Ἀλλ' εἴπωμεν ἤδη περὶ τῶν ἐν ταῖς εἰδικαῖς συνεκθέσεσι μεγίστων ϗ ἐλαχίστων· ὅταν εἰδικὴ συνέκθεσις μίαν μόνην τρεπτὴν χ περιέχῃ, δυνατὸν ὑποθέσθαι ταύτην ἴσην τῷ υ, ϗ λαβεῖν αὐτῆς τὰ ἀπειροστὰ, ὡς εἴπερ ζητοῖτο ἡ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη ἐν καμπύλῃ τεταγμένη.

127. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κϛʹ.** Εὑρεῖν, καθ' ἃς περιπτώσεις ἡ συνέκθεσις $\chi^4 - 8\chi^3 + 22\chi^2 - 24\chi + 12$ γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω ἡ ποσότης αὕτη $= \upsilon$· ληφθέντων οὖν αὐτῆς τῶν ἀπειροστῶν, ϗ ὑποτεθέντος $\delta\upsilon = 0$, ἔσται $4\chi^3 - 24\chi^2 + 44\chi - 24 = \delta\upsilon = 0$, $\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0$, ἧς διαιρέται $\chi - 1$, $\chi - 2$, $\chi - 3$· ἄρα δυνάμεις τῆς χ εἰσὶ $\chi = 1$, $\chi = 2$, $\chi = 3$· ἐὰν οὖν ἀντὶ $\chi = 1$ ἀντικατασταθῇ $1 + \delta\chi$, ϗ εἶτα $1 - \delta\chi$, εὑρεθήσεται ἐν ἑκατέρᾳ περιπτώσει δύναμις τοῦ υ μείζων, ἢ ἀντικαθισταμένης τῆς 1· ἄρα ἡ πρώτη δύναμις τοῦ χ ἐμφαίνει ἐλάχιστον· δυνατὸν δὲ ὡσαύτως εὑρεῖν, τὴν μὲν δευτέραν ἐμφαίνουσαν μέγιστον, τὴν δὲ τρίτην ἐλάχιστον.

128. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Δυνατὸν ἰδεῖν ἐν τῷδε τῷ ὑποδείγματι τὰ μέγιστα ϗ ἐλάχιστα διαλλήλως διαδεχόμενα· ἐν γένει δὲ, εἴπερ καμπύλη ἡ βμ (σχ. 25) πολλὰ ἔχει μέγιστα ϗ ἐλάχιστα αβ, αν κτ, ὡς τὴν ἀποτετμημένην Αα συστοιχεῖν ἐλαχίστῳ τῷ αβ, δῆλον ὡς ἡ τεταγμένη απ οὐκ ἂν γένοιτο ἐλάχιστον, εἰ μὴ τὸ μέρος βνπ τοῦ ἄξονος ἀποχωρήσειε ποσότητι μείζονι τῆς τεταγμένης αβ, ἥτις ἐστὶ τὸ πρῶτον ἐλάχιστον· δεῖ δὴ ὑπάρχειν μέγιστον μεταξὺ τῶν δύο ἐλαχίστων· ἄρα ἅπαν ἐλάχιστον απ οὐκ ἐπακολουθήσει ἐλαχίστῳ, ἀλλὰ μεγίστῳ· ἐὰν οὖν τῇ ἀποτετμημένῃ Αα = χ (σχ. 26) συστοιχῇ μέγιστον τὸ αβ, τέ-

τῳ μὲν ἐπακολυθήσει ἐλάχιςον· τῷ δὲ, μέγιςον· ὥςε τὰ μέγιςα ἢ ἐλάχιςα (ὁπηρίκα πολλὰ ἐφεξῆς εὑρίσκωνται) ἀλληλοδιαδόχως θάτερον κείσονται μετὰ θάτερον· δυνατὸν δὲ ἐφαρμόσαι τὴν τῶν μεγίςων ἢ ἐλαχίςων μέθοδον, ἢ τῆς ἐκθέσεως, ἣ ὑποτίθεται $=\upsilon$, ποσότητας ὑπερβατικὰς περιεχούσης.

129. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΖ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅς, διαιρεθεὶς διὰ τῦ αὐτῦ λογαρίθμυ, προβάλλει πηλίκον ἐλάχιςον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω χ ὁ ζητέμενος ἀριθμός· ἐκεῖ $\frac{\chi}{\lambda\chi}$ ἔςαι ἐλάχιςον, ἢ $\frac{\lambda\chi}{\chi}$ μέγιςον· ἐὰν ἦν ὑποτεθῇ $\frac{\lambda\chi}{\chi}=\upsilon$, εὑρεθήσεται $\frac{\delta\chi}{\chi\chi}-\frac{\delta\chi\,.\,\lambda\chi}{\chi\chi}=\delta\upsilon$, ἢ ὑποτιθεμένυ τῦ $\delta\upsilon=0$, εὑρίσκεται $\frac{1}{\chi\chi}-\frac{\lambda\chi}{\chi\chi}=0$, $1=\lambda\chi$· ἐπεὶ δὲ ἐνταῦθα ὁ λόγος περὶ τῶν ὑπερβολικῶν λογαρίθμων, ἐὰν γένηται $=\varepsilon$ ὁ ἀριθμὸς, ὗ ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος $=1$, εὑρεθήσεται $\chi=\varepsilon$· ἄρα $\frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon}$ ἔςαι μέγιςον, ἢ $\frac{\varepsilon}{\lambda\varepsilon}$ ἐλάχιςον.

130. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΗ΄. Εὑρεῖν ἀριθμὸν τὸν χ, ὅπως $(\chi)^{\frac{1}{\chi}}$ ᾖ μέγιςον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω $(\chi)^{\frac{1}{\chi}}=\upsilon=\lambda^{\psi}$, ὑποτιθεμένυ τῦ $\frac{1}{\chi}=\psi$· ἄρα $\lambda\upsilon=\psi\lambda\chi$, $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon}=\delta\psi\,.\,\lambda\,.\,\chi+\psi\,.\,\frac{\delta\chi}{\chi}=$.

$\frac{-\delta\chi\lambda\chi}{\chi^2} + \frac{\delta\chi}{\chi\chi}$ (ἀντικαθισαμένου $\frac{-\delta\chi}{\chi\chi}$ ἀντὶ δψ, εἴγε τὸ ἀπειροστὸν τοῦ $\frac{1}{\chi} = \frac{-\delta\chi}{\chi\chi}$). οὐκοῦν ὑποτιθεμένου $\delta\upsilon = 0$, διαιρέσει διὰ δχ, καὶ μεταθέσει, εὑρίσκεται $\frac{1}{\chi\chi} = \frac{\lambda\chi}{\lambda\chi}$, $\lambda\chi = 1$, $\lambda\varepsilon = 1$, $\chi = \varepsilon$· ἄρα $(\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ἐστι μέγιστον· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $\chi = 1$, εὑρίσκεται $\chi^{\frac{1}{\chi}} = (1)^{\frac{1}{1}} = 1,000000$· ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = 2$, εὑρίσκεται $\chi^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1,414213$ (*) ἐὰν $\chi = 3$, $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} = 1,442250$· ἐὰν $\chi = 4$, $4^{\frac{1}{4}} = 1,414213$· ὅθεν σαφὲς ὅτι $(\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ἐστι μέγιστον, ἀλλ' οὐκ ἐλάχιστον· τοιγαροῦν ἐν καμπύλῃ, ἧς ἐξίσωσις $\upsilon = \chi^{\frac{1}{\chi}}$, τεταγμένη συστοιχοῦσα ἀποτετμημένῃ $\chi = \varepsilon$ ἔσται μεγίστη.

131. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΘʹ.** Τόξον τὸ χ εὑρεῖν, οὗ τὸ ἡμίτονον ἐστι μέγιστον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω $\upsilon =$ ἡμ. χ· οὐκοῦν ἔσται $\delta\upsilon = \delta\chi$ συνημ. χ. ὑποτιθεμένου δὲ τοῦ $\delta\upsilon = 0$, γίνεται συνημ. $\chi = 0$· ἀλλὰ τὸ συνημίτονον τῶν 90 μοιρῶν ἐστι μηδέν· ἄρα τὸ ζητούμενον τόξον ἐστὶ μοιρῶν 90· τὸ δ' αὐτοῦ ἡμίτονον ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι, ἣν ὑποτιθέμεθα $= 1$.

(*) Αἱ τρεῖς ἔσχαται τοῦ χ δυνάμεις οὐκ εἰσὶν ἀκριβεῖς, ἀλλὰ τῶν ἀκριβῶν ἔγγιστα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ ἐξειλιγμένων καὶ τῶν φιλȣσῶν ἡμιδιαμέτρων.

132. Ἐὰν νῆμα ἐφηρμοσμένον καμπύλῃ τῇ ΑΒΓ (σχ. 27) κατὰ μικρὸν αὐτῆς ἀποχωρίζηται, ἡ ἐκ τȣ̃ κατὰ τὸ νῆμα πέρατος Α γραφησομένη καμπύλη ΑΖΝ ἐξειλιγμένη ἀκȣ́ει, ἡ δὲ ΑΒΓ ἐνειλιγμένη, τὰ δὲ μέρη ΒΕ, ΓΖ τȣ̃ ἐξειλισσομένȣ νήματος, ἀκτῖνες τῆς ἐξειλιγμένης, ἢ φιλȣ̃σαι ἡμιδιάμετροι.

133. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν τὸ νῆμα περατῶται πρὸς τῇ Α κορυφῇ τῆς ἐνειλιγμένης, ἕκασον μὲν μέρος ΒΕ τȣ̃ νήματος ἴσον ἔςαι τῷ ΑΒ τόξῳ τῆς ἐνειλιγμένης· ἀλλ᾽ ἑκάςη ἀκτὶς ΖΓ μείζων ἔςαι τȣ̃ συςοιχȣ̃ντος τόξȣ, ἐὰν ἡ τῆς ἐνειλιγμένης κορυφὴ ὑποτεθῇ κατὰ τὸ Β, ὡς εἶναι τὴν ΑΒ γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐν γένει δὲ ἡ φιλȣ̃σα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐςὶ τῷ τῆς ἐνειλιγμένης τόξῳ, προςιθεμένȣ, εἰ δέοι, ποσȣ̃ ἀτρέπτȣ.

134. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἑκάςης φιλȣ́σης ἡμιδιαμέτρȣ ἐκληφθῆναι δυναμένης ὡς προαγωγῆς τόξȣ ἀπειροςȣ̃ τȣ̃ ΒΓ, ὅπερ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, δῆλον α΄. ὅτι ἑκάςη ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ἁπτομένη ἐςὶ τῆς ἐνειλιγμένης· β΄. τὸ νῆμα ΒΕ, μεταβαῖνον ἐκ τȣ̃ ΕΒ ἐπὶ ΖΓ, γράφει τόξον μικρὸν τὸ ΕΖ, ὅπερ δυνατὸν ἐκληφθῆναι ὡς τόξον κύκλȣ, ȣ̃ τὸ κέντρον ἐςὶν ἐν τῷ Γ, ὡς τὴν ἀκτῖνα ΓΖ κάθετον ἐφίςασθαι τῇ κατὰ τὸ Ζ τῆς ἐξειλιγμένης ἁπτομένῃ ΖΤ· ἡ γὰρ ἀκτὶς τȣ̃ κύκλȣ κάθ-

ετος ἐφίςαται τῇ τε κύκλε κατὰ τὸ πέρας τῆς ἀκτῖνος ἁπτομένη (Γεωμ. 151)· ἐὰν ἄρα ἐκ τῶν περάτων τόξε ἀπείρο ε καμπύλης ἀχθῶσι δύω κάθετοι ΕΓ, ΖΓ, συμπεσεῦνται ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὅπερ ἔςαι σημεῖον τῆς ἐνειλιγμένης τῆς δοθείσης καμπύλης· τὸ δὲ τόξον ΕΖ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς κυκλικὸν, γεγραμμένον διὰ κέντρε τε Γ· ἀλλ' ἐπείπερ οἱ κύκλοι τοσέτῳ ἔλαττον εἰσὶ καμπύλοι, ὅσῳ μείζες εἰσὶν αὐτῶν αἱ ἀκτῖνες, δῆλον ὅτι ἡ ἐξειλιγμένη τοσέτῳ ἔλαττον ἔςαι καμπύλη, ὅσῳ μᾶλλον ἀποςήσεται τε σημείε Α, ὅπε τελευτᾷ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης, ἥτις ἐςὶν $=0$, ἡ ἐλαχίςη· ἄρα ἡ μεγίςη καμπυλότης εὑρεθήσεται, ζητεμένης τῆς ἐλαχίςης ἀκτῖνος, ἡ δ' ἐλαχίςη, τῆς μεγίςης· τετὶ δὲ γίνεται διὰ τῆς μεθόδε τῶν μεγίςων ϗ ἐλαχίςων.

135. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ Π, διαςήματι δὲ τῷ ΖΠ, μείζονι τε ΒΓ, γραφῇ κύκλε τόξον, διαθήσεται ὕπερθεν τε ΕΖ τόξε· τὐναντίον δὲ, ἔνερθεν διήξει, εἰ γραφείη διαςήματι τῷ ΠΖ, ἐλάττονι τε ΖΓ· ἄρα ὁ, κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαςήματι δὲ τῷ ΖΓ, γραφεὶς κύκλος ἀκριβέςερον συμπεσεῖται τῷ ἀπειροςῷ τόξῳ ΕΖ· καλεῖται δὲ, ὁ μὲν κύκλος ὗτος *κύκλος φιλῶν*, ἡ δ' αὐτε ἀκτὶς *φιλεσα ἡμιδιάμετρος*, ἢ *ἀκτὶς φιλεσα*, *ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης*, *ἀκτὶς τε συμπίπτοντος τόξε*, *ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος*· ἡ γὰρ καμπυλότης τε ἀπειροςε τόξε ΕΖ τῆς ἐξειλιγμένης καμπύλης ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ τε ἀυςοιχεντος τόξε τε φιλεντος κύκλε.

