ρα $BM = \frac{\beta}{2} - \frac{\chi\chi}{\beta}$ · ϗ ἐπείπερ $KE = BM$, ἔςαι

$K\Delta^2 = (\chi - \frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\beta}{2} - \frac{\chi\chi}{\beta})^2$, ποσότης ἀ-

ναγομένη εἰς $- \alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\chi^4}{\beta\beta} + \frac{\beta^2}{4}$ · ἔςι δὲ ϗ

$K\Delta = KA$, ϗ $KA^2 = AB^2 + KB^2 = \frac{\beta\beta}{4} + \frac{\alpha\alpha}{4}$ · ἄρα

$\frac{\beta\beta}{4} + \frac{\alpha\alpha}{4} = - \alpha\chi + \frac{\chi^4}{\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha}{4} + \frac{\beta^2}{4}$ · μεταθέ-

σει ἄρα ϗ ἀναγωγῇ, $\frac{\chi^4}{\beta\beta} = \alpha\chi$, $\chi^4 = \beta\beta\alpha\chi$, $\chi^3 = \beta$

$\beta\alpha$, $\chi = \sqrt[3]{\beta\beta\alpha}$ · ἄρα $\Delta M = \chi$.

103. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐκ τῆς προόδου ∹ $\beta : \chi : \psi : \alpha$ (ὡς ἀνωτέρω ὑποσεσημείωται) προέρχεται $\beta : \alpha :: \beta^3 : \chi^3$, εἴτ᾽ οὖν $\chi^3 : \beta^3 :: \alpha : \beta$ · ἐὰν ἄρα $\alpha$ ᾖ διπλοῦν, τριπλοῦν, τετραπλοῦν κτ᾽ τοῦ $\beta$, ὁ ἐκ τοῦ $\chi$ κύβος ἔςαι διπλάσιος, ἢ τριπλάσιος κτ᾽ τοῦ ἐκ τοῦ $\beta$ · εὐπετῶς ἄρα ἐπιλύεται τὸ περὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου πρόβλημα διὰ κύκλου ϗ παραβολῆς, ὃ φθάσαντες δι᾽ ὑπερβολῆς ϗ παραβολῆς ἐπελύσαμεν (Ὑψ. Γεωμ. 309).

104. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ΄. Ἡμικυκλίῳ τῷ $AB\mu$ ἐγγράψαι τὸ μέγιςον τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων τριγώνων (σχ. 14).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ διάμετρος $A\mu = \alpha$, ϗ ἡ πλευρὰ $AB = \chi$ · ἐπεὶ δὲ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία B ἐςὶν ὀρθὴ (Γεωμ. 180), τὸ τρίγωνον $AB\mu$ ἔςαι ὀρθογώνιον · ϗ δὴ ἔςαι $B\mu^2 = A\mu^2 - BA^2$, $B\mu = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$ · τὸ δὲ τρίγωνον ABμ ἔςαι $= \frac{1}{2}$ AB . Bμ $= \frac{1}{2}\chi \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ὅπερ τὰ ἀπειροςὰ, ἰσέμενα τῷ ο, παρέχουσι $\frac{\delta\chi}{2} \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\chi \times - 2\chi\delta\chi \times (\alpha\alpha - \chi\chi)^{\frac{1}{2}} = 0 = \frac{\delta\chi}{2} . \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} - \frac{\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} = 0$, εἴτ' οὖν (ἀναγωγῇ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα) $\frac{\alpha\alpha\delta\chi - 2\chi\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} = \delta\upsilon = 0$· ἄρα $\alpha\alpha - 2\chi\chi = 0$, $\alpha\alpha = 2\chi\chi$, $\chi\chi = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \alpha\sqrt{\frac{1}{2}}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν $B\mu = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, εὑρεθήσεται $B\mu = \sqrt{(\frac{2\alpha\alpha}{2} - \frac{\alpha\alpha}{2})} = \alpha\sqrt{\frac{1}{2}}$· ἄρα BA $=$ Bμ, τοῦτ' ἔςι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔςι τὸ μέγιςον ἁπάντων τῶν ἡμικυκλίῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων.

Ἐὰν ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = \frac{\alpha\alpha\delta\chi - 2\chi\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} = \infty$, εὑρεθήσεται $2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = 0$, $\alpha\alpha - \chi\chi = 0$, $\alpha\alpha = \chi\chi$, $\alpha = \chi$· ἄρα ἡ AB πλευρὰ ἔςαι ἴση τῇ Aμ διαμέτρῳ, ᾗ καὶ συμπίπτει, καὶ ἑπομένως οὐδὲν συνίςαται τρίγωνον, ἤ, εἰ βούλει, τὸ τρίγωνον ἔςαι $= 0$· οὐδεμία ἄρα λύσις τοῦ προβλήματος ἔςαι ἀποδεκτέα, εἰμὴ ἡ ἄρτι ἀποδεδομένη.

105. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'. Σφαίρᾳ δοθείσῃ ἐγγράψαι κῶνον, οὗ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια μεγίςη εἴη πάντων τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων (σχ. 15).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος $= \alpha$, καὶ τῦ ζητυμένυ κώνυ ΓΛμ τὸ ὕψος ΑΔ $= \chi$· ἐπεὶ δὲ ἡ κυρτὴ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ΔΓ, ἢ τῦ ἡμίσεος τῆς ΑΓ, αἱ δὲ κυκλικαὶ περιφέρειαι εἰσὶν ἐν τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων, ἡ ζητυμένη ἐπιφάνεια ἔςαι ἀνάλογος τῷ ΓΔ × ΑΓ· ἀλλὰ ΑΓ $= \sqrt{(\alpha \cdot \chi)}$ ἢ ΓΔ $= \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ὡς δῆλον, ἄρα ΑΓ.ΓΔ $= \sqrt{\alpha\chi} \times \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)} = \sqrt{(\alpha^2\chi\chi - \alpha\chi^3)}$· ἐπεὶ δὲ αὕτη ἡ ποσότης ζητεῖται εἶναι μεγίςη· ἢ τὸ ἀπ᾿ αὐτῆς ἄρα τετράγωνον $\alpha^2\chi\chi - \alpha\chi^3$ ἔςαι ὡσαύτως μέγιςον· ἄρα $2\alpha^2\chi\delta\chi - 3\alpha\chi^2\delta\chi = 0$, $2\alpha - 3\chi = 0$, $2\alpha = 3\chi$, $\chi = \frac{2\alpha}{3}$· δεῖ ἄρα εἶναι τὸν τῦ ζητυμένυ κώνυ ἄξονα δύω τριτημόρια τῆς σφαιρικῆς διαμέτρυ.

106. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷδε τῷ προβλήματι ἐλήφθησαν τὰ ἀπειροςὰ, τῆς μὲν κωνικῆς ἐπιφανείας ὀχὶ, ποσότητος δὲ ἀναλόγυ ταύτῃ, εἴτ᾿ ὖν τῆς πρὸς ἐκείνην λόγον δεδομένον ἐχύσης· ἐφεῖται δὲ τῦτο ἀείποτε ἐν τῇ ζητήσει τῦ μεγίςυ καὶ ἐλαχίςυ· ἔςω γὰρ ποσότης ἡτισῦν ἡ $\gamma\chi - \chi^3 = \upsilon$, ἧς πρόκειται εὑρεῖν τὸ μέγιςον, ἢ τὸ ἐλάχιςον· ἐὰν ὖν ἀντὶ τῶν ταύτης τῆς ποσότητός ἀπειροςῶν ληφθῶσι τὰ ἀπειροςὰ τῆς ποσότητος $\frac{\beta}{\alpha}(\gamma\chi - \chi^3)$, ἥτις ἐςὶν ἐκείνῃ ἀνάλογος, εἴτ᾿ ὖν ἔχει πρὸς τὴν προτεθεῖσαν ποσότητα λόγον ὃν $\alpha : \beta$· ἐπεί ἐςιν $\alpha : \beta :: \gamma\chi - \chi^3 : \frac{\beta}{\alpha} \times (\gamma\chi - \chi^3)$, εὑρεθήσεται (100) ἡ αὐτὴ δύναμις τῦ $\chi$· λυσιτελεῖ δὲ αὕτη ἡ σημείωσις ἐν πολλαῖς περιπτώσεσι.

107. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ΄. Ἐπὶ τῆς εὐθείας Αμ, ὡς ὑποτεινέσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τεθείσης, συςήσασθαι τὸ μέγιςον τῶν δυνατῶν ὀρθογωνίων τριγώνων (σχ. 14).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ εὐθεῖα $A\mu = \alpha$, ϗ ἡ πλευρὰ $AB = \chi$· ἡ τρίτη ἄρα πλευρὰ ἔςαι $= \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· ἔςαι δὲ $AB \times B\mu = \frac{\chi}{2} \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, τύπος τῆς τῦ τριγώνυ ἐπιφανείας· γενομένων ἓν τῶν αὐτῶν, ἃ ϗ ἀνωτέρω (104), εὑρεθήσεται $AB = B\mu = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$, τῦτ᾽ ἔςι τὸ ζητέμενον μέγιςον τρίγωνον ἔςαι ἰσοσκελές· ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς Αμ διαμέτρυ γραφῇ ἡμικύκλιον, ϗ ἐκ τῦ ἐν αὐτῷ μέσυ σημείυ β ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΒΑ, Βμ, ποριωθήσεται τὸ ζητέμενον τρίγωνον.

108. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ΄. Ἁπάντων τῶν ἀπειραρίθμων κυλίνδρων, τῶν σφαίρᾳ ἐγγραφῆναι δυναμένων, εὑρεῖν τὸν τὴν μεγίςην ἐπιφάνειαν ἔχοντα ΒΝΜΖ (σχ. 16).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ τῆς σφαίρας ἀκτὶς $K\alpha = \alpha$, καὶ ἐμφαινέτω ἡ Ππ τὸν τῦ κυλίνδρυ ἄξονα, ϗ $K\Pi$ ἔςω $= \chi$· ἐκεῖν διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα ἔςαι $\Pi\mu^2 = \alpha\alpha - \chi\chi$· ἀλλ᾽ ἡ κυκλικὴ περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς ἡ Πμ, ἔςιν ὥσπερ αὕτη ἡ ἀκτὶς, ϗ $\Pi\pi = 2\chi$ (ἐὰν γὰρ ἐκ τῦ Κ κέντρυ ἀχθῇ ἡ Κσ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΜΝ, ἡ $MN = \pi\Pi$ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ σ)· ἄρα ἡ ποσότης $2\chi . \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$ ἔςιν ἀνάλογος τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τῦ ζητυμένυ κυλίνδρυ· ἐκεῖν ὑποτιθεμένυ $\upsilon = 2\chi . \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ἢ $\upsilon\upsilon = 4\chi\chi\alpha\alpha - 4\chi^4$, εὑρεθήσεται $2\upsilon\delta\upsilon = 0 = 8\chi . \alpha\alpha\delta\chi - 16\chi^3\delta\chi$, $\alpha\alpha - 2\chi\chi = 0$, $\alpha\alpha = 2\chi\chi$, $\chi^2 = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· λαμβανομένης ἄρα ΚΠ

$= \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$, εἴτ' ὖν μέσης ἀναλόγυ μεταξὺ $\alpha$ ἢ $\frac{\alpha}{2}$, πορισθήσεται τὸ σημεῖον Π, δι' ὖ ἀχθεῖσα ἡ τεταγμένη Πμ ἔσαι ἀκτὶς τῦ κύκλυ, ὃς ὑποβληθήσεται βάσις· ἡ δὲ Ππ ἔσαι ἄξων τῦ ζητυμένυ κυλίνδρυ.

109. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ καμπύλη ΑΜΖΒ ὑπάρχῃ ἔλλειψις, ἧς μείζων μὲν ἡμιάξων εἴη $= \alpha$, ἐλάττων δὲ $= \beta$, εὑρεθήσεται Πμ $= \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· αὕτη δὲ ἡ ποσότης, πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ $2\chi$, ἀνάλογος ἔσαι τῇ ἐπιφανείᾳ τῦ τῇ ἐλλειπτικῇ κωνοειδεῖ ἐγγεγραμμένυ κυλίνδρυ· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῦτο ἔσι πρὸς τὸ ὑπὲρ τῆς σφαίρας εὑρεθὲν ἐν λόγῳ δεδομένῳ (106)· ἄρα ἡ αὐτὴ τῦ $\chi$ εὑρεθήσεται δύναμις· ἡ αὐτὴ δ' ἂν εὑρεθείη δύναμις, κἂν ζητηθείη τὸ μέγισον ὀρθογώνιον ἐλλείψει ἐγγράψαι· ἔσαι γὰρ τόδε τὸ ὀρθογώνιον $= 2$Πμ $\times 2\chi = 4\chi\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· ἄρα τό,τε μέγισον τῶν, ἅπερ ἂν ἐλλείψει ἐγγραφείη, ὀρθογωνίων, ἢ ὁ τὴν μεγίσην ἔχων ἐπιφάνειαν τῶν ἐλλειπτικῇ κωνοειδεῖ ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων, εὑρεθήσονται, λαμβανομένης ΚΠ $= \chi = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· ἀντικαθισαμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ τῦ Πμ², εὑρίσκεται Πμ² $= \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} \times \frac{\alpha\alpha}{2} = \frac{\beta\beta}{2}$, ἢ Πμ $= \sqrt{\frac{\beta\beta}{2}}$, ἥτις ἐσὶ μέση ἀνάλογος τῶν $\beta$, $\frac{\beta}{2}$.

