεως· ἐὰν οὖν ἀναμνησθῶμεν τῶν εἰρημένων (83, 84) περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, ῥαδίως κατανοήσομεν, ὅτι ὁ τοῦ δυ πρὸς δχ λόγος, εἴτ' οὖν $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$ ἐστι πάντως ἐλάχιστος (σχ. 51) πρὸς τῷ τῆς καμπῆς σημείῳ (ἐστι δὲ αὐτὸ τοῦτο καὶ τὸ $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2}$)· κατὰ γὰρ τὰ ἐκεῖθι εἰρημένα αἱ δυ, μειοῦνται μὲν ἐν τοῖς κοίλοις ἀπὸ τοῦ Α μέχρι τοῦ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ αὔξουσιν ἐν τοῖς κυρτοῖς· τοὐναντίον δὲ ἐπὶ τοῦ 32 σχήμ.

ἄρα ἐν τῇ περιπτώσει σημείου καμπῆς ὁ λόγος $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$, αὔξει μὲν μέχρι τοῦ Δ, ἀπομειοῦται δ' ἀπὸ τοῦ Δ, ἢ καὶ τὐναντίον· ἄρα πρὸς τῷ Δ ἀναφυήσεται μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον· τὸ δ' ἀπειροστὸν ἔσται $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi}$ (ἀτρέπτου ὑποτιθεμένου τοῦ $\delta\chi$) $= 0$, ἢ $= \infty$· ἄρα καὶ $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2} = 0$, ἢ $= \infty$· αὐτὸ δὲ τοῦτο ἔσεται καὶ ἐπὶ τοῦ Δ σημείου τῆς ἀνακάμψεως (σχ. 59, 60)· εἰς ἄρα εὕρεσιν τῶν σημείων τῆς καμπῆς καὶ τῆς ἀνακάμψεως ἐν καμπύλαις, ὧν εἰσιν αἱ τεταγμέναι παράλληλοι, ἀπόχρη ὑποθέσθαι $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2} = 0$, ἢ $= \infty$, ἢ ὃ ταὐτὸν, $\delta\delta\upsilon = 0$, ἢ $= \infty$ (*).

179. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εὐκετῶς κατανοεῖται, ὡς ἀχθείσης τῆς ἀπτομένης μΔι, καὶ ὑποτεθείσης μν = ΔΣ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς Σρ (σχ. 57), ἢ τῆς Σι (σχ. 58), ἐκ τῶν ὁμοίων καὶ ἴσων τριγώνων μΔν, ΔΣι ἔσται Σι = Δν· ἄρα Σρ > Σι = Δν (σχ. 31)· ἀλλὰ Σρ < Δν (σχ. 58)· ἄρα αἱ δυ, προϊοῦσαι ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ, ἀπομειοῦνται, αὔξουσι δὲ ἀπὸ τοῦ Δ μέχρι τοῦ Μ (σχ. 57)· τὐναντίον δὲ γίνεται ἐν τῷ 32 σχήματι· ἄρα ὁ λόγος

(*) Οὐχ' ὅτι $\delta\delta\upsilon$ πραγματικῶς ἀποκαθίσταται $= \infty$, ἀλλ' ὅτι ἐκ ταύτης τῆς ὑποθέσεως τὸ αὐτὸ ἀποτελεῖται, ὃ καὶ ἐκ $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2} = \infty$, ὡς μικρὸν ἐπιστήσασι ταῖς δυνάμεσι τοῦ $\delta\delta\upsilon$, ἐν τοῖς ἑφεξῆς ὑποδείγμασι, κατάδηλον γίνεται.

$\frac{\delta \upsilon}{\delta \chi}$ ἐςὶ μέγιςον ἢ ἐλάχιςον πρὸς τῷ Δ, ὥσπερ προεί-ρηται.

180. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** Εὑρεῖν τὸ σημεῖον τῆς καμπῆς Δ ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΝ (σχ. 61), ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν $\alpha\chi^2 = \upsilon(\alpha\alpha + \chi\chi)$.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΑΓ $= \chi$, ϗ ΑΒ $= \alpha$, ϗ ΓΔ $= \upsilon = \frac{\alpha\chi^2}{\alpha\alpha + \chi\chi}$· ἄρα $\delta\upsilon = \frac{2\alpha^3\chi\delta\chi + 2\alpha\chi^3\delta\chi - 2\alpha\chi^3\delta\chi}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^2}$ $= \frac{2\alpha^3\chi\delta\chi}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^2}$, ϗ $\delta\delta\upsilon =$

$$\frac{2\alpha^3\delta\chi^2(\alpha\alpha + \chi\chi)^2 - 4.\alpha^3\chi\delta\chi.2\chi\delta\chi.(\alpha^2 + \chi^2)}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^4},$$

(ὑποτιθεμένȣ ἀτρέπτȣ τȣ͂ $\delta\chi$) $=$

$$\frac{(2\alpha^7 - 4\alpha^5\chi^2 - 6\alpha^3\chi^4).\delta\chi^2}{(\alpha\alpha+\chi\chi)^4} = 0$$

· πολλαπλασιασμῷ δὲ διὰ τȣ͂ παρονομαςȣ͂, ϗ διαιρέσει διὰ $\alpha^3\delta\chi^2$, προέρχεται $2\alpha^4 - 4\alpha^2\chi^2 - 6\chi^4 = 0$· διαιρέσει δὲ διὰ $\alpha^2 + \chi^2$, εὑρίσκεται $2\alpha^2 - 6\chi^2 = 0$, ἢ $\chi^2 = \frac{2}{6}\alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha^2$, ϗ $\chi = \sqrt{(\frac{1}{3}\alpha^2)}$· λαμβανομένης ἄρα τῆς ΑΓ μέσης ἀναλόγȣ τῶν α, $\frac{1}{3}\alpha$, ἡ τεταγμένη ΓΔ συναντήσει τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ ζητȣ́μενον σημεῖον.

181. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** Εὑρεῖν τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον Δ ἐν καμπύλῃ τῇ ΑΔ, ἧς αἱ τεταγμέναι τρίται εἰσὶν ἀνάλογοι τῶν ἐπὶ τȣ͂ ἡμικυκλίȣ ΑΜΒ, ϗ τῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς Αμ τεταγμένων (σχ. 62).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω τȣ͂ κύκλȣ ἡ διάμετρος $= \alpha$, ϗ ἡ ἀποτετμημένη ΑΓ $= \chi$, ϗ ἡ τȣ͂ κύκλȣ τεταγμένη ΓΜ $= \tau$, ϗ ἡ τῆς παραβολῆς τεταγμένη Γμ $= \upsilon$, ϗ ἡ τε ταγμένη τῆς προτεθείσης καμπύλης ΓΔ $=$ ω· ἐκεῖ ἐςὶ $\tau : \upsilon :: \upsilon : \omega = \frac{\upsilon\upsilon}{\tau}$· τιθεμένης δὲ τῆς παραβολικῆς παραμέτρȣ $= \pi$, ἔςαι $\upsilon^2 = \pi\chi$, ϗ διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, $\tau = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$· ἀντικαθιςαμένων ἄρα τȣ́των τῶν δυνάμεων, γίνεται $\omega = \frac{\pi\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· ὅθεν $\delta\omega = \frac{\alpha\pi\chi\delta\chi}{2.(\alpha\chi - \chi\chi).\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· λαμβανομένων δὲ ϗ τῶν δευτέρων ἀπειροςῶν, ὑποτιθεμένȣ ἀτρέπτȣ τȣ̃ δχ, πορισθήσεται (διαιρέσει διὰ δχ, ϗ πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ $\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ϗ τȣ̃ κλάσματος ἀφανισμῷ) $\delta\delta\omega = 0 = 2\alpha\pi\,(\alpha\chi - \chi\chi)^2 - 3\alpha\pi\chi\,(\alpha - 2\chi).(\alpha\chi - \chi\chi)$· διαιρέσει δὲ διὰ $(\alpha\chi - \chi\chi)$ ϗ μεταθέσει, πορισθήσεται $2\alpha^2\pi\chi - 2\alpha\pi\chi^2 = 3\alpha\alpha\pi\chi - 6\alpha\pi\chi^2$, ἢ $2\alpha - 2\chi = 3\alpha - 6\chi$· ὅθεν $4\chi = \alpha$, ϗ $\chi = \frac{1}{4}\alpha$· ἐὰν ἄρα γένηται $\mathrm{A\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{4}$, ἡ τεταγμένη ΓΔ συναντήσει τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον.

182. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὸ τῆς ἀνακάμψεως σημεῖον ἐν καμπύλῃ τῇ μΔΜ, ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν $\upsilon^5 = \alpha\chi^4 = \chi^4$, ὑποτιθεμένȣ τȣ̃ $\alpha = 1$ (σχ. 62. Α).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω $\mathrm{A\Pi} = \chi$, ϗ $\mathrm{\Pi M} = \upsilon$· ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ἔςαι $5\upsilon^4\delta\upsilon = 4\chi^3\delta\chi$, ϗ $\delta\upsilon = \frac{4}{5} \times \frac{\chi^3\delta\chi}{\upsilon^4} = \frac{4}{5}\delta\chi\left(\frac{\chi^3}{\chi^{\frac{16}{5}}}\right)$ (*)· ἀφαιρȣμένȣ ἄρα τȣ̃ κατὰ τὸν

(*) Καὶ γὰρ $\upsilon = \chi^{\frac{4}{5}}$, $\upsilon^4 = \chi^{\frac{16}{5}}$.

διαιρέτην δείκτου $\frac{\iota\theta}{\epsilon}$ ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον $3 = \frac{\iota\epsilon}{\epsilon}$, γίνεται $\delta\upsilon = \frac{\delta}{\epsilon} \times \delta\chi \cdot \chi^{-\frac{\alpha}{\epsilon}}$, $\delta\delta\upsilon = -\frac{\delta}{\kappa\epsilon}\,\delta\chi^2\,(\chi)^{-\frac{\alpha}{\epsilon}-1}$ (ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$)· ἀλλὰ $-\frac{\alpha}{\epsilon} - 1 = -\frac{\varsigma}{\epsilon}$· ἄρα $\delta\delta\upsilon = \left(-\frac{\delta}{\kappa\epsilon} \times \frac{1}{\chi^{\frac{\varsigma}{\epsilon}}}\right) \times \delta\chi^2$· ὑποτιθεμένου οὖν τοῦ $\delta\delta\upsilon = 0$, οὐδὲν ὥστε καὶ γνωσθῆναι πρόεισιν· ἀλλ' εἴπερ γένοιτο $\delta\delta\upsilon = \infty$, πορίζεται $\chi = 0$· ὅθεν καθίσταται δῆλον, ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον συστοιχεῖ τῇ τῶν χ ἀρχῇ Α, ἔνθα $\mathrm{A\Pi} = 0$· ἀντικαθισταμένης δὲ ταύτης τῆς τοῦ χ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει, εὑρεθήσεται $\upsilon^5 = 0$, καὶ $\upsilon = 0$.

183. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος τουτὶ ἔχει δυσχερές, ὅτι οὐ διακρίνεται τὸ τῆς καμπῆς τοῦ τῆς ἀνακάμψεως σημείου, καὶ ὅτι ἐξαπατᾷν ἡμᾶς δύναται, ἡγουμένους ἅπαν καμπύλης σημεῖον, εὑρισκόμενον ἐκ τῆς ὑποθέσεως $\delta\delta\upsilon = 0$, ἢ $\delta\delta\upsilon = \infty$, εἶναι σημεῖον ἀνακάμψεως, ἢ καμπῆς, ὅπερ ἥκιστα ἀληθές· ὑποτιθεμένου γὰρ ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$, ἀποφέρεται ἐκ τῆς τοῦ κύκλου ἐξισώσεως $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi - \chi\chi$, $\delta\delta\upsilon =$

$$\frac{-\alpha\alpha\delta\chi^2}{(2\alpha\chi - \chi\chi)\cdot\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}}$$