136. Τόξε (σχ. 28) καμπύλης τε ΕΖ γωνία τῆς καμπυλότητος ἀκέει ἡ ΕΓΖ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύω εὐθειῶν καθέτων τῷδε τῷ τόξῳ· αὕτη δὲ ἡ γωνία ἰσε-

ται τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ δύω ἁπτομένων, αἳ ἄγονται ἀπὸ τῶν περάτων αὐτοῦ τοῦ τόξου· αἱ γὰρ γωνίαι τῦ τετραπλεύρυ ΜΕΓΖ δύνανται τέσσαρας γωνίας ὀρθάς· ἀλλ' αἱ γωνίαι ΓΕΜ, ΓΖΜ εἰσὶν ὀρθαὶ, ἄρα ΖΜΕ + ΖΓΕ δύνανται δύω γωνίας ὀρθάς· ἀλλὰ καὶ ΖΕΜ + ΖΜΝ δύνανται δύω γωνίας ὀρθάς· ἄρα ΕΓΖ = ΖΜΝ· ἐκλαμβανομένυ δὲ τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου ΕΖ ὡς κυκλικοῦ, καὶ ἐπιζευγνυμένης τῆς χορδῆς ΕΖ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΝΜΖ τῦ τριγώνου ΕΜΖ δύναται τὰς δύω ἐντὸς γωνίας Ε, Ζ· ἀλλ' αὗται εἰσὶν ἴσαι, εἴγε, περιεχόμεναι ὑπὸ χορδῆς ϗ ἁπτομένης, μετρῦνται ἑκατέρα τῷ ἡμίσει τῦ τόξυ ΕΖ· ἄρα ἑκατέρα τῶν δε τῶν γωνιῶν ἡμίσειά ἐςι τῆς κατὰ τὴν καμπυλότητα γωνίας· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ τὸ τόξον εζ = ΕΖ, ἡ δὲ ἀκτὶς εγ ἡμίσεια τῆς ἀκτῖνος ΕΓ, δῆλον ὡς ἡ γωνία εγζ διπλασία ἔςαι τῆς γωνίας ΕΓΖ, ἡ δὲ γωνία νμζ διπλασία τῆς ΝΜΖ· ὥςε ἐν γένει αἱ γωνίαι τῆς καμπυλότητος ἐν λόγῳ εἰσὶν ἀντιςρόφῳ τῶν φιλυσῶν ἀκτίνων· ἄρα ϗ αἱ τῶν κύκλων καμπυλότητες εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν κατ' αὐτὺς ἀκτίνων.

137. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἄρα ΕΜΖ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐςιν· ἡ δὲ τῆς καμπυλότητος γωνία ΝΜΖ, μετρυμένη ὑπὸ τῦ ἐξ ὑποθέσεως ἀπειροςῦ τόξυ ΕΖ, ἔςι ϗ αὐτὴ ἀπειροςή.

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τόξον καμπύλης τὸ ΕΖ ὡς κυκλικὸν ἐκληφθῆναι ὐ δύναται· ἢ, ὅ ταὐτὸν, ὐ δύναται ἔχειν καμπυλότητα κυκλικὴν, ἢ κύκλον φιλῦντα, εἰμὴ αἱ γωνίαι Ε, Ζ ἑκατέρα εἶεν ἡμίσεια τῆς ὑπὸ ΝΜΖ γωνίας, τῆς ἐκτὸς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης, ἢ, ὅ ταὐτὸν, εἰμὴ αἱ

γωνίαι Ε, Ζ, αἱ ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης περιεχόμεναι, εἶεν ἰσάλληλοι.

139. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.** Ἐκ τούτων καταφανές, ὡς ἐστὶ τόξα καμπύλων, μηδεμίαν ἔχοντα κυκλικὴν καμπυλότητα· ἔστω γὰρ ζε (σχ. 29) τόξον ἀπειροστὸν παραβολῆς ἄλλης παρὰ τὴν κωνικήν· ταύτης δὲ κορυφὴ ἔστω τὸ ζ σημεῖον, καὶ τετάχθω ἡ επ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι πν· καὶ ἤχθων ἥτε ἁπτομένη εν καὶ ἡ ζμ (ἣ ἐκληφθῆναι ἔχει ὡς τεταγμένη, προεκβεβλημένη ἐκ τοῦ τῆς καμπύλης σημείου ζ)· τῆς οὖν κατὰ τὴν καμπυλότητα γωνίας ζμν ἀπειροστῆς οὔσης (136), ὑπαρχούσης ὀρθῆς τῆς ὑπὸ μζν = επν, ἡ ὑπὸ μνζ διαφέρει γωνίας ὀρθῆς ποσότητι ἀπειροστῇ· ἐκληφθῆναι ἄρα ἔχει ὡς ἴση τῇ ὑπὸ νζμ· τὸ δὲ τρίγωνον μζν ἐκληπτέον ἐστὶν ὡς ἰσοσκελές, καὶ δὴ ἐκληπτέον μν = ζμ· ἄρα ζμ : με :: μν : με· ἀλλ᾽ ἐπείπερ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα νμζ, νεπ· ἄρα μν = ζμ : εμ :: νζ : ζπ· ἀλλ᾽ ἐν οὐδεμιᾷ παραβολῇ (παρὲξ τῆς κωνικῆς) ἐστὶ νζ = ζπ· ἄρα οὐδὲν ἧττον οὐκ ἔστιν οὔτε εμ = ζμ· ἄρα τὸ τρίγωνον εμζ οὐκ ἔστιν ἰσοσκελές· ἄρα αἱ γωνίαι μεζ, μζε οὐκ εἰσὶν ἴσαι· ἄρα ἡ καμπυλότης τοῦ εζ τόξου οὐκ ἐστὶ κυκλική· οὐδ᾽ ἐστὶ κύκλος οὐ πεπερασμένος, οὐκ ἄπειρος, οὐκ ἀπείρως ἐλάχιστος, ὃς ἂν ἔχοι καμπυλότητα ἴσην τῇ καμπυλότητι τοιοῦδε τόξου· φημὶ δέ, ὡς ἐν οὐδεμιᾷ παραβολῇ, πλὴν τῆς κωνικῆς, ἐστὶ ζν = ζπ· δεήσει γὰρ εἶναι τὴν ὑφαπτομένην πν = 2ζπ· ἀλλ᾽ ἡ ὑφαπτομένη τῶν παραβολῶν ἐστὶ

$$(57) = \frac{(\mu+\nu)\chi}{\nu}$$

· ἄρα ἡ ὑφαπτομένη ἐστὶ πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ζπ = χ, ὡς $\frac{(\mu+\nu)\chi}{\nu} : \chi :: (\mu+\nu)$

$\chi : \nu\chi :: \mu + \nu : \nu$· ἀλλ' ἐν μόνῃ τῇ συνήθει παραβολῇ ἐςὶ $\mu = \nu = 1$· ἄρα ἐν μόνῃ τῇ κοινῇ παραβολῇ ἐςὶ $\nu\pi : \zeta\pi :: 2 : 1$· ἄρα κτλ.

140. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀλλ' ἔμπης κοινῇ πάντες οἱ Γεωμετροῦντες ἀποφαίνονται, ὡς ἅπαντι καμπύλης τόξῳ ἔςι καμπύλη κυκλική· ἀπόχρη μέντοι ἐκ τῶν εἰρημένων συναγαγεῖν, ὅ,τι βούλονται σημαίνειν, τοῦτο λέγοντες· Ζητητέον οὖν ἤδη τὰς ἐκθέσεις γραμμῶν τινων, ἐξυπηρετουσῶν πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τῆς φιλούσης ἀκτῖνος· ἰςέον μέντοι μὴ ζητεῖσθαι ἐνταῦθα καμπυλότητας ἐν ἰδιαιτέροις τισὶ τῶν καμπύλων σημείοις.

141. Ἔςω καμπύλη ἡ ΑΒΔ (σχ. 30), ἐν ᾗ ΑΠ ἐςὶν ἡ γραμμὴ τῶν ἀποτετμημένων· καὶ εἰλήφθων δύο τόξα ἐλάχιςα τὰ ΒΓ, ΓΔ ποσότητι ἐλαχίςῃ πρὸς αὐτὰ ἀλλήλων διαφέροντα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ χορδὴ ΒΓ προσεκβληθεῖσα μέχρι τοῦ Μ· καὶ ἤχθωσαν αἵ τε τεταγμέναι, καὶ αἱ ἄλλαι, ἃς τὸ σχῆμα παρίςησι γραμμάς· καὶ ἔςω $\Pi\upsilon = BZ = \delta\chi$, $\Gamma\Sigma = \delta\chi + \delta\delta\chi$, καὶ $B\Gamma = \delta\sigma$, καὶ $A\Gamma = \sigma$, καὶ $Z\Gamma = \delta\upsilon$· τῶν οὖν τριγώνων ΒΖΓ, ΓΣΜ ὁμοίων ὄντων, διὰ τὰς παραλλήλους ΒΖ, ΓΣ, ἐςὶ $\delta\chi : \delta\upsilon ::$

$$\delta\chi + \delta\delta\chi : \Sigma M = \frac{\delta\chi\delta\upsilon + \delta\upsilon\delta\delta\chi}{\delta\chi}$$: ἀλλὰ $\Sigma\Delta = \delta\upsilon +$

$\delta\delta\upsilon$ (*)· ἄρα $$\Delta M = \Sigma M - \Sigma\Delta = \frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\chi}.$$

(*) Ὅταν γὰρ $\delta\chi$ γίνηται $\delta\chi + \delta\delta\chi$, $\delta\upsilon$ γίνεται $\delta\upsilon + \delta\delta\upsilon$· ἀλλ' ἐνταῦθα τῆς χ αὐξήσεως ἀπομειοῦται τὸ $\delta\upsilon$, καὶ ἔςι λειπτικὸν τὸ $\delta\delta\upsilon$, τοῦτ' ἔςι $\Sigma\Delta = \upsilon - \delta\delta\upsilon$, ἢ $\Sigma\Delta = \delta\upsilon + \delta\delta\upsilon$· σημειωτέον μέντοι, ὅτι $\delta\delta\upsilon$ ἐςὶ λειπτικόν· ἐὰν δὲ

142. Ἐμφαινέτω ἡ ΔΛ τόξον κύκλυ, γεγραμμένυ διὰ κέντρυ τῦ Γ· τὸ ὖν τόξον τῦτο ἐκληφθῆναι δύναται ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, κάθετος ἐφισαμένη τῇ ΓΜ· ϗ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βιΔ διπλασία ἐςὶ τῆς ὑπὸ ιΓΔ, ἐςὶ βιΔ = ΜΓΔ· μετρεῖ ἄρα τῦτο τὸ τόξον τὴν τῆς καμπυλότητος γωνίαν ΓΞΔ = βιΔ· τὰ δὲ τρίγωνα ΜΛΔ, ΓΣΜ, ἔχοντα κοινὴν τὴν πρὸς τῷ Μ γωνίαν, ϗ τὰς Λ, Σ ὀρθὰς, εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΓΜ : ΓΣ = ΒΓ :: ΔΜ : ΔΛ, ἢ $\delta\sigma : \delta\chi ::$ $\frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\chi} : \Delta\Lambda = \frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma}$. ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΔΛ = ξ, ϗ ἡ ἀκτὶς = 1, ϗ γένηται $\delta\sigma : 1 :: \xi :$ $\frac{\xi}{\delta\sigma} = \frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2}$, εὑρεθήσεται τὸ μέτρον γωνίας, ἣν ϗ αὐτὴν ποιῦμεν = ξ.

143. Ἰςέον δὲ, ὡς ἡ τῆς ζ γωνίας δύναμις λειπτικὴ ἔςαι, ἐὰν ἡ καμπύλη κοίλη ᾖ πρὸς τὸν ἄξονα· τηνικαῦτα γὰρ ἡ ΔΛ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸν ἄξονα κείσεται· τύτων ὖν τεθέντων, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΓΞ, ΔΞ ὑποτεθῶσι φιλῦσαι ἀκτῖνες, ἡ Ξ γωνία ἔςαι = βιΔ = 2 . ιΓΔ = ΛΓΔ· ὁκῦν τὰ τρίγωνα ΛΓΔ, ΓΞΔ εἰσὶν ὅμοια ϗ ἰσοσκελῆ· ἄρα ΛΔ : ΓΔ :: ΓΔ : ΔΞ, ἢ $\frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma} : \delta\sigma$ $:: \delta\sigma : \Delta\Xi = \frac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}$, δύναμις τῆς φιλύσης ἀκτῖνος, ἥτις κληθήτω Α.

144. Ἐὰν ἀπὸ τῦ σημείυ Ξ ἀχθῇ ἡ ΞΜ κάθετος τῇ ΓΝ, συςαθήσεται τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὗ τὴν ὀρθὴν

ἡ καμπύλη τὰ κοῖλα ἔχῃ ἐςραμμένα πρὸς τὸν ἄξονα ΑΡ, δδυ ἔςαι ὑπαρκτικόν.

