γως ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΠ ἡ ΞΠ = κ· κ ἄρα ἔςαι ἡ ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ τεταγμένη, ἧς ἀποτετμημένη ἔςαι ΑΠ = π· ϗ ἐπείπερ ΝΞ = ΑΠ, ϗ ΛΝ = ΓΛ — ΓΝ = υ — ΓΝ, εὑρεθήσονται δύω ἕτεραι ἐξισώσεις π = χ + ΞΝ, ϗ κ = υ — ΚΝ, ἐν αἷς ΞΝ, ϗ ΓΝ δεδομέναι εἰσὶ διὰ χ ϗ υ· ἔσονται ἄρα ἐξισώσεις τρεῖς· ϗ ἐὰν διὰ τῶν δύω ἐξωσθῶσιν αἱ χ, υ, πορισθήσεται ἐξίσωσις τῶν π ϗ κ, ἐνδηλοῦσα τὴν τῆς ἐξειλιγμένης φύσιν.

154. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ καμπύλη γεγραμμένη ᾖ διὰ τῆς ἐςίας Ζ (σχ. 34), ϗ δοθῇ ἐξίσωσις μεταξὺ ΖΓ = υ, ϗ Γμ = δχ, εὑρεθήσεται ἥ τε φιλοῦσα ἀκτὶς ϗ αὐτῆς αἱ πλευραὶ διὰ υ· προσαχθείσης δὲ τῆς ΔΞ ἀκτῖνος ἐς τὸ Π, ὥςτε τὸ Π κέντρον εἶναι τοῦ ἐφεξῆς τόξου ΔΞ, ἡ ἐξειλιγμένη διελεύσεται διὰ τῶν σημείων Ξ, Π· ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΕΞ (ἀκτὶς τοῦ τόξου ΞΜ) ϗ ΕΠ, ϗ γενέσθω ΕΞ = π, ϗ ΞΜ = δκ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐξίσωσιν τῶν π, δκ· ἡ εὐθεῖα ΠΞ ἐςὶ διαφορὰ τῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου ΓΔ, ϗ τῆς τοῦ τόξου Δβ· αὕτη ἄρα ἐςὶ τὸ ἀπειροςὸν τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου· ἐςὶ δὲ αὖθις ΜΠ = δπ ϗ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΞΜΠ εὑρίσκεται ΠΞ, εἴτ' οὖν τὸ ἀπειροςὸν τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ἡ τὸ ἀπειροςὸν τῆς ἐξειλιγμένης $= \sqrt{\delta\pi^2 + \delta\kappa^2}$· ἐςὶ δὲ ϗ $ΕΞ = \pi = \sqrt{(ΕΝ^2 + ΞΝ^2)}$, ἤ, ἐπεὶ ΕΝ = υ — ΓΝ, $\pi = \sqrt{(\upsilon - ΓΝ)^2 + ΞΝ^2}$· ἀλλὰ ΓΝ, ϗ ΞΝ ἐκλαμβάνονται ὡς δεδομέναι δι υ· ἄρα πορισθήσονται δύω ἐξισώσεις διὰ τριῶν ἀγνώςων υ, π, δκ, ϗ τοῦ υ ἀποβαλλομένου, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις τῶν π, δκ, ἐπανήκουσα τῇ ἐξειλιγμένῃ.

155. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα τῆς παραβολῆς ΑΓ (σχ. 36).

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω ὁ τύπος $A = \frac{\beta\delta\upsilon}{\delta\pi}$, ἐν ᾧ π $= \frac{\beta\delta\chi}{\delta\sigma}$ (147)· καὶ ζητηθήτω πρῶτον ἡ δύναμις τοῦ π· ἔστω ἡ τῆς παραβολῆς παράμετρος $= 2\alpha$· ἡ δὲ ταύτης ἐξίσωσις ἔσται $2\alpha\chi = \upsilon\upsilon$, $2\alpha\delta\chi = 2\upsilon\delta\upsilon$, $\delta\chi = \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{2\alpha} = \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\alpha}$· οὐκοῦν $\delta\sigma = \sqrt{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}$ ἔσται $= \sqrt{(\frac{\upsilon^2\delta\upsilon^2}{\alpha\alpha} + \delta\upsilon^2)} = \sqrt{(\frac{\upsilon\upsilon\delta\upsilon^2 + \alpha\alpha\delta\upsilon^2}{\alpha\alpha})} = \frac{\delta\upsilon}{\alpha}\sqrt{(\upsilon^2 + \alpha\alpha)}$· τοιγαροῦν $\pi = \frac{\beta\delta\chi}{\delta\sigma} = \frac{\beta\upsilon}{\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}}$· ἄρα $\delta\pi = \frac{\beta\delta\upsilon}{\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}} - \frac{\beta\upsilon^2\delta\upsilon}{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}$ (*) $= \frac{\alpha\alpha\beta\delta\upsilon}{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}$· ἄρα $A = \frac{\beta\delta\upsilon}{\delta\pi} = \frac{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha}$· ἀλλ' α ἐστὶν ἡμιπαράμετρος· ἄρα ἡ ὑποκάθετος ΛΠ $= \alpha$· ἀλλ' ἐστι $\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}$ κάθετος· ἄρα ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς τῆς παραβολῆς ἐστιν ἴση τῷ κύβῳ τῆς καθέτου, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρου τετραγώνου.

156. Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ τῆς παραβολῆς ἐξειλιγμένη, ζητηθήτωσαν αἱ πλευραὶ ΓΝ καὶ ΝΞ· ἀχθείσης οὖν τῆς ΓΞ πρὸς ὀρθὰς τῇ κατὰ τὸ Γ σημεῖον ἁπτομένῃ,

(*) Λαμβάνεται τὸ ἀπειροστὸν, γινομένου κρειττοῦ πρῶτον τοῦ ἀριθμητοῦ, εἶτα τοῦ παρονομαστοῦ, ὅντινα δυνατὸν μεταθεῖναι ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν, ἀποδόντας αὐτῷ δείκτην τὸν $-\frac{1}{2}$.