· ἐὰν δὲ γένηται $\delta\delta\upsilon = \infty$, εὑρεθήσεται ὁ παρονομαστὴς $= 0$, ἢ $2\alpha\chi - \chi\chi = 0$, $2\alpha\chi = \chi\chi$, $2\alpha = \chi$, ὅπερ μόνον ἐνδείκνυσι πρὸς τῷ τῆς διαμέτρου πέρατι τὴν ἁπτομένην ταῖς τεταγμέναις οὖσαν παράλληλον· οὐκοῦν ἄχρηστον ἔσται μέθοδον ἀποδοῦναι ἑτέραν.

184. Ὑπεθέμεθα (142) μέτρον τῆς κατὰ καμπυ-

λίτητα γωνίας ΔΓΛ (σχ. 30) = ξ τὸ $\frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2}$. ὑποτιθεμένε δὲ ἀτρέπτε τῦ δχ, ποριϑήσεται ξ = $\frac{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2} = \frac{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2+\delta\upsilon^2}$. ὑποτίθησι δὲ ὁ τύπος ἕτος τὰς τεταγμένας ταῖς ἀποτετμημέναις καθέτες· ἐὰν δὲ αἱ τεταγμέναι ἀφ' ἑνὸς σημείε ἐξίωσι, κληθείσης Α τῆς κατὰ τὴν ἐνειλιγμένην ἀκτῖνος, ποριϑήσεται (150) Α $= \frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3+\delta\chi\delta\upsilon^2+\upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi-\upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$· ἐὰν μὲν ἡ ΓΞ ὑποτεθῇ εἶναι ἀκτὶς τῆς κατὰ τὸ Γ τῆς καμπύλης ΑΔ διὰ τῆς Ε ἑςίας γεγραμμένης ἐνειλιγμένης (σχ. 63), οἱ ὅμοιοι τομεῖς ΓΞΔ, ΔΓΛ παρέξεσι ΓΞ : $= \mathrm{A} : \Gamma\Delta :: \Gamma\Delta : \Delta\Lambda = \frac{\Gamma\Delta^2}{\mathrm{A}} =$ $\frac{\delta\chi\delta\sigma^2+\upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi-\upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma}$, ἀντικαθιςαμένων ἀμέλει τῶν δυνάμεων τῆς ΓΔ = δσ, ᾗ τῆς κατὰ τὴν Α, καὶ γνωσθείσης τῆς $\delta\chi^3+\delta\chi\delta\upsilon^2$ ἴσης $= \delta\chi(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2) = \delta\chi\delta\sigma^2$· νῦν ὖν βελομένοις εὑρεῖν τὴν ξ δύναμιν τῆς ὑπὸ ΔΓΛ γωνίας, ὑποτεθείσης τῆς ἀκτῖνος = 1, γενέσθω $\Gamma\Delta = \delta\sigma$ (*) $: 1 :: \Delta\Lambda : \xi = \frac{\Delta\Lambda}{\delta\sigma} =$ $\frac{\delta\chi.\delta\sigma^2+\upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi-\upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma^2} = \frac{\delta\chi\delta\sigma^2-\upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma^2}$, ἀτρέπτε ὑποτιθεμένε τῦ δχ· τῦ δὲ ξ λειπτικῦ ὄντος, ἡ

(*) Ὑποτίθεται ἡ χορδὴ ΓΔ ἴση τῷ ἑαυτῆς τόξῳ, εἴγε τόξον ἀπειροςὸν ἴσον τῇ αὐτῇ χορδῇ ἐκληφθῆναι δύναται.

καμπύλη κυρτὴ ἔςαι πρὸς τὴν ἑςίαν Ε, ἢ πρὸς τὸν ἄξονα, εἰ διὰ τοῦ ἄξονος γεγραμμένη εἴη ἡ καμπύλη· προσεκτέον μέντοι τὸν νοῦν ταῖςδε ταῖς τοῦ ξ δυνάμεσι· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη διατεθειμένη ᾖ ὥς περ ἐν τῷ 64 σχήματι, δῆλον, ὅτι ἡ δύναμις τῆς ξ τὰ αὐτὰ ἕξει σύμβολα πρὸς τοῖς σημείοις μ, Μ ὡσαύτως ϗ ἐπὶ τοῦ 60 σχήματος· ἀλλ' ἐπὶ τοῦ 65 τὰ τῆς ξ σύμβολα ἔσονται διάφορα.