γωνίαν ὑποτενεῖ ἡ φιλῦσα ἡμιδιάμετρος ΓΞ· ζητυμένων δὲ τῶν τῦδε τῦ τριγώνυ πλευρῶν (ἃς καλῦμεν πλευρὰς τῆς φιλύσης ἡμιδιαμέτρυ), ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ γωνίαι ΝΓΣ, ΞΓβ, ἐὰν κοινῆ ἀφαιρεθῆ ἡ ὑπὸ ΞΓΣ γωνία, εὑρεθήσεται ΝΓΞ $=$ ΣΓβ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΓΣβ, ΣΝΞ ἔσονται ὅμοια· ὅθεν $\Gamma\beta : \Gamma\Sigma :: \Gamma\Xi : \Gamma N$, ἢ $\Gamma\beta : \beta\Sigma = \Sigma\Delta$ (*) $:: \Gamma\Xi : N\Xi$· ἄρα $\delta\sigma : \delta\chi + \delta\delta\chi = \delta\chi :: \dfrac{\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon} : \Gamma N = \dfrac{\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}$, καὶ $\delta\sigma : \delta\upsilon :: \dfrac{\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon} : N\Xi = \dfrac{\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}$.

145. Ἁπλύστεροι δὲ καθίστανται οἱ τύποι, ὑποτιθεμένων ὡς ἀτρέπτων ἐνίων ἀπειροστῶν· ἐὰν μὲν γὰρ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δ, ἔσται $\delta\delta\chi = 0$, ἢ $A = \dfrac{-\delta\sigma^3}{\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, καὶ $\Gamma N = \dfrac{-\delta\sigma^2}{\delta\delta\upsilon}$, ἢ $N\Xi = \dfrac{-\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ἐὰν δ' ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ $\delta\upsilon$, ἔσται $\delta\delta\upsilon = 0$, ἢ $A = \dfrac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi}$, ἢ $\Gamma N = \dfrac{\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi}$, ἢ $N\Xi = \dfrac{\delta\sigma^2}{\delta\delta\chi}$· ἐὰν διὰ τῆς κατὰ τὴν

(*) Τῆς γὰρ γωνίας βΓΔ ἐλαχίστης ὔσης, ἡ ταύτην ὑποτείνυσα πλευρὰ βΔ ἀπειροστή ἐστιν ὡς πρὸς τὴν ΓΔ, ἥτις ἐστὶν ἀπειροστὴ πρωτοταγὴς, ὡς ἢ ἡ ΣΔ. ἄρα Δβ ἐστιν ἀπειροστὴ τῆς ΣΔ· ἄρα ΣΔ $=$ Σβ· συμπέπτωκε δὲ ἢ τὸ ἐλάχιστον τόξον ΓΔ τῇ αὐτῇ ἀπτομένῃ· δυνατὸν ἄρα ὑποτιθέναι Γβ $=$ Γχ, εἴγε Γχ τῆς Γβ διαφέρει μόνῃ τῇ χβ ποσότητι ἀπειροστῇ τῆς Γβ, ἥτις ἐστὶν ἀπειροστὴ μείζων τῆς βδ· ἄρα βΔ, Δχ, χβ εἰσὶν ὁμοειδῆ.

καμπύλην ἐξισώσεως, ἀποβληθέντων τῶν ἀπειροστῶν, εὑρεθῇ ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς Α, ἢ ἡ πλευρὰ ΓΝ, ὑπαρκτική, ἡ καμπύλη ἔσαι κοίλη πρὸς τὸν ἄξονα· τὴν δὲ καμπυλότητα πρὸς τὸν ἄξονα σρέψει τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ἢ τῆς πλευρᾶς ΓΝ λειπτικῆς οὔσης· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ $\delta\sigma$, ἔσαι $\delta\delta\sigma = 0$· ἀλλὰ $\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2$· ἄρα $2\delta\sigma \,.\, \delta\delta\sigma = 2\delta\chi \cdot \delta\delta\chi + 2\delta\upsilon \cdot \delta\delta\upsilon = 0$, καὶ $\delta\delta\upsilon = -\frac{\delta\chi \cdot \delta\delta\chi}{\delta\upsilon}$. ταύτης δὲ τῆς τοῦ $\delta\delta\upsilon$ δυνάμεως ἀντικατασαθείσης ἐν τῷ τύπῳ τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, πορισθήσεται $A = \frac{\delta\sigma^3 \,.\, \delta\upsilon}{\delta\upsilon^2 \,.\, \delta\delta\chi + \delta\chi^2 \,.\, \delta\delta\chi} = \frac{\delta\sigma^3 \,.\, \delta\upsilon}{\delta\sigma^2 \,.\, \delta\delta\chi} = \frac{\delta\sigma\delta\upsilon}{\delta\delta\chi}$. οἱ μὲν οὖν προεκτεθέντες ἅπαντες τύποι εὔχρηστοί εἰσιν, ἐπὰν αἱ τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἐσήκωσι ταῖς ἀποτετμημέναις.

146. Τῆς δὲ τῶν συντεταγμένων γωνίας ΒΤΑ μὴ ὀρθῆς οὔσης, ἔσω ταύτης τὸ μὲν ἡμίτονον $= \beta$, τὸ δὲ συνημίτονον $= \gamma$, καὶ $AT = \chi$, καὶ $TB = \upsilon$· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΠΤ (ὑποτιθεμένης τῆς ἀκτῖνος $= \alpha$) ἐστὶν $\alpha : \beta :: \upsilon : B\Pi = \frac{\beta\upsilon}{\alpha}$, καὶ $\alpha : \gamma :: \upsilon : \Pi T = \frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$. ἄρα $A\Pi = -\frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$· διὸ δὴ τιθεμένων ἐν τοῖς εὑρεθεῖσι τύποις, ἀντὶ μὲν χ τοῦ $\chi - \frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$, ἀντὶ δὲ υ τοῦ $\frac{\beta\upsilon}{\alpha}$ (*), πορισθήσονται αἱ ἀποδοθεῖσαι δυνάμεις περιεκτικαὶ τῶν ΑΤ, καὶ ΒΤ· τῶν οὖν ἀντικατασάσεων γενομένων, πρόεισιν $A =$

(*) Ἀντὶ $\delta\chi$ εἰσαχθήσεται τὸ ἀπειροστὸν τοῦ $\chi -$

$$\frac{\alpha\delta\sigma^3}{\alpha(\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon)}\text{, ϗ } \Gamma N = \frac{(\alpha\delta\chi - \gamma\delta\upsilon)\delta\sigma^2}{\alpha(\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon)}\text{, ϗ}$$

$$N\Xi = \frac{\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}$$· παραλιπόντες ἔν τὰς ἄλλας μεθόδȣς, δι᾽ ὧν εὑρεῖν ἔξεςι τὰς τῆς φιλȣ́σης ἀκτῖνος τύπȣς, τὴν τῶν δευτέρων ἀπειροςῶν καθαρεύȣσαν ἐκθησόμεθα μόνην.