τῇ συστοιχούσῃ τῇ ΛΓ τεταγμένῃ, καὶ ἴσης τῇ ἤδη εὑρημένῃ ποσότητι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΛΠ, ΓΝΞ, πρόεισι $\mathrm{K\Pi} : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Xi : \Gamma\mathrm{N} = \frac{\Gamma\Xi \times \Gamma\Lambda}{\Gamma\Pi} = \frac{\upsilon(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)}{\alpha\alpha}$· ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν τριγώνων προέρχεται $\Gamma\Lambda : \Gamma\mathrm{N} :: \Lambda\Pi : \mathrm{N}\Xi = \frac{\Gamma\mathrm{N}.\Lambda\Pi}{\Gamma\Lambda} = \frac{\upsilon\upsilon + \alpha\alpha}{\alpha}$, ὅθεν ἀποφέρονται αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις $\pi = \chi + \mathrm{N}\Xi$ (*) $= \chi + \frac{\upsilon\upsilon + \alpha\alpha}{\alpha} = \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} + \frac{\upsilon\upsilon + \alpha\alpha}{\alpha}$ (**), ἢ $2\alpha\pi = 3\upsilon\upsilon + 2\alpha\alpha$ (Α), $\kappa = \Gamma\mathrm{N} - \upsilon = \frac{\upsilon(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)}{\alpha\alpha} - \upsilon = \frac{\upsilon^3}{\alpha\alpha}$, εἶτ' οὖν $\alpha\alpha\kappa = \upsilon^3$· πεπολλαπλασιάσθω ἡ Α ἐξίσωσις ἐπὶ υ, καὶ διατεθείσθω οὕτω· $2\alpha\upsilon.(\pi - \alpha) = 3\upsilon^3$· ἄρα $2\alpha\upsilon.(\pi - \alpha) = 3\alpha\alpha\kappa$, ἢ $2\upsilon.(\pi - \alpha) = 3\alpha\kappa$, καὶ $\upsilon^3 = \frac{27}{8} \times \frac{\alpha^3\kappa^3}{(\pi - \alpha)^3}$· ἀντικατασταθείσης δὲ ταύτης τῆς τοῦ υ^3 δυνάμεως ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha\alpha\kappa = \upsilon^3$, προέρχεται $\alpha^2\kappa = \frac{27\,\alpha^3\kappa^3}{8\,(\pi - \alpha)^3}$, ἢ $\overline{\pi - \alpha}^3 = \frac{27\alpha}{8} \times \kappa^2$, ἐξίσωσις τῆς δευτέρας κυβικῆς παραβολῆς, ἣν ἔξεσι κατασκευάσαι οὕτως· εἰλήφθω $\mathrm{AM} = \alpha$ (ἔστι δὲ αὕτη ἡμιπαράμετρος τῆς

(*) Εἴρηται περὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως (153)·

(**) Ἐκ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $2\alpha\chi = \upsilon\upsilon$ προέρχεται $\chi = \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha}$.

προτεθείσης παραβολῆς), ᾗ ληφθείσης τῆς ΜΡ ὡς ἄξονος τῶν ἀποτετμημένων, γενέσθω τὸ ἀφ' ἑκάστης τεταγμένης ΡΞ τετράγωνον ἴσον τῷ κύβῳ τῦ $x - \alpha$, ἢ ἴσον τῷ κύβῳ τῆς ΜΡ, διαιρεθέντι διὰ τῆς παραμέτρυ $\frac{27\alpha}{8}$· ἐντεῦθεν δυνατὸν συναγαγεῖν α. ὅτι ΓΞ ἐςιν $= \alpha$, ὅταν ᾖ $\upsilon =$ ο, τῦτ' ἔςι πρὸς τῇ κορυφῇ Α τῆς παραβολῆς· ἄρα πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς παραβολῆς ἡ φιλῦσα ἀκτὶς ἐςιν $=$ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ· β'. ῥᾳδίως ἐξευρίσκεται ἡ εὔθυνσις τῆς δευτέρας κυβικῆς παραβολῆς, εἴγε τὸ τόξον ΜΞ ἔςιν ἴσον τῇ διαφορᾷ τῆς φιλύσης ἀκτῖνος ΓΞ, ᾗ τῆς ΑΜ εὐθείας· ἄρα τὸ τόξον $ΜΞ = \frac{(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha} - \alpha$, ἀλλὰ $\upsilon\upsilon =$ $\frac{2\alpha x - 2\alpha\alpha}{8}$· ἄρα $ΜΞ = \frac{(2\alpha x + \alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha\sqrt{22}} - \alpha$.

157. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ κλὼν ΑΖ ἕξει ἐξειλιγμένην τὸν κλῶνα ΜΣ, ἡ δὲ δευτέρα κυβικὴ παραβολὴ ἔχει ἐν σημείῳ ἀντιςροφῆς τὸ Μ ἀντίςοιχον τῇ ἐλαχίςῃ φιλύσῃ ἀκτῖνι ΜΑ· ἐὰν δὲ ληφθῶσιν αἱ συντεταγμέναι πρὸς τῷ σημείῳ Μ, ᾗ γένηται $ΜΡ = x - \alpha = \upsilon$, ᾗ αἱ ἀποτετμημέναι (λαμβανόμεναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ϐΜ) $ΡΞ = Μβ = \chi$, ᾗ ἡ παράμετρος $= \vartheta$, εὑρεθήσεται $\upsilon^3 = \vartheta\chi^2$, ἐξίσωσις τῆς ἐξειλιγμένης· ἐντεῦθεν δὲ κατανοεῖται ῥᾷςα, ὡς πᾶσα καμπύλη ἔχουσα σημεῖον, καθ' ὃ ἐςι μεγίςη ἡ καμπυλότης, ἢ ἐλαχίςη, ἔχει ἐξειλιγμένην δυοῖν εὐμοιρῦσαν κλωνῶν· τὸ δὲ σημεῖον ταύτης, τὸ ἀντιςοιχῦν τῇ μεγίςῃ, ἢ τῇ ἐλαχίςῃ, φιλύσῃ ἀκτῖνι, ἐςι σημεῖον ἀντιςροφῆς, ἢ καμπῆς· τὰ δὲ εἰρημένα ἐξικανοῖ τὴν τῆς προτάσεως ἐκδηλῶσαι

ἀλήθειαν, ὅταν ἡ φιλεσα ἀκτὶς ᾖ μεγίστη· τὰ δὲ ῥηθησόμενα ἐπὶ τῆς ἐξειλιγμένης τῆς ἐλλείψεως σαφὲς τὸ πρᾶγμα ἀπεργάζωνται, ὅταν ἡ φιλεσα ἀκτὶς ᾖ μεγίστη.

158. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὴν φιλεσαν ἀκτῖνα τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς.

ΛΤΣΙΣ. Ἔστω ὁ ἄξων $=\alpha$, καὶ ἡ παράμετρος $=\pi$, καὶ ἡ ἀποτετμημένη ΑΛ $=\chi$· ἄρα ἔσαι $\upsilon^2 = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{\alpha}$, καὶ $\upsilon = \sqrt{(\pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{\alpha})}$ (Τ. ψ. Γ. 249)· λαμβανομένων ἐν τῶν ἀπειροςῶν, εὑρίσκεται ἡ δύναμις τε $\delta\chi$· λαμβανομένων δὲ καὶ τῶν δευτέρων (ὑποτιθεμένε μέντοι ἀμεταβλήτε τε $\delta\chi$), εὑρίσκεται ἡ δύναμις τε $\delta\delta\upsilon$· ἀντικαθισαμένων δὲ τῶνδε τῶν δυνάμεων ἐν τῷ εὑρεθέντι τύπῳ

(145) $\frac{\delta\sigma^2}{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ἐπεὶ $\delta\sigma = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$, εὑρεθήσεται Α $=$

$$\frac{(\alpha\alpha\pi\pi \mp 4\alpha\pi\pi\chi + 4\pi\pi\chi\chi + 4\alpha^2\pi\chi \mp 4\alpha\pi\chi^2)}{2\alpha^3\pi^2}\times$$

$$\sqrt{(\alpha^2\pi^2 \mp 4\alpha\pi\pi\chi + 4\pi\pi\chi\chi + 4\alpha\alpha\pi\chi \mp 4\alpha\pi\chi^2)}\text{·}$$

ζητηθεῖσα μέντοι ἡ δύναμις τῆς καθέτε, ἥτις (72) ἐσὶν $= \frac{\iota\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\delta\chi}$, εὑρεθήσεται $=$

$$\frac{\sqrt{(\alpha^2\pi^2 \mp 4\alpha\pi\pi\chi + 4\pi\pi\chi\chi + 4\alpha\alpha\pi\chi \mp 7\alpha\pi\chi^2)}}{2\alpha}.$$

ἄυτη δὲ ἡ ποσότης ὑποτεθείσθω $=\mu$· ἐὰν ἓν αὕτη κυβισθῇ, καὶ διαιρεθῇ διὰ π^2, καὶ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4, ἤ, ὃ δὴ ταυτὸν, ἐὰν ὁ κύβος ταύτης τῆς ποσότητος διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{4}\pi^2$, εὑρεθήσεται Α Α $= \frac{\mu^3}{\frac{1}{4}\pi^2}$· ἐν ἄρα τῇ ἐλλείψει ϗ τῇ ὑπερβολῇ ἡ φιλῦσα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς καθέτυ κύβῳ, διαιρεθέντι διὰ τῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρυ τετραγώνυ.