185. Εἴρηται (139), ὅτι μόνη ἡ κωνικὴ παραβολὴ ἔχει πρὸς τῇ κορυφῇ κυκλικὴν καμπυλότητα· ἀλλὰ γὰρ ζητουμένης τῆς κατὰ τὴν καμπυλότητα ἀκτῖνος παραβολῆς ἡστινοσοῦν, ἣν ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu} = \chi$, τῆς μὲν παραμέτρου ὑποτιθεμένης $= 1$, τοῦ δὲ μ δηλοῦντος ἀριθμὸν ὁντιναοῦν ὁλοχερῆ, ἢ κλασματίαν, διὰ τοῦ τύπου $\dfrac{\delta\sigma^3}{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ἀντικαθισαμένων τῶν δυνάμεων τοῦ δχ, ϗ τοῦ δδυ, εὑρεθήσεται ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς Α =

$$\frac{(\mu^2\upsilon^{2\mu-2}+1)\cdot\sqrt{(\mu^2\upsilon^{2\mu-2}+1)}}{(\mu\mu-\mu)\cdot\upsilon^{\mu-2}} = \frac{(\mu^2\upsilon^{2\mu-2}+1)^{\frac{3}{2}}}{(\mu\mu-\mu)\upsilon^{\mu-2}},$$

ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\mu > 2$ ϗ $\upsilon = 0$, εὑρίσκεται $A = \dfrac{1}{(\mu\mu-\mu)0}$ $= \infty$· ἐὰν δὲ $\mu < 2$, ὁ ἀριθμητὴς γίνεται $\left(\dfrac{\mu^2}{\upsilon^{2-2\mu}}\right)^{\frac{3}{2}}$ (παρορωμένης τῆς 1, ἥτις τηνικαῦτα ἀφανίζεται, εἴγε $\upsilon^{2-2\mu}$ γίνεται $= 0$, ϗ $\dfrac{\mu^2}{\upsilon^{2-2\mu}} = \infty$) $= \dfrac{\mu^3}{\upsilon^{3-3\mu}}$· ὑποτιθεμένου δὲ τοῦ $\mu\mu - \mu = \alpha$, ϗ τοῦ ἄρτι εὑρημένου κλάσματος διαιρεθέντος διὰ $\dfrac{\alpha}{\upsilon^{2-\mu}}$, ϗ γενομένου $\dfrac{\mu^3}{\alpha} = B$, πρόεισι Β. $\frac{\upsilon^{2}-\mu}{\upsilon^{3-3\mu}}$ = Β. $\upsilon^{2\mu-1}$, ἀφαιρουμένου τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην δείκτου ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον· ἐὰν δὲ ἡ $2\mu > 1$, εὑρίσκεται $B \times 0 = 0$· ἐὰν δὲ $2\mu = 1$, εὑρίσκεται $\mu = \frac{1}{2}$, καὶ $\upsilon^{\mu} = \chi$ γίνεται $\upsilon^{\frac{1}{2}} = \chi$, ἢ $\upsilon = \chi^{2}$· ὅθεν, μεταβαλλομένου, τοῦ μὲν χ εἰς υ, τοῦ δὲ υ εἰς χ, γίνεται $\upsilon^{2} = \chi$, ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς παραβολῆς, ὑποτιθεμένης τῆς παραμέτρου $= 1$· καὶ δὴ τηνικαῦτα $A = B = -\frac{1}{2}$· τὸ δὲ σύμβολον — δείκνυσιν, ὅτι ληπτέον ἐστὶ τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα ἐκ τῶν ἀντιθέτων μερῶν τῆς τῶν χ γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει γραμμὴ εὐθεῖα, ἁπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὴν κορυφήν, ὀρθῆς ὑποτιθεμένης τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας· ἐὰν ἡ $2\mu < 1$, ἢ $\mu > \frac{1}{2}$, γενομένου $2\mu - 1 = \nu$, εὑρίσκεται $A = B\upsilon^{-\nu} = \frac{B}{\upsilon^{\nu}} = \frac{B}{0}$ (ὑποτιθεμένου $\upsilon = 0$) $= \infty$· ἐὰν δὲ ἡ $\mu = 2$, τηνικαῦτα ὁ ἀριθμητὴς $(\mu^{2}\upsilon^{2\mu-2} + 1)^{\frac{3}{2}}$ γίνεται $= 1$, ὁ δὲ παρονομαστὴς $= (\mu\mu - \mu).\upsilon^{0} = \mu\mu - \mu$, ὅτι $\upsilon^{0} = 1$, καὶ $A = \frac{1}{2}$· ἀδύνατον δὲ ὑποθεῖναι $\mu = 1$· καὶ γὰρ γενήσεται $\upsilon = \chi$, ἐξίσωσις γραμμῆς εὐθείας.