Ἀλλὰ τῆς σερεότητος τῦ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένυ κυλίνδρυ ὔσης ἀναλόγυ τῷ $2\chi$. Πμ², εἴτ' ὖν τῷ $2\alpha\chi\chi$

$-2\chi^3$, εἰς εὕρεσιν τῦ μεγίςυ ἰσωθήτω τῷ ο τὰ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροςά· ὅθεν ἔςαι $2\alpha\alpha\delta\chi - 6\chi^2\delta\chi = o$, $\chi = \sqrt{(\frac{\alpha}{3}.\alpha)}$, ἐ̥ $2\chi = 2\sqrt{(\frac{\alpha}{3}.\alpha)}$· τοσόνδε ἦν ἔςαι τὸ ὕψος τῦ μεγίςυ κυλίνδρυ τῶν δυναμένων ἐγγραφῆναι σφαίρᾳ, ἧς ἡ ἀκτὶς $= \alpha$· ὡς ἦν πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἀκτῖνα εὐπετὲς συνιδεῖν, ὅτι τηνικαῦτα ἔςαι

$$\Pi\mu = \sqrt{(\frac{2\alpha}{3}.\alpha)}.$$

110. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ΄.** Εὐθεῖαν δοθεῖσαν τὴν Αβ ὕτως εἰς δύω κατὰ τὸ γ τεμεῖν, ὅπως τὸ γινόμενον ὑπὸ $A\gamma^\mu$ ἐ̥ $\gamma\beta^\nu$ τὸ μέγιςον ἦ ἁπάντων (σχ. 17).

**ΛΥΣΙΣ.** Ἔςω εὐθεῖα ἡ $A\beta = \alpha$, καὶ $A\gamma = \chi$· ἄρα $\gamma\beta = \alpha - \chi$· τοιγαρῦν ὑποτιθεμένυ $\upsilon = \chi^\mu \times (\alpha - \chi)^\nu$, ἔςαι $\delta\upsilon = o = \mu\chi^{\mu-1}\delta\chi \times (\alpha - \chi)^\nu - \nu\chi\mu^\mu\delta\chi\,(\alpha - \chi)^{\nu-1} = o$· ἄρα μεταθέσει ἐ̥ διαιρέσει διὰ $\chi^{\mu-1} \times (\alpha - \chi)^{\nu-1}\,\delta\chi$, πρόεισι $\mu\alpha - \mu\chi = \nu\chi$, $\mu\alpha = \mu\chi + \nu\chi$, $\chi = \frac{\mu\alpha}{\mu+\nu}$· ἐὰν ἄρα ἡ $\mu = 2$, ἐ̥ $\nu = 1$, εὑρεθήσεται $\chi = \frac{2\alpha}{3}$, τῦτ' ἔςι τὸ μέγιςον τῶν δυνατῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν βάσις μὲν τὸ ἀπὸ τῦ τμήματος Αγ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ λοιπὸν τῆς Αβ εὐθείας, συςαθήσεται, ὅταν Αγ ἦ $\frac{2}{3}$ τῆς εὐθείας Αβ· ἐὰν δὲ ἡ $\mu = \nu = 1$, ἔςαι $\chi = \frac{\alpha}{2}$· ἐκεῖν τὸ μέγιςον τῶν ὀρθογωνίων, τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύω τμημάτων εὐθείας τῆς α, συςαθήσεται, ὅταν τὰ τμήματα ὦσιν ἰσάλληλα· τῦ δὲ α ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, ὑποτεθέντων $\mu = 3$, καὶ

$\nu = 2$, ἔςαι $\chi = \frac{3\alpha}{5}$, ϗ ἑπομένως $\gamma\beta = \alpha - \chi = \frac{2\alpha}{5}$· τὸ ἄρα μέγιςον γινόμενον, ὧν ἄντις ποιήσειε, διελὼν ἀριθμὸν εἰς δύω μέρη, ϗ πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ θατέρυ κύβον ἐπὶ τὸν ἐκ θατέρυ τετράγωνον, συςαθήσεται, ὅταν τὸ μὲν ᾖ $\frac{3}{5}$ τῦ προτεθέντος ἀριθμῦ, θάτερον δὲ μέρος $\frac{2}{5}$· ὕτω, προτεθέντος τῦ ἀριθμῦ 10, τὸ μὲν πρῶτον μέρος ἔςαι $= 6$, τὸ δὲ $= 4$, ὁ δὲ ὑπὸ 216 ϗ 16 γινόμενος ὁ μέγιςος ἔςαι ἀριθμὸς τῶν ὕτω γενέσθαι δυναμένων. Τῦ δὲ ν ἀριθμὸν λειπτικὸν ἐμφαίνοντος, ἡ ποσότης $\chi^\mu (\alpha - \chi)^\nu$ ἔςαι τηνικαῦτα ἐλαχίςη· ὕτω, φέρε, ὑποτιθεμένων τῦ μὲν $\mu = 3$, τῦ δὲ $\nu = -2$, εὑρεθήσεται $\chi = 3\alpha$, ϗ

$$\chi^\mu (\alpha - \chi)^\nu = (3\alpha)^3 . (-2\alpha)^{-2} = \frac{27\alpha\alpha\alpha}{4\alpha\alpha} = \frac{27\alpha}{4},$$