147. Ἔςω καμπύλη ΠΓ, γεγραμμένη διὰ τȣ̃ ἄξονος αὐτῆς ΑΡ, τῶν τεταγμένων πρὸς ὀρθὰς ἐφιςαμένων ταῖς ἀποτετμημέναις· ἤχθωσαν (σχ. 31) ἔν πρὸς ὀρθὰς τῷ ἀπειροςῷ τόξῳ ΓΔ αἱ εὐθεῖαι ΓΞ, ΔΞ, καὶ τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΓΛ, ΔΡ· τῆς δὲ Γζ ληφθείσης ἴσης ἀτρέπτῳ τῇ β, διὰ τȣ̃ ζ ἐςάχθω κάθετος τῇ ΓΞ ἡ ζμ, ϗ ἑπομένως παράλληλος τῷ τόξῳ ΓΔ, ὅπερ ἐκδέξασθαι δυνάμεθα ὡς γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐντεῦθεν ἄρα ΔΟ = Γζ· διὰ δὲ τȣ̃ σημείȣ ο ἤχθω ἡ οτ κάθετος τῇ ΔΞ, ἀπαντῶσα τῇ ΓΞ κατὰ τὸ ν· τȣ́των τεθέντων ἔςω ΑΛ = χ, ϗ ΛΓ = υ· ἄρα ΓΣ = δχ, ϗ ΔΣ = δυ, ϗ ὑποτεθέντος Γμ = π, ἔςαι νμ = δπ· τὰ δὲ τρίγωνα ΔΣΓ, ζμΓ, ἔχοντα, ὀρθὰς μὲν τὰς γωνίας Σ, μ, ἴσας δὲ τὰς ὑπὸ ΔΓΣ, ζΓμ (ἐὰν γὰρ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΣΓΔ, ΞΓΔ, κοινῇ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ ΣΓμ γωνία, καταλειφθήσονται ἴσαι αἱ εἰρημέναι γωνίαι) εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΔΣ : ΔΓ :: ζμ : ζΓ, ἢ ΔΣ × ζΓ = ΔΓ × ζμ·

$\frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$· ἀντὶ δὲ δδχ, τὸ δεύτερον ἀπειροςὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος· ἀντὶ δὲ δυ, δδυ. εἰσαχθήσονται $\frac{\beta\delta\upsilon}{\alpha}$, $\frac{\beta\delta\delta\upsilon}{\alpha}$.

ϗ ἐπεὶ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ο μ ν, Ξπν, ϗ Ξπν ὅμοιον τῷ ΞΓΔ, ἄρα ΔΓ : μν :: ΞΓ : ομ = ζμ (εἴγε τῶν τεταγμένων ΛΓ, ΔΡ, ἐξ ὑποθέσεως ἀπείρως προσεχῶν ὑσῶν, τὸ σημεῖον ο συμπίπτει τῷ ζ)· ἄρα ΔΓ × ζμ = ΞΓ × μν· ἄρα ΔΣ × ζΓ = ΞΓ × μν, εἴτ' ὖν ΔΣ : μν :: ΞΓ : ζΓ, ἢ δυ : δπ :: Α : β· ἄρα $Α = \frac{βδυ}{δπ}$. ἀλλὰ, τῶν τριγώνων ΓΣΔ, Γζμ ὁμοίων ὄντων, προκύπτει π : β :: δχ : δσ, ἄρα $π = \frac{βδχ}{δσ}$· διὰ τέτυ τῦ τύπυ εὐμαρῶς προσδιορίζεται τὸ π ϗ δὴ ϗ τὸ δπ.

148. Ἐὰν αἱ τεταγμέναι ἐξέρχωνται ἀπὸ σημείυ μονίμυ τῦ Ζ (σχ. 32), ἀχθεισῶν τῶν ἐν τῷ σχήματι καθορωμένων τεταγμένων, ἡ ΒΓΛ χορδὴ προήχθω ἔστ' ἂν συναντήσειε τῷ ΔΛ τόξῳ, τῷ, κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, γεγραμμένῳ, ϗ ἤχθωσαν, ἥτε ἁπτομένη Γβ (ἥτις ὡς ἴση ἐκλαμβάνεται τῷ ΓΔ τόξῳ), ϗ αἱ φιλῦσαι ἀκτῖνες ΓΞ, ΔΞ· δῆλον ὖν, ὡς, ὑποτιθεμένυ κυκλικῦ τῦ τόξυ ΒΓΔ, ἡ ὑπὸ ΛΓΔ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ χορδῆς ϗ προαγωγῆς ἑτέρας χορδῆς, μετρηθήσεται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν ταύταις ταῖς χορδαῖς ὑποτεινομένων τόξων (*)· ϗ ἐπεὶ δυνατὸν ὑποθέσθαι τὰ τόξα ταῦτα ὡς κυ-

---

(*) Αἱ γὰρ γωνίαι (σχ. 33) παβ, βαϑ δύνανται ὀρθὰς δύο (Γεωμ. 80), εἴτ' ὖν μετρῶνται ὑπὸ ἡμικυκλίυ· ἀλλ' ἡ ὑπὸ βαϑ μετρεῖται τῷ ἡμίσει τῦ τόξυ βϑ (Γεωμ. 176). ἄρα ἡ βαϑ μετρεῖται τῷ ἡμίσει τῦ καταλοίπυ, εἴτ' ὖν τῷ $\frac{αβ}{2} + \frac{αϑ}{2}$.

σότητι ἀπειροστῇ ἑαυτῶν, διαφέροντα ἀλλήλων, ἡ γωνία μετρηθήσεται τῷ τόξῳ ΓΔ = ΒΓ, ϗ δὴ ἔσται = ΓΞΔ, τῆς ΒΓΔ γωνίας, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ϗ τῆς χορδῆς ΓΔ, ἴσης $= \frac{ΓΞΔ}{2}$.

149. Ἐὰν δὲ αἱ τεταγμέναι ἐξίωσιν ἀπὸ τοῦ τῆς καμπύλης σημείου Γ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΛΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ τῆς καμπυλότητος, ὑποτιθεμένου τοῦ τῆς γωνίας ΔΓΛ μέτρου (λαμβανομένου ἐν κύκλῳ, οὗ ἡ ἀκτὶς = 1) = δχ, ἔσται 1 : δχ :: ΓΔ = δυ (ὑποτιθεμένου ἀδιορίστου τοῦ ΓΔ): ΔΛ = δυ. δχ. ἀλλ' οἱ τομεῖς ΓΞΔ, ΛΓΔ εἰσὶν ὅμοιοι· ἄρα ΞΔ = Α : ΓΔ = δυ :: ΓΔ = δυ : ΔΛ = δυ · δχ. ἄρα τηνικαῦτα πρὸς τῷ σημείῳ Γ ἐστὶν $Α = \frac{δυ}{δχ}$, ἥτις ἐστὶν ἰδιαιτέρα περίπτωσις.