Ἐκ τῶν εἰρημένων οὖν πρόδηλον, ὅτι ἐξαιρουμένης τῆς κωνικῆς, ἡ τῆς καμπυλότητος ἀκτὶς ἐστὶν $= 0$, ἢ ἄπειρος (*) πρὸς τῇ κορυφῇ τῶν ἄλλων παραβολῶν· ἔστι δὲ οὐδὲν σημεῖον ἐν κλωνὶ καμπύλης, ἧς ἡ καμπυλότης

(*) Ὑποτιθέμεθα γὰρ ἐνταῦθα πεπερασμένην τῆς κωνικῆς παραβολῆς τὴν παράμετρον.

ὐκ ἂν εἴη ἡ αὐτὴ τῇ πρὸς τῇ κορυφῇ παραβολῆς τινος· πᾶσαι δὲ αἱ παραβολαὶ ἔχουσι πρὸς τῇ ἑαυτῶν κορυφῇ σημεῖον καμπῆς, ἢ σημεῖον ἀνακάμψεως, ἐξαιρουμένης τῆς κωνικῆς· ἄρα πρὸς τῷ σημείῳ τῆς καμπῆς ϗ τῆς ἀνακάμψεως κλωνὸς καμπύλης ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἐστιν, ἤτοι $= 0$, ἢ $= \infty$.

186. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ἵνα δὲ κρεῖττον κατανοήσωσι τὰ εἰρημένα οἱ πρωτόπειροι, ἔσω καμπύλη ἡ ΜΔμ (σχ. 65), ἥτις ἔχει σημεῖον καμπῆς τὸ Δ, καθ' ὃ ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς εὕρηται ἄπειρος· δῆλον οὖν, ὅτι ὅσον αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες ΜΖ, νΖ, ιζ ἐγγὺς γίνονται τοῦ κατὰ τὴν καμπὴν σημείου Δ, τοσούτῳ προσεγγίζουσι τῷ γενέσθαι παράλληλοι· ϗ ἐπείπερ ἀεὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφεστήκασι τῇ καμπύλῃ, ἐὰν τὸ τοξίδιον Δι ἐκληφθῇ ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, ἡ ἀκτὶς ιζ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐπιστήσεται, ϗ παράλληλος ἔσεται τῇ εὐθείᾳ ΔΠ, ἥτις ὑποτίθεται κάθετος τῇ Δι· συμπεσεῖν ἄρα οὐδέποτε ἔχουσι, τοῦτ' ἐστιν αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες οὐδέποτε δύνανται ἐξ ὑπαρκτικῶν λειπτικαὶ γενέσθαι, εἴτ' οὖν μεταστῆναι ἐκ τῶν κοίλων ΜΔ ἐπὶ τὰ κυρτὰ Δμ, εἰ μὴ παράλληλοι γένοιντο· ὡσαύτως οὐδ' ἐκ τῶν κοίλων μΔ μεταβῆναι δύνανται, εἰ μὴ αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες παράλληλοι γένοιντο τῇ Δπ· ἀλλὰ γὰρ γραμμὴ εὐθεῖα ἡ βΔ ἐν τῇ μαθηματικῇ ἀκριβείᾳ οὐδέποτε ἐκληφθῆναι ἔχει ἀντὶ κυκλικοῦ τόξου (*), ϗ τῆς βζ ἀκτῖνος ὑποτεθεί-