ὅπερ ἔςαι ἐλάχιςον· ὄντων δὲ, τῦ μὲν $\nu = -1$, τῦ δὲ $\mu = 2$, εὑρεθήσεται $\frac{\chi^2}{\alpha - \chi}$, ὅπερ, ὑποτεθέντος $\chi = \frac{2\alpha}{2 - 1} = 2\alpha$, γίνεται $= \frac{4\alpha\alpha}{\alpha - 2\alpha} = \frac{4\alpha\alpha}{-\alpha} = -4\alpha$· τηνικαῦτα ἄρα τὸ σημεῖον Γ εὑρεθήσεται ἐπὶ τῆς Αβ, ἐπὶ θάτερα προαχθείσης, ὡς εἶναι $A\Gamma = 2\alpha = \frac{\mu\alpha}{\mu - \nu} = 2\alpha$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὁ παρονομαςὴς $\alpha - \chi = 0$, ἔςαι $\frac{4\alpha\alpha}{\alpha - \alpha} = \frac{4\alpha\alpha}{0} = \infty$· ἔςιν ὖν μέγιςόν τι ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει· ϗ γὰρ εἰ τὸ χ ὑποτεθείη ἔλαττον ἢ μεῖζον τῦ α, εὑρίσκεται ποσότης ἐλάττων ἢ ὅταν ὑποτεθῇ $\chi = \alpha$.

111. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ις'. Τριχοτομῆσαι τὴν δοθεῖ-

σαν εὐθεῖαν $\alpha$ εἰς τμήματα τὰ $A = \chi$, $B = \psi$, $\Gamma = \alpha - \chi - \psi$, ὅπως τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $\vartheta = \chi^\mu \psi^\nu (\alpha - \chi - \psi)^\rho$ μέγιστον ᾖ πάντων τῶν ὕτω γενέσθαι δυναμένων.

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω τὰ ἀπειροστὰ τῦ γινομένυ $\vartheta$, ἐκλαμβανομένυ τῦ $\psi$ ὡς ἀτρέπτυ· ϗ δὴ ἔσαι $\mu\delta\chi \cdot \chi^{\mu-1} \psi^\nu \times (\alpha - \chi - \psi)^\rho - \rho\delta\chi \cdot \chi^\mu \psi^\nu (\alpha - \chi - \psi)^{\rho-1} = 0$· διαιρέσει δὲ διὰ $\delta\chi\chi^{\mu-1} \psi^\nu \times (\alpha - \chi - \psi)^{\rho-1}$, προέρχεται $\mu \cdot (\alpha - \psi - \chi) - \rho\chi = 0$· ὅθεν $\chi = \frac{\mu\alpha - \mu\psi}{\mu + \rho}$· ταύτης δὲ τῆς τῦ $\chi$ δυνάμεως ἀντικατασαθείσης ἐν τῷ γινομένῳ $\vartheta$, ἀποβαλλομένυ τῦ ἀτρέπτυ ποιητῦ προκύψει $\psi^\nu (\alpha - \psi)^{\mu+\rho}$· τῶν δὲ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροστῶν διαιρεθέντων διὰ $\delta\psi \cdot \psi^{\nu-1}$, ϗ ἰσωθέντων τῷ $0$, προέρχεται $\nu\alpha - \nu\psi - \mu\psi - \rho\psi = 0$, εἶτ' ὖν $\psi = \frac{\nu\alpha}{\mu + \nu + \rho}$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως ἐν τῇ τῆς $\chi$ ἀντικατασαθείσης, εὑρίσκεται $A = \frac{\mu\alpha}{\mu + \nu + \rho}$· ἀντικατασαθεισῶν δὲ τῶν δυνάμεων τῆς $\psi$ ϗ τῆς $\chi$, τῶν ἄρτι εὑρημένων ἐν τῇ τῦ $\Gamma$, πορισθήσεται $\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\mu + \nu + \rho}$. ἐὰν ὖν ᾖ $\mu = \nu = \rho = 1$, τὰ τρία τμήματα ἰσάλληλα ἔσονται, ϗ ἕκασον τριτημόριον τῆς εὐθείας $\alpha$· τ' αὐτὸν ἔσαι ϗ εἰ ἀριθμὸς προκέοιτο εἰς τοιάνδε διάτμησιν. Βυλομένοις δὲ διατεμεῖν εὐθεῖαν, ἢ ἀριθμὸν δοθέντα τὸν $\alpha$, εἰς τέσσαρα μέρη $A = \chi$, $B = \psi$, $\Gamma = \omega$, $\Delta = \alpha - \chi - \psi - \omega$, ὅπως τὸ γινόμενον $A^\mu B^\nu \Gamma^\rho \Delta^\sigma$ ὑπάρχῃ μέγιστον, θεμένοις $\mu + \nu + \rho + \sigma = \tau$, ἔσαι $A =$