Ἐν δὲ τῷ κύκλῳ ἤτε κάθετος ϗ ἡ ἡμιπαράμετρος εἰσὶν ἴσαι τῇ ἀκτῖνι· ἐν ἄρα τῷ κύκλῳ ἡ φιλῦσα ἀκτὶς ἐςιν ἴση τῇ κυκλικῇ ἀκτῖνι· ἡ δὲ αὐτῦ ἐξειλιγμένη σημεῖον ἐςὶ μοναδικὸν, ὅπερ ἐςὶν αὐτὸ τῦ κύκλυ τὸ κέντρον.

159. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐντεῦθεν ἄρα ϗ ἐκ τῦ (155) δῆλον, ὅτι ἁπάσης κωνικῆς τομῆς ἡ φιλῦσα ἀκτὶς ἴση ἐςὶ τῷ τῆς καθέτυ κύβῳ, διαιρεθέντι διὰ τῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρυ τετραγώνυ

160. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = 0$, ἔςαι $A = \frac{(\alpha\alpha\pi\pi)\sqrt{(\alpha^2\pi^2)}}{2\alpha^3\pi^2} = \frac{\alpha^3\pi^3}{2\alpha^3\pi^2} = \frac{1}{2}\pi$· ἄρα πρὸς τῇ κορυφῇ Α ἡ φιλῦσα ἀκτὶς τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς ὑπερβολῆς ἴση ἔςαι τῇ ἡμιπαραμέτρῳ· ϗ ἐπεὶ ἐν τῇ παραβολῇ (155) ἔςιν $A = \frac{(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha}$, ϗ πρὸς τῇ κορυφῇ Α (σχ. 36) $\upsilon = 0$, εὑρεθήσεται $A = \frac{(\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha} = \alpha$· ἀλλ' α ἐςὶν ἡμιπαράμετρος, τ' αὐτὸν ἄρα ἐπικρατεῖ κἀν τῇ παραβολῇ.

161. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = \frac{1}{2}\alpha$, εὑρεθήσεται ἐν τῇ ἐλλείψει (σχ. 37) $A = \Delta M = \frac{\alpha\sqrt{\alpha\pi}}{2\pi}$. κληθέντος δὲ τῦ ἐλάττονος ἄξονος $= \beta$, ἔςαι (Τ' ψ. Γ. 97) $\alpha : \beta :: \beta : \pi$, $\beta\beta = \alpha\pi$, ϗ $\beta = \sqrt{\alpha\pi}$· ἐὰν ἄρα γένηται $2\pi : \alpha :: \beta : \Delta M$, τὸ σημεῖον Μ ἔςαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ, ϗ ἅμα ἔσεται σημεῖον καμπῆς· ἐὰν

δὲ ὅλη ἡ ἔλλειψις ἐξελιχθῇ, ἡ ἐξειλιγμένη (σχ. 38) ἕξει τέσσαρας ἰσαλλήλους κλῶνας.

162. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα τῆς κυκλοειδοῦς ΑΔα (σχ. 39).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω τὸ κυκλικὸν τόξον $\Delta N = \psi$· ἐκεῖν ἔσαι $\Pi\Gamma = \upsilon = \Pi N + \psi =$ ἡμ. $\psi + \psi$, καὶ $\delta\upsilon = \delta.$ ἡμ $\psi + \delta\psi$· ὑποτεθείσθω ἡ ἀκτὶς $= 1$, καὶ $\Delta\Pi = \chi$· καὶ δὴ ἔσαι, διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, $\Pi N = \sqrt{(2\chi - \chi\chi)}$· ἄρα $\delta . \Pi N = \delta .$ ἡμ. $\psi = \delta . \sqrt{(2\chi - \chi\chi)} = \dfrac{\delta\chi - \chi\delta\chi}{\sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$· ἀλλὰ (35) τὸ ἀπειροςὸν ἡμιτόνου τόξου, οὗ ἀκτὶς $= 1$, ἐςὶν ἴσον τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ κατὰ τὸ τόξον ἀπειροςοῦ, καὶ τοῦ συνημιτόνου· ἐνταῦθα δὲ ἐςὶ συνημίτονον $P\Pi = 1 - \chi$· ἄρα τὸ ἀπειροςὸν τοῦ ἡμ. ψ ἐςὶν $= \delta\psi . (1 - \chi)$, καὶ $\delta\psi = \dfrac{\delta . \text{ἡμ.}\ \psi}{1 - \chi} = \dfrac{(1 - \chi) . \delta\chi}{(1 - \chi) . \sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$

$= \dfrac{\delta\chi}{\sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$· ἄρα $\delta\upsilon = \dfrac{(2 - \chi)\,\delta\chi}{\sqrt{\chi} . \sqrt{(2 - \chi)}} =$ $\dfrac{\delta\chi \sqrt{(2 - \chi)}}{\sqrt{\chi}} = \dfrac{\delta\chi}{\chi} \times \sqrt{(2\chi - \chi\chi)}$, καὶ $\delta\delta\upsilon =$ $\dfrac{-\delta\chi^2}{\chi . \sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$ (ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$)· ἄρα

$\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2 = \dfrac{2\delta\chi^2}{\chi}$, καὶ $A = \Gamma\Xi = \dfrac{\delta\sigma^3}{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}$,

ὑποτιθεμένου δὲ ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$, εὑρίσκεται $= 2 . \sqrt{(2 . (2 - \chi)}$· ἀλλ᾽ ἡ χορδὴ ΖΝ (Γεωμετ. 552) ἐςὶ μέση ἀνάλογον τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ μέρους ΖΠ· ἄρα $\Gamma\Xi = 2$ ΖΝ· ἀλλὰ ΔΝ παράλληλός ἐςι τῇ ἁπτομένῃ Γμ (Τψ. Γ. 335) καὶ ἔτι ΝΖ κάθετος ἐφέςηκε τῇ ΔΝ, τῆς ΓΞ καθ.

ἔτυ ἐφιςαμένης τῇ Γμ· ἄρα ΖΝ = Γν = νΞ, τυτέςιν, εὐθείας τῆς ΓΞ παραλλήλυ ἀγομένης τῇ χορδῇ ΡΝ, ϗ τῆς χορδῆς ταύτης διπλασιαζομένης, τὸ σημεῖον Ξ ἔςαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ· αὕτη δὲ ἡ καμπύλη διήκει διὰ τῦ σημείυ Α, ἔνθα ἡ φιλῦσα ἡμιδιάμετρος ἐςὶν = ο.

163. Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἐξειλιγμένη, σημειωτέον ὡς ἡ ΔΜ ἀκτὶς, ἡ συςοιχῦσα τῷ μέσῳ σημείῳ τῆς κυκλοειδῦς, ὀφείλει εἶναι διπλασία τῆς διαμέτρυ τῦ γεννήτορος κύκλυ· συςαθέντος ἄρα τῦ ὀρθογωνίυ ΑΒαβ, ἡ τῦ ΑΣΒ ἡμικυκλίυ διάμετρος ἔςαι = ΖΔ· ϗ, ἐπειδὴ Γν = νΞ, αἱ παράλληλοι πζ, ΠΓ ἴσον ἀπέχυσι τῆς Αα· τά τε τόξα ΑΣ, ΝΖ, ἐναπολαμβανόμενα ὑπὸ τῶν ἴσον ἀπεχυσῶν τύτων παραλλήλων, εἰσὶν ἴσα, ϗ αἱ αὐτῶν χορδαὶ ἑπομένως ἴσαι· ἄρα αἱ ΑΖΝ, νΑΣ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ΑΖ, ϗ τύτων τῶν χορδῶν, εἰσὶν ἴσαι, ϗ δὴ ΑΣ ἔςαι παράλληλος τῇ νΞ ϗ τῇ ΖΝ· ἔςαι δὲ ϗ Αν = ΣΞ· ἀλλὰ τὸ τόξον ΔΝ = ΓΝ = νΖ· ἄρα Αν ἴση τῷ τόξῳ ΖΝ· ἄρα τὸ τόξον ΖΝ = ΣΞ· ἄρα τὸ τόξον ΑΣ ἐςὶν ἴσον τῇ συςοιχέσῃ τεταγμένῃ ΣΞ, ἰδιότης αὕτη ἐξαίρετος τῆς κυκλοειδῦς, ϗ ἑπομένως ἡ καμπύλη ΑΞΜ ἐςὶν ἡμικυκλοειδής.

163. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα α΄. τὸ μῆκος τῆς ἡμικυκλοειδῦς διπλάσιόν ἐςι τῆς τῦ γεννήτορος κύκλυ διαμέτρυ, ϗ ἡ ὅλη κυκλοειδὴς τετραπλασία· ἄρα β΄. ἡ τῆς κυκλοειδῦς ἐξειλιγμένη καὶ αὕτη ἐςὶ κυκλοειδὴς, ὡς δέδεικται ϗ ἐν (Τ. ψ. Γ. 339), ἀλλὰ κατὰ θέσιν κειμένη ἐναντίαν· ἔχει γὰρ ἡ ἐξειλιγμένη σημεῖον καμπῆς κατὰ τὸ Μ, συνιςαμένη ὑπὸ δύω ἡμικυκλοειδῶν, ὧν ἑκατέρα ἴση τῷ ἡμίσει τῆς κυκλοειδῦς ΑΔα.

164. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Εὑρεῖν τὴν φιλῦσαν ἀκτῖνα τῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις κυκλικῆς ὑπερβολῆς.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΑΒ $=$ ΒΔ $= \alpha$ (σχ. 40), ϗ ΑΛ $= \chi$, ϗ ΑΓ $= \upsilon$· ἐκεῖ ἔςαι $\chi\upsilon = \alpha\alpha$· λαμβανομένων δὲ τῶν ἀπειροςῶν, ἔςαι $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi = 0$· ϗ ἐκ τούτων αὖθις τῶν δευτέρων, τῦ $\delta\chi$ τηρημένυ ἀτρέπτυ, εὑρίσκεται $\delta\delta\upsilon = \frac{-2\delta\chi\delta\upsilon}{\chi}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ τῆς πλευρᾶς ΓΝ $= \frac{-\delta\sigma^2}{\delta\delta\upsilon}$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὑπερβολῆς, εὑρεθήσεται ΓΝ $= \frac{\chi\delta\sigma^2}{2\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\chi(\delta\chi^2 + \delta\sigma^2)}{2\delta\chi\delta\upsilon}$· ἀλλ᾽ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi = 0$ προέρχεται $\delta\upsilon = \frac{-\upsilon\delta\chi}{\chi}$· ἄρα ΓΝ $= \frac{\chi^2 + \upsilon^2}{-2\upsilon}$· λειπτικῆς δὲ ὔσης ταύτης τῆς ποσότητος, ληπτέα τὴν ΓΝ ἐκ τῶν ἀντιθέτων τῆς τῶν ἀποτετμημένων γραμμῆς· ἤχθω ἡ ΑΓ, ϗ τῆς αὐτῆς προαγωγῆς γενομένης ΓΕ $= \frac{\text{ΑΓ}}{2}$, ἐςάθω αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΝ, ἀπαντῶσα τῇ ΛΓ (προαχθείσῃ) κατὰ τὸ Ν· ἡ τοίνυν πλευρὰ ΓΝ ἐντεῦθεν διορισθήσεται· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΛ, ΝΓΕ πρόεισι ΓΛ : ΓΑ :: ΓΕ : ΓΝ, εἴτ᾽ ὖν $\upsilon : \sqrt{(\chi\chi + \upsilon)} :: \frac{\sqrt{(\chi\chi + \upsilon\upsilon)}}{2}$: ΓΝ $= \frac{\chi\chi + \upsilon\upsilon}{2\upsilon}$, ἥτις ἐςὶν ἡ εὑρεθεῖσα ἤδη δύναμις, παρορωμένυ τῦ σημείυ, ὃ μόνον τὴν θέσιν τῆς ΓΝ δείκνυσι.

165. Ἤχθω ἤδη ἡ ΓΞ κάθετος τῇ καμπύλῃ, ϗ

ΝΞ παράλληλος ταῖς ἀποτετμημέναις· ἐκεῖν τὸ σημεῖον Ξ, καθ' ὃ συναντῶνται αὗται αἱ εὐθεῖαι, ἔςαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ· ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Π τῆς ἐξειλιγμένης, τὸ συςοιχῦν τῷ σημείῳ Δ, κορυφῇ τῆς καμπύλης, σημειωτέον ὡς ἡ ΑΔ ἐςὶ κανονικὴ τῆς καμπύλης· λαμβανομένης ἄρα $ΔΚ = \frac{ΑΔ}{2}$, ἠ ἀγομένης, τῆς μὲν ΚΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΚ, τῆς δὲ ΗΠ παραλλήλυ ταῖς ἀποτετμημέναις, τὸ σημεῖον Π, καθ' ὃ αὕτη ἡ εὐθεῖα συμβάλλει τῇ ΑΔ προσχθείσῃ, ἔςαι τὸ ζητέμενον· δῆλον γὰρ ὅτι $ΠΔ = ΑΔ$, ἠ $ΗΔ = ΒΔ$.

Ἀλλὰ περὶ μὲν τῆς φιλύσης ἀκτῖνος ἠ τῆς ἐξειλιγμένης, καίτοι βραχέα ὡς πρὸς ἃ τὸ πρᾶγμα ἀπαιτεῖ, ὑπέρπολλα μέντοι ὡς πρὸς τὴν ἡμῶν πρόθεσιν· τὸ γὰρ ταῦτα ἐπ' ἀκριβὲς ἐνερευνᾷν ἔργον πραγματείας ἰδίας πολυπόνου τε καὶ πολυτόμου, ἣν ὁ χρόνος καὶ ἡμῖν τοῖς τέτων κενομένοις χαρίσεται· ἰτέον ἦν ἤδη ἐπὶ τὰ ἐχόμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν Καυςικῶν δι' ἀντανακλάσεως ἠ τῶν διὰ θραύσεως.