(*) Ἔστιν ὅτε δυνατὸν ὑποθεῖναι τόξον κύκλου ἄπειρον, ἀκτῖνα ἔχοντος γραμμὴν εὐθεῖαν ἴσην τῇ αὐτοῦ ἁπτομένῃ· δῆλον γάρ, ὡς ἐὰν ὑποτεθῇ τὸ Δν τόξον πεπερασμένον, ἡ δ' αὐτοῦ ἀκτὶς ἄπειρος, ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου ϗ τῆς αὐτοῦ ἁπτομένης Δβ ἀνεπαίσθητος ἔσται· δυνατὸν ἄρα, ἄνευ ἀπάτης, τὰς γραμμὰς ταύτας ἰσαλλήλους ὑποτιθέναι.

σης = ∞· ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ περιπτώσει αἱ τοῖς πέρασι Δ, β ταύτης τῆς γραμμῆς κάθετοι συναντήσονται κατὰ τὸ κέντρον τȣ̃ κύκλȣ, ϗ συςήσȣσι γωνίαν (ὅσον ἄντις βȣ́λοιτο μικρὰν), ϗ αἱ γωνίαι τȣ̃ ὑπὸ τῶν δύω ἀκτίνων ϗ τῆ̃ Δβ γραμμῆς συνιςαμένȣ τριγώνȣ δυνήσονται πλεῖν ἢ δύω ὀρθὰς γωνίας· ὅπερ ἀδύνατον· ȣ̓ μὴν ἀλλ' ȣ̓δὲ ςρογγύλος ἔσεται ὁ τοιόςδε κύκλος· ὑποτιθεμένων ἄρα, Δν τȣ̃ τόξȣ, ϗ Δβ τῆς ἀπτομένης, ἀεὶ ἔςαι βραχύτι διάςημα μεταξὺ β ϗ ν, ὅσον ἂν εἴη μεγάλη ἡ τȣ̃ κύκλȣ ἀκτίς· ἄρα πρὸς τῷ σημείῳ Δ ȣ̓κ ἔςι κύκλος φιλῶν, ȣ̓δ' ἢν ὑποτεθῇ ἡ τȣ̃ κύκλȣ ἀκτὶς = ∞. ἐὰν δὲ αἱ ἀκτῖνες Μζ, νζ προϊȣ̃σαι ἀπομειῶνται (σχ. 66), προσπελάζȣσαι τῷ Δ, ὥςε τὸ σημεῖον Π, καθ' ὃ ἡ ΔΠ συναντᾷ τῇ ιζ, ἐπιπεσεῖν τῷ σημείῳ Δ, τὸ τόξον οΔν ȣ̓κ ἔσεται κυκλικόν· πȣ̃ γὰρ κείσεται αὐτȣ̃ τὸ κέντρον; ἆρ' ἐν τῷ π, ἢ ἐν τῷ Π; ἀλλ' ȣ̓δὲν μᾶλλον τεθῆναι δύναται ἐν τῷ π, ἢ ἐν τῷ Π· ἐπεὶ δὲ ȣ̓ δυνατὸν κεῖσθαι ἑκατέρωθεν τῆς ἀπτομένης βΔ, δῆλον, ὅτι τὸ τόξον τȣ̃το ȣ̓κ ἔςι κυκλικὸν (*)· συνᾴδει δὲ ταῦτα τοῖς εἰρημένοις (139), ὅτι ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τῶν παραβολῶν καμπυλότης, ἐξαιρȣμένης τῆς κωνικῆς, ȣ̓κ ἔςι κυκλική· ὅταν ȣ̃ν ἡ φιλȣ̃σα ἀκτὶς, ἡ σημείῳ τινὶ τῆς καμπύλης συςοιχȣ̃σα, ᾖ = 0, ἢ = ∞, συνάγειν δεῖ ὡς κατ' ἐκεῖνο τὸ σημεῖον ὑπάρχει καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ȣ̓δὲν δὲ ἔςαι σημεῖον καμπῆς, ἢ ἀνακάμψεως, εἴπερ αἱ τοῖς τȣ̃ Β, καθ' ὃ Α