$\frac{\mu\alpha}{\tau}$, ϗ $B = \frac{\nu\alpha}{\tau}$, ϗ $\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\tau}$, ϗ $\Delta = \frac{\sigma\alpha}{\tau}$, ὡς τὰ μέρη τῆς εὐθείας, ἡ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ α, ὑπάρχειν πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ αὐτῶν δεῖκται· ἐὰν οὖν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ᾖ 6, ϗ $\mu = 3$, ϗ $\nu = 2$, ϗ $\rho = 1$, τὰ τρία μέρη ἔσονται 3, 2, 1: ὁ δὲ γινόμενος ἐκ τοῦ κύβου τοῦ πρώτου, ϗ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου, ϗ τοῦ πρώτου βαθμοῦ τοῦ τρίτου, εἴτ' οὖν ὁ 108 ἐστὶν ὁ μέγιστος τῶν, ὧν ἄντις ποιήσειεν ἐκ τριῶν τοῦ 6 τμημάτων, πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τοῦ πρώτου κύβου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον, ϗ τὸν ἐκ τούτων γενόμενον ἐπὶ τὸν πρῶτον βαθμὸν τοῦ τρίτου.

112. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἰστέον δὲ ὡς, ὅτε ἡ ζητουμένη ποσότης ἀντιστοιχεῖ πολλοῖς ἀγνώστοις ἐχομένοις ἀλλήλων, δυνατὸν ὑποθέσθαι, τινὰ μὲν αὐτῶν τρεπτὰ, τάδ' ἄλλα ἄτρεπτα, εἰσάγοντας τὰς εὑρημένας δυνάμεις ἐν τῇ πρώτῃ ἐκθέσει, μέχρις ἂν ἀφικώμεθα εἰς ἓν μόνον ἄγνωστον· ϗ τηνικαῦτα εὑρεθήσεται ἡ ζητουμένη ποσότης διὰ τῆς ληφθείσης εἰς χρῆσιν ἀνωτέρω (111) μεθόδου.

113. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'. Τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως Αμ συσταθῆναι δυναμένων ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ μέγιστον εὑρεῖν (Σχ. 18).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ περίμετρος $= 2\pi$, ἡ δὲ βάσις $A\mu = \alpha$, ϗ ἡ πλευρὰ $A\beta = \chi$· οὐκοῦν ἡ πλευρὰ βμ ἔσται $= 2\pi - \alpha - \chi$· ἀλλ' ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἐστὶν (Γεωμ. 562) $= \sqrt{\pi . (\pi - \alpha) . (\pi - \chi) . (\alpha + \chi - \pi)}$· ταύτης τῆς ποσότητος ὑποτεθείσης $= \upsilon$ ϗ τετραγωνισθείσης, προέρχεται $\upsilon\upsilon = \pi \times (\pi - \alpha) \times (\pi - \chi) \times (\alpha + \chi - \pi)$· ἐκδηλοῦντες οὖν τὸν λογάριθμον διὰ Λ, καὶ ἀναμιμνησκόμενοι, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ποιητῶν ἔστιν ἴσον τῷ λογαρίθμῳ τοῦ γινομένου, ἕξομεν $\Lambda\pi + \Lambda(\pi - \alpha) + \Lambda(\pi - \chi) + \Lambda(\alpha + \chi - \pi) = 2\,\Lambda\upsilon$· ἐπεὶ $\pi$ ϗ $\alpha$ εἰσὶ ποσότητες ἄτρεπται· ἄρα $\frac{-\delta\chi}{\pi-\chi} + \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi-\pi} = \frac{2\delta\upsilon}{\upsilon} = 0$, ὑποτιθεμένου τοῦ $\delta\upsilon = 0$· ἄρα $\frac{1}{\alpha+\chi-\pi} - \frac{1}{\pi-\chi} = 0$, εἴτ' οὖν $\frac{1}{\alpha+\chi-\pi} = \frac{1}{\pi-\chi}$, ἢ $\pi - \chi = \alpha + \chi - \pi$· ἄρα $2\pi - \alpha = 2\chi$· ἄρα αἱ πλευραὶ Αβ ϗ βμ εἰσὶν ἴσαι ϗ τὸ ζητούμενον τρίγωνον ἰσοσκελές.

114. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Πάντων ἄρα τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων μέγιστόν ἐστι τὸ ἰσόπλευρον· ἐὰν γὰρ ᾖ τὸ ζητούμενον τρίγωνον τὸ Αβμ, ϗ ζητῆται ἡ βάσις αὐτοῦ Αμ, ἐπεὶ ἐκ τῶν εἰρημένων αἱ δύω λοιπαὶ πλευραὶ εἰσὶν ἰσάλληλοι, κληθείσης $2\chi$ τῆς βάσεως, τὸ ἄθροισμα τῶν δύω λοιπῶν πλευρῶν ἔσται $2\pi - 2\chi$, ϗ $\pi - \chi$ ἑκατέρα τῶν δυεῖν· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἔσται $\upsilon = \sqrt{\pi(\pi - 2\chi)\cdot(\chi)\cdot(\chi)}$, $2\lambda\upsilon = \lambda\pi + \lambda(\pi - 2\chi) + 2\lambda\chi$, $\frac{2\delta\upsilon}{\upsilon} = 0 = \frac{-2\delta\chi}{\pi - 2\chi} = \frac{2\delta\chi}{\chi}$, $\frac{-2}{\pi - 2\chi} + \frac{2}{\chi} = 0$, $\frac{2}{\chi} = \frac{2}{\pi - 2\chi}$, $\pi - 2\chi = \chi$, $\pi = 3\chi$, $\chi = \frac{\pi}{3}$, $2\chi = \frac{2\pi}{3}$· ἡ βάσις ἄρα τριτημόριόν ἐστι τῆς περιμέτρου· ϗ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν τριῶν ἔστιν $= \pi - \chi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, τὸ τρίγωνον ἔστιν ἰσόπλευρον.

115. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ἴσων δοθέντι κύβῳ τῷ $\beta^3$, καὶ ὧν μία τῶν πλευρῶν δεδομένη ἐςὶν ἡ $\alpha$, εὑρεῖν τὸ ἔχον ἐλαχίςην ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω μία τῶν ζητουμένων πλευρῶν ἡ $\chi$· τὸ οὖν γινόμενον $\alpha.\chi$ ἔςαι ἴσον ἑνὶ τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων, ὃ δυνάμεθα ἐκλαβεῖν ὡς βάσιν· διαιροῦντες τοίνυν τὴν ςερεότητα $\beta^3$ διὰ τῆς βάσεως $\alpha\chi$ εὑρίσκομεν τὸ ὕψος $\frac{\beta^3}{\alpha\chi}$, ὃ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\alpha$ καὶ $\chi$ χωρὶς ἔξομεν δύω γινόμενα, ὧν τὸ ἄθροισμα ἔςαι τὸ ἥμισυ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας· ἄρα $\alpha\chi + \frac{\beta^3}{\chi} + \frac{\beta^3}{\chi}$ ἐςὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας· ἐξισοῦντες οὖν τῷ 0 τὰ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροςά, εὑρίσκομεν $\alpha d\chi - \frac{\beta\beta\beta d\chi}{\chi\chi} = 0$, $\alpha = \frac{\chi^3}{\chi^2}$, $\chi^2 = \frac{\beta^3}{\alpha}$, $\chi = \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}}$· ἄρα ἡ πλευρὰ $\frac{\beta^3}{\alpha\chi} = \sqrt{\frac{\beta^6}{\alpha\alpha\chi\chi}} = \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}}$· ἄρα ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἐςὶν $= \alpha$, τῶν δὲ λοιπῶν δυεῖν ἑκατέρα $= \sqrt{(\frac{\beta^3}{\alpha})}$.

116. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘ'. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἴσων τῷ δοθέντι κύβῳ $\beta^3$ εὑρεῖν τὸ ἔχον ἐλαχίςην ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν μία τῶν πλευρῶν κληθῇ $\chi$, ἑκατέρα τῶν λοιπῶν δύω ἔςαι $= \sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}}$, ὡς ἕπεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος· λαμβάνοντες οὖν τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν, εὑρίσκομεν τὴν ἡμίσειαν ἐπιφάνειαν $= 2\chi\sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} + \sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} \times \sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} = 2\sqrt{(\beta^3\chi)} + \frac{\beta^3}{\chi} = \upsilon$, $\delta\upsilon = 0 = \frac{\beta^3\delta\chi}{\sqrt{(\beta^3\chi)}} - \frac{\beta^3\delta\chi}{\chi^2}$· ἄρα $\chi^2 = \sqrt{(\beta^3\chi)}$, $\chi^4 = \beta^3\chi$, $\chi^3 = \beta^3$, $\chi = \beta$· ἄρα ἡ πλευρὰ $\chi = \beta$· ϗ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἐϛὶν $= \sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} = \sqrt{\frac{\beta^3}{\beta}} = \sqrt{\beta^2} = \beta$· δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ προτεθεὶς κύβος ἐξικανοῖ πρὸς ἐπίλυσιν τȣ̃ προβλήματος.