166. ΛΗΜΜΑ. Ποσῶν τινων κειμένων τῶν $α$, $β$, $γ$, $ε$, ἐὰν τὸ δεύτερον τῦ πρώτε, ἠ τῦ δευτέρυ τὸ τρίτον κτ. ἀφαιρεθῶσι, τὸ τῶν αὐτῶν διαφορῶν ἄθροισμα $α - β + β - γ + γ - ε$ ἔςαι ἴσον τῷ $α - ε$, εἴτ' ἐν ἴσον τῇ τῦ μείζονος ἠ ἐλάττονος διαφορᾷ, ἠ ἑπομένως ἴσον τῷ μείζονι, εἴπερ τὸ ἔσχατον εἴη $= 0$.

Σαφὲς καθ' ἑαυτὸ τὸ λεγόμενον· πᾶσαι γὰρ αἱ μεταξὺ ποσότητες ἐκ τῶν ἐναντίων συμβόλων ἐξαφανίζονται.

167. Ἐὰν ἀκτὶς φωτὸς ἡ ΑΒ (σχ. 41), ἐκ τοῦ σημείου Α προϊοῦσα, ἐπιπέσῃ ἐπιπέδῳ ἐπιφανείᾳ τῇ πβ, ἢ καμπύλῃ ἐπιφανείᾳ τῇ ΞΒΔ, καὶ ἀνακλασθῇ κατὰ τὸ Γ, ὡς, τὴν μὲν ἐπιπίπτουσαν ἀκτῖνα εἶναι τὴν ΑΒ, τὴν δὲ ἀνακλωμένην τὴν ΒΓ, ἡ γωνία ΑΒΜ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἐπιπιπτούσης ἀκτῖνος, καὶ τῆς τῇ ἐπιφανείᾳ καθέτου ΒΜ, καλεῖται γωνία τῆς ἐπιπτώσεως, ἡ δὲ ΜΒΓ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς καθέτου ΜΒ, καὶ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΒΓ, γωνία ἀνακλάσεως· ἔστι δὲ ἀεὶ, ὡς πείρᾳ δείκνυται ἐν τοῖς φυσικοῖς, ἡ τῆς ἀνακλάσεως γωνία ἴση τῇ τῆς ἐπιπτώσεως· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΒΜ ἔστι παραπλήρωμα τῆς ΑΒπ = ΑΒΞ· ἡ γὰρ ὑπὸ πΒΞ γωνία ἐστὶν ἀπειροστή, ἡ δὲ ΜΒΓ παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ ΓΒβ = ΓΒΔ· ἄρα αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τῆς τε ἀνακλάσεως καὶ τῆς ἐπιπτώσεως καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, εἰσὶν ἰσάλληλαι.

168. Ἐὰν ἐπινοηθῶσιν ἀπειράριθμοι φωτοφυεῖς ἀκτῖνες ΖΑ, ΖΜ κτ. (σχ. 42), ἐκ τοῦ Ζ μὲν ἀναπηγάζουσαι, τῇ δὲ ΑΒ καμπύλῃ προσπίπτουσαι, κἀντεῦθεν ἀνακλώμεναι, καὶ τὴν γωνίαν τῆς ἐπιπτώσεως ἴσην τῇ τῆς ἀνακλάσεως ποιοῦσαι, ἡ καμπύλη βΞ, ἧς ἐπιψαύουσιν αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, ἢ ἡ καμπύλη βΡ (σχ. 43), ἧς ἐπιψαύουσιν αἱ προαγωγαὶ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων, ἀκούει καμπύλη καυστικὴ δι' ἀνακλάσεως· ἐὰν δὲ γένηται ἡ ἁπτομένη ΑΛ = ΑΖ (σχ. 46) καὶ ἐξελιχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΞβ, ἐπινοουμένου νήματος ἴσου τῇ καμπύλῃ βΞ σὺν τῇ εὐθείᾳ ΑΡ = Λ (ἀκτῖνι ἀνακλωμένῃ συστοιχοῦ

σῃ τῷ σημείῳ) τὸ σημεῖον Λ καταγράψει τὴν καμπύλην ΛΠ, ὥςε τὴν ἀπτομένην τῆς καυςικῆς ΠΞ ἀεὶ ἐξισῦσθαι τῇ μερίδι ΑΞ τῆς καυςικῆς σὺν τῇ εὐθείᾳ ΑΛ (εἴπερ ΑΡ γραμμὴ εὐθεῖα εἴη, δυνατὸν μέντοι ἐκδέξασθαι αὐτὴν ὡς εὐμοιρῦσαν ἀπειροςῆς καμπυλότητος, ϗ μέρος ὑπάρχυσαν τῆς καμπύλης ΒΞ)· ἐὰν ἐπινοηθῶσαν αἱ ἐπιπίπτυσαι ἀκτῖνες προσεχέςαται ΖΜ, Ζμ, ϗ αἱ συςοίχως ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες ΜΞ, μΞ προεκβεβλημέναι, ἔςτ᾽ ἂν συμβάλωσι τῇ γραμμῇ ΛΠ, ϗ κέντροις τοῖς Ζ, Ξ γραφῶσι τὰ τόξα ΜΝ, Μν, συςαθήσονται ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα ϗ ὅμοια τὰ ΜΝμ, Μνμ· ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία τῆς ἀνακλάσεως ἴση ἐςὶ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, ἔςαι ΝμΜ = ΞμΒ· ἀλλὰ ΞμΒ = Μμν (ὡς κατὰ κορυφὴν)· ἄρα τὰ δύω ταῦτα τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια· ϗ ἐπεὶ ἴση ἐςὶν αὐτοῖς ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνυσα, εἰσὶ ϗ ἴσα· ἄρα Νμ = μν· ἀλλὰ νμ ἐςιν ἡ διαφορὰ τῆς ΠΜ, ϗ μΝ τῆς ΖΜ· ϗ ἐπεὶ τῦτο ἐπικρατεῖ ἔντινι τῆς καμπύλης τόπῳ, ἔνθα κεῖται τὸ σημεῖον Μ· ἄρα ΜΠ — ΛΑ, ἢ ΑΡ + ΡΞ — ΜΞ, ἄθροισμα πασῶν τῶν διαφορῶν Νμ τῶν ἐν τῷ μέρει τῆς καμπύλης ΑΜ, (166) ἐςιν = ΖΜ — ΖΑ, ἀθροίσματι πασῶν τῶν διαφορῶν Νμ τῶν ἐν τῷ ΑΜ τῆς καμπύλης μέρει· συςαθήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις ΑΡ + ΡΞ — ΜΞ = ΞΜ — ΖΑ· ἄρα τὸ τόξον ΡΞ (τῆς καυςικῆς) ἐςιν = ΞΜ — ΖΑ + ΜΞ — ΑΡ, τῦτ᾽ ἔςι τὸ τόξον ΡΞ τῆς καυςικῆς ἐςιν ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἐπιπιπτυσῶν ἀκτίνων τῦ συςοιχῦντος τόξυ ΑΜ σὺν τῇ διαφορᾷ πασῶν τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων· ἐκληπτέον γὰρ τὴν ΑΡ ὡς ἀνακλωμένην ἀκτῖνα συςοιχῦσαν τῷ σημείῳ Α· ὅταν δὲ ἡ καυςικὴ ἄρχηται ἀπὸ τῦ Α, ἡ ἀκτὶς ἐςιν = ο· τῆς δὲ ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΑΡ (σχ. 17) ἐξελισσύσης τὸ ΡΞ μέρος τῆς καυςικῆς, ἵν' ἀφίκηται ἐπὶ ΜΞ, τηνικαῦτα εὑρεθήσεται ΡΞ = ΖΜ — ΖΑ + ΑΡ — ΜΞ, εἴγε τηνικαῦτα ἡ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων διαφορὰ ἐςὶν = ΡΞ + ΞΜ — ΑΡ· καθόλυ δὲ, ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτυσῶν ἴση ἐςὶ τῇ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων, συναπτομένυ μιᾷ τῶν ἀνακλωμένων τῦ μέρυς τῆς καυςικῆς, τῦ ἐξελισσομένυ πρὶν ἢ θατέρᾳ ἐπιπεσεῖν· ἐὰν δὲ κέντρῳ τῷ Ζ (σχ. 16, 17) γραφῇ τὸ τόξον Αα, δῆλον, ὅτι αΜ ἔςαι ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτυσῶν ἀκτίνων· ἐὰν δὲ τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ζ (σχ. 44) ἀπείρως ἀπέχῃ, αἱ ἐπιπίπτυσαι ἀκτῖνες ἐκληφθήσονται ὡς παράλληλοι, ϗ τὸ τόξον Αα δυνήσεται ἐκληφθῆναι ὡς εὐθεῖα κάθετος ταύταις ταῖς ἀκτῖσι· δῆλον δὲ, ὅτι, εὑρισκομένης τῆς συνδρομῆς τῶν προσεχεςάτων ἀκτίνων ΜΞ, μΞ (σχ. 16), πορισθήσεται τὸ Ξ σημεῖον τῆς καυςικῆς.

169. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθέντος σημείυ τῦ Μ καμπύλης τῆς ΑΜ (σχ. 45) ϗ σημείυ ἀκτινοβόλυ τῦ Ζ, εὑρεῖν τὸ μῆκος ΜΞ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος.

ΛΥΣΙΣ. Ζητηθήτω (διά τινος τῶν προαποδεδομένων τύπων) ἡ ἀκτὶς ΜΓ τῆς κατὰ τὸ Μ ἐξειλιγμένης, ϗ ληφθέντος τῦ ἀπειροςῦ τόξυ Μμ, ἐπινοηθήτωσαν αἱ ἐπιπίπτυσαι ϗ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, ἃς τὸ σχῆμα παρίςησι· ϗ κέντροις τοῖς Ζ, Ξ γεγράφθωσαν τὰ τόξα Μν, ΜΝ, ϗ ἤχθωσαν αἱ κάθετοι ΓΠ, Γπ, ΓΒ, Γβ ταῖς τε ἐπιπιπτύσαις, ϗ ταῖς ἀνακλωμέναις ἀκτῖσι· ϗ γενέσθω ΖΜ = υ, ϗ ΜΠ = ΜΒ (εἴγε τῶν γωνιῶν ΠΜΓ, ΒΜΓ ἴσων ὑσῶν, πάντα τὰ τῆς ΓΜ εὐθείας σημεῖα ἴσον ἀπέχυσι τῶν εὐθειῶν ΒΜ, ΜΖ) = α· τύτων τεθέντων, δῆλον ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων, ὅτι τὰ τρίγωνα Μνμ, ΜΝμ εἰσὶν ἴσα, ϗ ΜΝ = Μν· ἐπεὶ δὲ ϗ αἱ γωνίαι τῆς ἐπιπτώσεως εἰσὶν ἴσαι ταῖς τῆς ἀνακλάσεως, ἔςιν ἄρα ΓΠ = ΒΓ, ϗ Γπ = βΓ, ϗ ἑπομένως ΓΠ — Γπ = ΓΠ — ΓΣ = ΠΣ = ΓΒ — Γβ = Β϶· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΖΠΣ, ΖΜν εἰσὶν ὅμοια, καθὰ δὴ ϗ τὰ ΞΜν, ΞΒ϶· ἄρα ΖΜ = υ : ΖΠ = υ — α : : ΜΝ : ΠΣ, ἢ (συνθέσει τε ϗ ἀντιςροφῇ) 2υ — α : υ : : ΜΝ + ΠΣ = ΜΝ + Β϶ : Μν = ΜΝ : : ΜΞ + ΞΒ = ΜΒ = ΜΠ

$$= \alpha : \mathrm{M\Xi} = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha}.$$

Τῆς δὲ καμπύλης κυρτῆς ὔσης πρὸς τὸ Ζ, τὸ υ γενήσεται λειπτικὸν, ϗ εὑρεθήσεται $\mathrm{M\Xi} = \frac{-\alpha\upsilon}{-2\upsilon - \alpha} = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon + \alpha}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ τὸ υ ἄπειρον, τηνικαῦτα αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες (σχ. 44) ὡς παράλληλοι ἐκληφθήσονται, ϗ ἔςαι $\mathrm{M\Xi} = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon} = \frac{\alpha}{2}$.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (σχ. 45) ᾖ γεωμετρικὴ, δυνατὸν εὑρεῖν γεωμετρικῶς πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐξειλιγμένης· δυνατὸν δὲ εὑρεῖν διὰ τῆς ΑΜΒ (σχ. 42) καμπύλης ϗ γραμμὴν εὐθεῖαν ἴσην μέρει τινὶ τῷ ΡΞ τῆς καυςικῆς, ἥτις ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἔςαι εὐθύνσιμος.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (σχ. 43) κυρτὴ ᾖ πρὸς τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ζ, ἔςαι $\mathrm{M\Xi} = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon + \alpha}$, ποσότης ἀεὶ ὑπαρκτική· ὄυκὖν δεήσει ταύτην λαβεῖν, ἔνθα προσδιορίζεται ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ΜΞ· αἱ δὲ προσεχέςαται ἀκτῖνες ἔσονται τηνικαῦτα ἀποκλίνουσαι (*).

(*) Ἀποκλίνουσαι μὲν ἀκτῖνές εἰσιν αἱ ἀπ' ἀλλήλων ἀφ-

Ἐὰν (σχ. 45) ἡ καμπύλη ᾖ κοίλη πρὸς τὸ Ζ, ἡ δύναμις τῆς ΜΞ $= \frac{\alpha \upsilon}{2\upsilon - \alpha}$, ὑπαρκτικὴ μὲν ἔςαι, ὅταν ἡ $\upsilon > \frac{\alpha}{2}$, λειπτικὴ δὲ, ὅταν $\upsilon < \frac{\alpha}{2}$, ἄπειρος δὲ, ὅταν $\upsilon = \frac{\alpha}{2}$· ϗ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει συγκλινῦσιν, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀποκλινῦσιν, ἐν δὲ τῇ τρίτῃ παράλληλαι ἔσονται, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες.