(*) Εἰ δ' εἴποι τις, ὅτι ἔςιν ἐπὶ τῆς ἀπτομένης, ἀκατανόητον ἐρεῖ· δεῖ γὰρ εἶναι μεταξὺ τȣ̃ κέντρȣ ϗ τῆς ἀπτομένης διάςημά τι· ἄλλως γὰρ σημεῖον ἔςαι, ἀλλ' ȣ̓ κύκλος, τὸ σχῆμα.

$= 0$, ἢ $= \infty$, προσεχέσι σημείοις συςοιχῦσαι Α μὴ εἶεν διαφόρων συμβόλων.

187. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως κλωνὸς καμπύλης, ἧς αἱ τεταγμέναι εἶεν κάθετοι τῇ τῶν ἀποτετμημένων γραμμῇ, ἤ, ἧς αἱ τεταγμέναι ἐκπηγάζεσιν ἀφ' ἑςίας, εὑρεῖν αὐτῆς τὰ σημεῖα τῆς ἀνακάμψεως, ϗ τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς.

ΛΥΣΙΣ. Ζητηθήτω ἡ Α διάτινος τῶν προαποδεδομένων τύπων, ὡς ἂν ᾖ ἡ καμπύλη γεγραμμένη διὰ τῦ ἄξονος, ἢ διὰ τῆς ἑςίας· ϗ ὑποτεθείσθω Α $= 0$, εἶτα Α $= \infty$, καὶ ζητηθήτω ὁ χ· ζητηθήτωσαν εἶτα αἱ Α ὡς πρὸς τὰ σημεῖα μ, Μ τὰ προσεχῆ τῦ εὑρεθέντος σημείυ Δ· ϗ εἰ μὲν τὰ κατ' αὐτὰς σύμβολα ταυτίζοιντο, ὐκ ἔςαι πρὸς τῷ σημείῳ Δ, ὔτε καμπὴ, ὔτε ἀνάκαμψις· εἰ δὲ διαφέροιεν, ἔςαι ἤτοι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ἵνα δὲ διακριβείη, ὁπότερόν ἐςι, ζητηθήτω ἡ δύναμις τῆς τῷ ξ δηλωθείσης γωνίας πρὸς τοῖς σημείοις μ, Μ· ϗ εἰ μὲν τὰ σύμβολα τῆς ξ ταυτίζοιντο, πορισθήσεται σημεῖον ἀνακάμψεως· διαφερόντων δὲ, καμπῆς· ὄντος δὲ τῦ τῆς ξ σημείυ, τῦ συςοιχῦντος τῷ Μ, ὑπαρκτικῦ, ἡ καμπύλη (σχ. 64) ἔςαι, κοίλη μὲν πρὸς τὰ κάτω, κυρτὴ δὲ πρὸς τὰ ἄνω· ἐὰν δὲ τὸ σύμβολον τῆς ξ, τῆς συςοιχέσης τῷ σημείῳ μ (σχ. 67), ᾖ λειπτικὸν, τὸ τόξον Δμ ἔςαι, κυρτὸν μὲν πρὸς τὰ κάτω, κοῖλον δὲ πρὸς τὰ ἄνω· τὸ πᾶν εὐξύνετον γίνεται τὸν νῦν τοῖς προειρημένοις ἐπιςήσασι.

188. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς ϗ τῆς ἀνακάμψεως τῦ κλωνὸς καμπύλης, ἧς ἐξίσωσις $\upsilon = \sqrt[3]{(\alpha^3 + \chi^3)}$, ἢ $\upsilon^3 = \alpha^3 + \chi^3$· ἑκατέρα