150. Ἐξίτωσαν ἤδη αἱ τεταγμέναι ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ, κειμένου ὡς ἄντις βούλοιτο ὡς πρὸς τὴν καμπύλην· κέντρῳ οὖν τῷ Ζ γεγράφθω τόξον τὸ Γμ = δχ. ϗ ἤχθω ἡ ΖΜ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΞΓ· τὰ τοίνυν τρίγωνα ΖΓΜ, ΔΓμ, ἔχοντα, ὀρθὰς μὲν τὰς γωνίας Μ, μ, ἴσας δὲ τὰς ὑπὸ ΖΓΜ, ΓΔμ (*), εἰσὶν ὅμοια· ἄρα, ὑποτιθεμένης τῆς ΖΓ = υ, ἔσται Δμ = δυ : ΔΓ :: ΖΜ : ΖΓ = υ· ἀχθείσης δὲ πρὸς ὀρθὰς τῆς Ζτ τῇ ΞΔ, τὰ τρίγωνα ΖΜω, Ξωτ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ϗ τὸ ΞΔΓ, ὅμοιον ὂν τῷ ωτΞ (δυνατὸν γὰρ ἐκλαβεῖν τὴν τῇ ΞΔ κάθετον ω τ ὡς παράλληλον τῇ ΓΔ), ὅμοιον ἔσται ϗ τῷ ΖΜω· ϗ ἐκ τούτου ΔΓ : Μω

(*) Ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν δύο τῶν γωνιῶν κοινὴ προστεθῇ ἡ ὑπὸ ΞΓμ, ἔσονται ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΖΓμ, ΞΓΔ γωνίαι.

$= δπ$ (ὑποτιθεμένου τοῦ $ΓΜ = π$) $:: ΓΞ = Α : ΞΜ$· ἐπεὶ ἄρα οἱ μέσοι τῆς πρώτης ἀναλογίας ὅροι ταὐτίζονται τοῖς τῆς δευτέρας ἄκροις, ἔσται $δυ \times υ = δπ \times Α$, ἢ $Α = \frac{υδυ}{δπ}$· ἀλλ' ἐκ τῶν τριγώνων ΓΔμ, ΖΜΓ πρόεισι $ΖΓ : ΓΜ :: ΓΔ : Γμ$, ἢ $υ : π :: δσ : δχ$· ἄρα $π = \frac{υδχ}{δσ}$.

ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ $Α = \frac{υδυ}{δπ}$ ἀντικατασταθῇ ἡ τοῦ $δπ$ δύναμις, λαμβανομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $π = \frac{υδχ}{δσ}$, εἴτ' οὖν $δπ = \frac{δυδχδσ + υδδχδσ - υδχδδσ}{δσ^2}$, εὑρεθήσεται Α

$$= \frac{υδυδσ^2}{δσ\,(δυδχ + υδδχ) - υδχδδσ},$$ καὶ ἐπεὶ $δσ^2 = δχ^2 + δυ^2$ (καὶ γὰρ τὸ τρίγωνον ΓμΔ ἐστὶν ὀρθογώνιον, ἡ δ' ἔκθεσις τοῦ $δσ^2$ ἐστὶν ἡ αὐτή, ὅταν αἱ τεταγμέναι ὦσι κάθετοι ταῖς ἀποτετμημέναις) καὶ ἑπομένως $δσ = (δχ^2 + δυ^2)^{\frac{1}{2}}$, ὁ παρονομαστὴς τῆς δυνάμεως τοῦ Α γενήσεται, ἀντικαθισταμένης τῆς τοῦ $δδσ$ δυνάμεως, ἥτις ἐστὶ $\frac{δχδδχ + δυδδυ}{δσ}$, γενήσεται φημὶ =

$$\frac{δσ^2\,(δυδχ + υδδχ) - υδχ\,.\,(δχδδχ + δυδδυ)}{δσ},$$ ἤ, διαπερανθέντων τῶν σεσημειωμένων πολλαπλασιασμῶν, καὶ ἀναγωγῆς γενομένης,

$$\frac{δυ\,(δχ^3 + δχδυ^2 + υδυδδχ - υδχδδυ)}{δσ}$$· διὰ ταύτης

ἄρα τῆς ποσότητος διαιρεμένης τῆς $\upsilon\delta\upsilon\delta\sigma^2$, ἐ̓ ἀποβαλλομένης τῆς δυ, ἥτις κοινὴ ἐνυπάρχει τῷ τε ἀριθμητῇ καὶ τῷ παρανομαςῇ τῇ πηλίκε, πορίζεται A =

$$\frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon} = \frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi\delta\sigma^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$$

151. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δχ, ἔςαι ὁδχ $= 0$, ἐ̓ $A = \dfrac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$· ἐὰν δὲ ἄτρεπτον ὑποτεθῇ τὸ δυ, γίνεται A =

$\dfrac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi}$· ἐὰν δ' ἐκ τῇ σημείε Ξ (χ. 34) ἀχθῇ ἡ ΞΝ κάθετος τῇ ἀκτῖνι ΖΓ, πλευραὶ τῆς φιλέσης ἀκτῖνος ὀνομάζονται αἱ ΞΝ, ΓΝ, ἐ̓ ἡ μὲν ΞΝ καλεῖται πρώτη, ἡ δὲ ΓΝ δευτέρα πλευρὰ τῆς φιλέσης ἡμιδιαμέτρε· ἵνα δὲ αὗται διορισθῶσιν, ἐπιςατέον, ὡς εἰ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΖΓμ, ΞΓΔ ἀφαιρεθῇ κοινὴ ἡ γωνία ΞΓμ, αἱ κατάλοιποι ΝΓΞ, μΓΔ ἔσονται ἴσαι· ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΞΝΓ, μΓΔ ὅμοιά εἰσι, ἐ̓ ἐντεῦθεν ΓΔ : Γμ :: ΓΞ : ΓΝ, ἐ̓ ΓΔ : Δμ :: ΓΞ : ΝΞ· ἄρα ά. $\Gamma N = \dfrac{\Gamma\mu . \Gamma\Xi}{\Gamma\Delta} =$

$\dfrac{\upsilon\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$· ἄρα β'. ΝΞ =

$\dfrac{\Gamma\Xi . \Delta\mu}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\upsilon\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$· ὑποτιθεμένων δὲ ἐκ διαδοχῆς ἀτρέπτων τῶν δχ, δυ, οἱ τύποι ἀπλέςεροι καθίςανται· ἐὰν ἡ δύναμις τῦ Α καὶ τῆς ΓΝ ᾖ ὑπαρκτική, ἡ καμπύλη ςρέψει τὴν ἑαυτῆς κοιλότητα πρὸς τὸ μόνιμον σημεῖον, τὐναντίον δὲ συμβὰν, τὴν κυρτότητα· ἵνα δὲ χρησώμεθα τοῖς ἐκτεθεῖσι τύποις, ἐὰν αἱ καμπύλαι γεγραμμέναι ὦσι διὰ τῦ ἄξονος, ἐκβλητέον τὴν ἑτέραν τῶν μεταβλητῶν τὴν χ, ἢ τὴν υ διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως· καὶ δὴ διορισθήσεται δύναμις τῆς ἀκτῖνος καὶ πλευρῶν αὐτῆς ἐν ὅροις πεπερασμένοις· τῆς δὲ καμπύλης γεγραμμένης διὰ τῆς ἑςίας, ἐκβλητέον τὸ δχ, καὶ θηρευτέον τήν τε ἀκτῖνα Α, καὶ τὰς αὐτῆς πλευρὰς περιεχύσας τὴν υ.

152. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἐν οἷς οὐδὲν ἄτρεπτον ἀπειροςὸν ὑποτέθειται τύποις, ἐκβαλλομένυ ἑνὸς τῶν δευτέρων ἀπειροςῶν διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, ἀεὶ ἐκβληθήσεται θάτερον δευτεροταγὲς ἀπειροςόν· ὥςε ἐξωθουμένου τοῦ $\delta\delta\chi$, ἐξωθήσονται οἱ δύω ὅροι $\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon$· ἔςω γὰρ καμπύλης ἐξίσωσις ἡ $\delta\chi = \kappa\delta\upsilon$, τοῦ κ ἐμφαίνοντος συνέκθεσίν τινα τοῦ χ καὶ τοῦ υ· ἔςαι τοίνυν $\delta\delta\chi = \delta\kappa \cdot \delta\upsilon + \kappa\delta\delta\upsilon$· ἄρα $\delta\upsilon\delta\delta\chi = \delta\upsilon \times (\delta\kappa . \delta\upsilon + \kappa\delta\delta\upsilon)$, $\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon = \delta\upsilon \times (\delta\kappa . \delta\upsilon + \kappa\delta\delta\upsilon) - \delta\chi\delta\delta\upsilon = \delta\kappa\delta\upsilon^2 + \kappa\delta\upsilon\delta\delta\upsilon - \kappa\delta\upsilon\delta\delta\upsilon$ (ἀντικαθισαμένης τῆς δυνάμεως τῦ $\delta\chi$) $= \delta\kappa\delta\upsilon^2$, ποσότης μηδὲν περιέχυσα ἀπειροςὸν δεύτερον.

153. Εὑρημένης δὲ τῆς τε φιλέσης ἀκτῖνος καὶ τῶν αὐτῆς πλευρῶν, ἵνα διορισθῇ ἡ ἐξειλιγμένη καμπύλης τῆς ΒΔ (σχ. 35), ἀνήχθω εἰς τὸν αὐτῆς ἄξονα ΑΠ, καὶ γενέσθω $ΑΛ = \chi$, καὶ $ΛΓ = \upsilon$· ὑκῦν εὑρεθήσεται ἐξίσωσις μεταξὺ χ καὶ υ· καὶ δὴ ἥτε ἀκτὶς ΞΓ καὶ αἱ αὐτῆς πλευραὶ δοθήσονται περιέχυσαι χ καὶ υ· τῦ δὲ σημείυ Ξ ὄντος ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ, ἀπ᾽ αὐτῦ ἤχθω τεταγμέ-

γως ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΠ ἡ ΞΠ = κ· κ ἄρα ἔςαι ἡ ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ τεταγμένη, ἧς ἀποτετμημένη ἔςαι ΑΠ = π· ϗ ἐπείπερ ΝΞ = ΑΠ, ϗ ΑΝ = ΓΑ — ΓΝ = υ — ΓΝ, εὑρεθήσονται δύω ἕτεραι ἐξισώσεις π = χ + ΞΝ, ϗ κ = υ — ΚΝ, ἐν αἷς ΞΝ, ϗ ΓΝ δεδομέναι εἰσὶ διὰ χ ϗ υ· ἔσονται ἄρα ἐξισώσεις τρεῖς· ϗ ἐὰν διὰ τῶν δύω ἐξωθῶσιν αἱ χ, υ, πορισθήσεται ἐξίσωσις τῶν π ϗ κ, ἐκδηλοῦσα τὴν τῆς ἐξειλιγμένης φύσιν.

154. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ καμπύλη γεγραμμένη ᾖ διὰ τῆς ἑξῆς Ζ (σχ. 34), ϗ δοθῇ ἐξίσωσις μεταξὺ ΖΓ = υ, ϗ Γμ = δχ, εὑρεθήσεται ἥ τε φιλοῦσα ἀκτὶς ϗ αὐτῆς αἱ πλευραὶ διὰ υ· προσαχθείσης δὲ τῆς ΔΞ ἀκτῖνος ἐς τὸ Π, ὥςτε τὸ Π κέντρον εἶναι τοῦ ἐφεξῆς τόξου Δβ, ἡ ἐξειλιγμένη διελεύσεται διὰ τῶν σημείων Ξ, Π· ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΕΞ (ἀκτὶς τοῦ τόξου ΞΜ) ϗ ΕΠ, ϗ γενέσθω ΕΞ = π, ϗ ΞΜ = δκ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐξίσωσιν τῶν π, δκ· ἡ εὐθεῖα ΠΞ ἐςὶ διαφορὰ τῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου ΓΔ, ϗ τῆς τοῦ τόξου Δβ· αὕτη ἄρα ἐςὶ τὸ ἀπειροςὸν τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου· ἔςι δὲ αὖθις ΜΠ = δπ ϗ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΞΜΠ εὑρίσκεται ΠΞ, εἴτ' οὖν τὸ ἀπειροςὸν τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ἢ τὸ ἀπειροςὸν τῆς ἐξειλιγμένης = $\sqrt{\overline{\delta\pi^2 + \delta\kappa^2}}$· ἔςι δὲ ϗ ΕΞ = π = $\sqrt{(\mathrm{EN}^2 + \Xi\mathrm{N}^2)}$, ἤ, ἐπεὶ ΕΝ = υ — ΓΝ, π = $\sqrt{\overline{(\upsilon - \Gamma\mathrm{N})^2 + \Xi\mathrm{N}^2}}$· ἀλλὰ ΓΝ, ϗ ΞΝ ἐκλαμβάνονται ὡς δεδομέναι δι' υ· ἄρα πορισθήσονται δύω ἐξισώσεις διὰ τριῶν ἀγνώςων υ, π, δκ, ϗ τοῦ υ ἀποβαλλομένου, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις τῶν π, δκ, ἐπανήκουσα τῇ ἐξειλιγμένῃ.

155. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Εὑρεῖν τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα τῆς παραβολῆς ΑΓ (σχ. 36).