Ἐὰν γραφῇ κύκλος, ὗ ἡ διάμετρος ΜΗ (σχ. 46) εἴη τὸ ἥμισυ τῆς φιλέσης ἀκτῖνος ΜΓ, διὰ τὰ ὀρθογώνια ὅμοια σχήματα ΜΚΗ, ΜΠΓ, ἔςαι ΜΚ $= \frac{\text{ΜΠ}}{2} = \frac{\alpha}{4}$ ϗ ΜΗ $= \frac{\text{ΜΓ}}{2}$· ὥςε, εἰ μὲν τὸ σημεῖον Ζ πίπτοι ἐπὶ τῦ Κ, εἴτ' ὖν ἐπὶ τῆς κυκλικῆς περιφερείας, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες ἔσονται παράλληλοι· εἰδ' ἐκτὸς τῦ κύκλυ, συγκλίνυσαι· ἀποκλίνυσαι δὲ, εἴπερ ἐντός.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (σχ. 47) ὑποτεθῇ παραβολὴ συνήθης· τὸ δ', ἀφ' ὗ προχέονται αἱ ἀκτῖνες, σημεῖον ε ὑπάρχῃ αὐτῆς ἡ ἑςία, διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτης τῆς καμπύλης, αἱ γωνίαι, αἱ συνιςάμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ϗ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος ϗ τῆς συςοιχέσης διαμέτρυ, εἰσὶν ἴσαι (ὡς φαίνεται ἐν ταῖς κωνικαῖς τομαῖς)· ἄρα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ΜΞ ἔςαι παράλληλος τῷ ἄξονι Αε.

ιςάμεναι, συγκλίνυσαι δὲ, αἱ κατὰ βραχὺ προσπελάζυσαι ἀλλήλαις.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ ᾖ ἔλλειψις (σχ. 48)· τὸ δὲ ἀκτινοβόλον σημεῖον ᾖ μία τῶν ἑςιῶν, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς διήξει διὰ τῆς ἑτέρας ἑςίας ε· κατὰ γὰρ τὴν τῆς καμπύλης ταύτης ἰδιότητα (Ὑψ. Γ. 104) αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης καὶ τῶν ὀρθίων πλευρῶν, εἰσὶν ἴσαι· ἄρα κτ.

Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (σχ. 49) ᾖ ὑπερβολή· τὸ δὲ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ε ᾖ μία τῶν ἑςιῶν, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, προαχθεῖσαι, διήξεσι διὰ τῆς ἑτέρας ἑςίας ε· ἐξερχόμεναι δὲ ἐκ τῦ ε, προαχθεῖσαι, διήξεσι διὰ τῦ Ε· συμβαίνει δὲ τῦτο, ὅτι αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης καὶ τῶν εὐθειῶν ΕΜ, Εμ, εἰσὶν ἴσαι (Ὑψ. Γ. 174).

170. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὴν δι' ἀνακλάσεως καυςικὴν τῆς παραβολῆς ΑΜ (σχ. 50), ὑποτιθεμένων παραλλήλων τῶν ἐπιπιπτεσῶν ἀκτίνων ΕΜ, καὶ καθέτων τῷ τῆς παραβολῆς ἄξονι ΑΡ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες εἰσὶ παράλληλοι, δυνατὸν ὑποθέσθαι $υ = \infty$· καὶ δὴ πορισθήσεται ΜΞ $= \frac{αυ}{2υ - α} = \frac{αυ}{2υ} = \frac{α}{2}$· ἐκ δὲ τῦ μέσυ Η τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐξειλιγμένης ἤχθω ἡ ΗΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΜΠ $= α$, καὶ ἀχθεισῶν τῶν ἄλλων εὐθειῶν, τῶν ἐπὶ τῦ σχήματος παριςαμένων, ἔςαι (διὰ τὰ ὅμοια σχήματα) ΜΓ : ΜΗ :: ΜΠ : ΜΚ :: 2 : 1 :: $α : \frac{α}{2}$· ἄρα ΜΚ $= \frac{α}{2} =$ ΜΞ· μεταφερομένης ἄρα τῆς ΜΚ ἐπὶ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΜΒ, καὶ γινομένης ΜΞ $= \frac{α}{2}$, τὸ σημεῖον Ξ ἔςαι ἐν τῇ καυςικῇ· ὡσαύτως δὲ εὑρεῖν δυνατὸν ὅσα ἄντις βέλοιτο τῆς καυςικῆς σημεῖα· πρὸς δὲ τῷ σημείῳ Α ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ τῦ ἄξονος· ὅθεν ΜΠ $= \alpha$ γίνεται τηνικαῦτα $= 0$· ἡ δὲ καυςικὴ διήκει τηνικαῦτα διὰ τῆς κατὰ τὴν παραβολὴν κορυφῆς Α.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ ἡ τῆς καυςικῆς ἐξίσωσις, ὑποτεθείσθω ἡ ἀποτετμημένη ΑΡ $= \pi$, ϗ ἡ τεταγμένη ΞΡ $= \kappa$, ϗ προήχθωσαν αἱ ΜΞ μέχρι τῦ κατὰ τὸν ἄξονα Τ, ϗ γενέσθω ΜΤ $= \psi$, ϗ Με $= \upsilon$, ϗ ἡ ἀδιόριςος ἀποτετμημένη Αε $= \chi$, ϗ ἡ ὑποκάθετος εΔ $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$: τῆς δὲ γωνίας εΜΤ δίχα διαιρεθείσης διὰ τῆς ΜΔ, ἔςαι (Γεωμ. 320) Με : ΜΤ :: εΔ : ΔΤ, εἴτ' ὖν $\upsilon : \psi :: \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$: ΔΤ $= \frac{\psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἄρα εΤ $=$ εΔ $+$ ΔΤ $= \frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἀλλ' ἐκ τῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ εΜΤ ἐςὶν εΤ$^2 =$ ΜΤ$^2 -$ εΜ$^2 =$ $\psi\psi - \upsilon\upsilon$· ἄρα εΤ $= \sqrt{(\psi\psi - \upsilon\upsilon)} = \frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἄρα (πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ χ, τετραγωνισμῷ, μεταθέσει, ϗ διαιρέσει διὰ $\psi + \upsilon$) $\psi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon^2 = \delta\chi^2(\psi - \upsilon)$· ὅθεν ἀποφέρεται $\psi = \frac{\upsilon(\delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς τῦ ψ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς εΤ$=\frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$, προέρχεται εΤ $= \frac{2\upsilon\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}$· ἀχθείσης δὲ τῆς μΞ παραλλήλυ τῷ ἄξονι, τὰ τρίγωνα ΜΞμ, ΜεΤ ἔσονται ὅμοια· οὐκοῦν ΜΤ : ΜΞ :: Με : Μμ· ἔστι δὲ ΜΞ = $\frac{\alpha}{2}$· ἡ δὲ πλευρὰ ΓΠ τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ δχ, ἐστὶν = $\frac{\delta\sigma^2}{-\delta\delta\upsilon}$ (ταύτην δὲ τὴν πλευρὰν ἐδηλώσαμεν διὰ ΓΝ, 150)· ἄρα τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς πλευρᾶς ὂν ἐνταῦθα = $\frac{M\Pi}{2}$, ἔσται $\frac{\delta\chi^2+\delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$· ἄρα

$$\frac{\upsilon(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2} : \frac{\delta\chi^2+\delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon} :: \upsilon : \frac{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2}{2\delta\delta\upsilon} = M\mu$$

$= M\varepsilon - \Xi P = \upsilon - \kappa$· ἄρα $\kappa = \upsilon + \frac{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$.

ἔστι δὲ καὶ Με : Με :: εΤ : μΞ = εΡ· ἄρα $\upsilon : \frac{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$ $:: \frac{2\upsilon\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2} : \varepsilon P = \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$, καὶ ἑπομένως εΡ = ΑΡ − εΛ = $\pi - \chi = \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$, καὶ $\pi = \chi + \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$· οἱ τοίνυν τύποι τοῦ κ καὶ π λυσιτελοῦσιν ἐν παντὶ εἴδει καμπύλων, διδομένης τῆς αὐτῶν ἐξισώσεως.

Ἔστω ἡ τῆς παραβολῆς παράμετρος = 1· οὐκοῦν ἔσται $\upsilon^2 = \chi$, $\upsilon = \chi^{\frac{1}{2}}$, $\delta\upsilon = \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi$, $\delta\upsilon^2 = \frac{1}{4}\chi^{-1}\delta\chi^2$, $\delta\delta\upsilon = -\frac{1}{4}\chi^{-\frac{3}{2}}\delta\chi^2$, ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ δχ· ἀντικαθισταμένων δὲ τῶν δυνάμεων τούτων τοῦ υ, δυ, δδυ, ἐν τοῖς τύποις τοῦ κ καὶ π, προέρχεται $\kappa = \chi^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\cdot\chi^{-1}\delta\chi^2}{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{3}{2}}\delta\chi^2}$

$$-\frac{\delta\chi^2}{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi^2} = \chi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}} - 2\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\chi^{\frac{1}{2}} -$$

$2\chi^{\frac{3}{2}}$, ἢ $\kappa^2 = \frac{9}{4}\chi - 6\chi^2 + 4\chi^3$. Καὶ $\pi = \chi +$

$$\frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon} = \chi + \frac{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi^2}{\frac{1}{4}\chi^{-\frac{3}{2}}.\delta\chi^2} = \chi + 2\chi = 3\chi\text{·} \quad \text{ἄρα } \chi$$

$= \frac{\pi}{3}$· ἀντικαθιςαμένης δὲ ταύτης τῆς τῦ χ δυνάμεως ἐν τῇ τῦ κ^2, εὑρίσκεται $\kappa^2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3}\pi^2 + \frac{4}{27}\pi^3$· τῶν δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὅρων πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ τὴν παράμετρον $\iota = \beta$, ὁσάκις ἀπόχρη γενέσθαι ὁμογενεῖς, πορισθήσεται $\beta\kappa^2 = \frac{3\beta^2\pi}{4} - \frac{2\beta\pi^2}{3} + \frac{4}{27}\pi^3$, ἐξίσωσις τῆς καυςικῆς.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Σ, καθ᾽ ὃ ἡ καυςικὴ συμβάλλει τῷ ἄξονι τῆς καμπύλης ΑΜ, σημειωτέον, ὅτι τηνικαῦτα ἐςὶ $\psi = \text{ΜΞ} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\delta\sigma^2}{-2\delta\delta\upsilon}$· ἄρα $\psi =$

$$\frac{\upsilon.(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2} = \frac{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon},$$ ἢ $-2\upsilon\delta\delta\upsilon = \delta\chi^2 - \delta\upsilon^2$, $\delta\upsilon^2 - 2\upsilon\delta\delta\upsilon = \delta\chi^2$, τύπος, ᾧ χρήσασθαι δυνάμεθα ἐν παντὶ εἴδει καμπύλων, ἀντικαθιςάντες τὰς δυνάμεις τῶν υ, $\delta\upsilon$, $\delta\delta\upsilon$.

Ἐν ὖν τῇ παραβολῇ ἀντικαθιςάντες τὰς δυνάμεις τῶν υ, $\delta\upsilon$, $\delta\delta\upsilon$, πορίζομένας ἐκ τῆς κατ᾽ αὐτὴν ἐξισώσεως, ἢ ὑποτιθέντες τὴν παράμετρον $= 1$, ἕξομεν $\chi = \frac{3}{4}$, τῦτ᾽ ἔςιν, ἐὰν ληφθῇ ἡ Αε ἴση τρισὶ τεταρτημορίοις τῆς παραμέτρου, ἡ σύστοιχος ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐφάψεται τῆς καυστικῆς κατὰ σημεῖον, ἐν ᾧ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ ἀπώτατον τοῦ ἄξονος σημεῖον Ξ τῆς καυστικῆς (σχ. 47), σημειωτέον, ὅτι τηνικαῦτα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ὀφείλει εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι· ἄρα ἡ ὑπὸ εΜΞ γωνία ἔσται ὀρθή· ἄρα ἡ γωνία εΜΑ $=$ ΞΜυ $= 45^\circ =$ Μυι· ἄρα δχ $=$ δυ, τοῦτ᾿ ἔστιν ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς παράλληλός ἐστι τῷ ἄξονι, ὅταν ᾖ δχ $=$ δυ.

Ἡ τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις, ὑποτιθεμένης τῆς παραμέτρου $= 1$, ἔστιν $\upsilon^2 = \chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \delta\chi$, ἢ (ἀντικαθισταμένης τῆς τοῦ υ δυνάμεως $\chi^{\frac{1}{2}}$), $2\chi^{\frac{1}{2}}\delta\upsilon = \delta\chi$, καὶ διαιρέσει, τοῦ μὲν πρώτου μέλους διὰ δυ, τοῦ δὲ δευτέρου διὰ δχ, ὅπερ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐστὶν $=$ δυ, πρόεισι $2\chi^{\frac{1}{2}} = 1$, $\chi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, καὶ $\chi = \frac{1}{4}$, τοῦτ᾿ ἔστιν „ἐὰν ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς τέμνῃ τὸν ἄξονα πρὸς μέρει τετάρτῳ „τῆς παραμέτρου, ἢ, ὃ δήπου ταὐτὸν, διήκῃ διὰ τῆς „κατὰ τὴν παραβολὴν ἑστίας, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς παράλληλος ἔσται τῷ ἄξονι, καὶ ἐπιψαύσει τοῦ ἀπωτάτου σημείου τῆς καυστικῆς."

171. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. *Εὑρεῖν τὴν δι᾿ ἀνακλάσεως καυστικὴν, ὅταν αἱ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι Αα (σχ. 51) ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες ΕΜ συμβάλωσιν ἡμιπεριφερείᾳ κυκλικῇ τῇ ΑΔα.*

ΛΥΣΙΣ. Ἀχθεισῶν τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων ΜΞ, καὶ τῶν ἄλλων, ἃς τὸ σχῆμα παρίστησιν, ἐπεὶ ἡ τῆς ἐξειλιγμένης κύκλου ἀκτὶς ἀεί ἐστιν ἴση τῇ τοῦ κύκλου ἀκτῖνι, ἔσται ΜΗ $= \frac{\text{ΜΚ}}{2}$, καὶ τῆς ΗΞ καθέτου ὑποτιθεμένης τῇ ΜΞ,