**117. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κ΄.** *Πάντων τῶν τὴν αὐτὴν ἐχόντων δεδομένην ϛερεότητα κώνων εὑρεῖν τὸν ἔχοντα ἐλαχίϛην ἐπιφάνειαν.*

**ΛΥΣΙΣ.** Ἔϛω $\upsilon$ ἡ τῆς βάσεως ἀκτὶς, ϗ $\chi$ τὸ ὕψος· $\sqrt{(\upsilon\upsilon + \chi\chi)}$ ἔϛαι ἡ τȣ̃ κώνȣ πλευρά· τιθεῖσι δὲ $1 : \pi :: \upsilon : \pi\upsilon$, εὑρεθήσεται ἡ κυκλικὴ περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς $= 1$· ἄρα $\pi\upsilon\sqrt{(\upsilon\upsilon + \chi\chi)}$ ἔϛαι, ὥσπερ ἡ ζητȣμένη ἐπιφάνεια, ἥτις ὑποτεθείσθω $= \psi$· ἀποβολῇ ἄρα τȣ̃ ἀτρέπτȣ ποιητȣ̃, $\psi^2 = \upsilon^4 + \chi\chi\upsilon^2$· λαμβανομένων δὲ τῶν ἀπειροϛῶν, ϗ ὑποτιθεμένȣ $\delta\psi = 0$, εὑρίσκεται $2\psi\delta\psi = 0 = 4\upsilon^3\delta\upsilon + 2\chi\upsilon\upsilon\delta\chi + 2\chi^2\upsilon\delta\upsilon$· ἡ ἐν ϛερεότης, ȣ̓̃σα ὡς τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως (ἥτις ἐϛὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος $\upsilon$ τετράγωνον) ϗ τȣ̃ ὕψȣς, ἔϛαι ἀνάλογος τῷ $\chi\upsilon\upsilon$· ἀλλ᾽ ἔϛιν ἄτρεπτος ἐξ ὑποθέσεως ἡ ϛερεότης· ἄρα τὸ ἀπειροϛὸν τȣ̃ $\upsilon^2\chi$ ἔϛαι $= 0$· ȣ̓κȣ̃ν $2\upsilon\chi\delta\upsilon + \upsilon^2\delta\chi = 0$, $\upsilon\delta\chi = -2\chi\delta\upsilon$· ἀντικαθιϛαμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως τȣ̃ $\upsilon\delta\chi$ ἐν τῷ τῆς ἐπιφανείας ἀπειροϛῷ, εὑρίσκεται $4\upsilon^3\delta\upsilon - 4\chi^2\upsilon\delta\upsilon + 2\chi^2\upsilon\delta\upsilon = 0$, $4\upsilon^2 - 2\chi^2 = 0$, $4\upsilon^2 = 2\chi^2$, $2\upsilon^2 = \chi\chi$·

ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως τετράγωνον δεῖ εἶναι ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τοῦ ὕψους τετραγώνου.

Ἐὰν δοθείσης στερεότητος ἄγγους κυλινδρικοῦ, πλήρους ὕδατος, ζητηθῶσιν αἵτινες εἶεν αὐτοῦ αἱ διαστάσεις, ἵνα χωρήσῃ ποσότητα δεδομένην ὑγροῦ, τῆς αὐτοῦ ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας ἐλαχίστης ἁπασῶν τῶν δυνατῶν οὔσης, γενέσθω $= \alpha^3$ ἡ δοθεῖσα ποσότης τοῦ ὑγροῦ, ἢ ἡ στερεότης, ἢ τὸ ἐσωτερικὸν διάστημα τοῦ ἄγγους, καὶ $\chi$ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος, καὶ $\psi$ τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος, καὶ ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος $= 1 : \pi$· ἡ ἄρα βάσις τοῦ ἄγγους ἔσται $=\frac{\gamma\chi^2}{4}$, ἡ αὐτοῦ χωρητικότης $=\alpha^3=\frac{\gamma\chi^2\psi}{4}$, ἡ δὲ κοίλη ἐπιφάνεια $=\gamma\chi\psi$· ἐπεὶ δὲ $\alpha^3=\frac{\gamma\chi^2\psi}{4}$, ἡ $\psi=\frac{4\alpha^3}{\gamma\chi^2}$, ἔσται $\gamma\chi\psi=\frac{4\alpha^3}{\chi}$· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως ἐστιν $=\frac{\gamma\chi^2}{4}$· ἄρα ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἐστιν $=\frac{4\alpha^3}{\chi}+\frac{\gamma\chi^3}{4}$, ὅπερ δεῖ εἶναι ἐλάχιστον· εὑρεθήσεται ἄρα

$$-\frac{4\alpha^3\delta\chi}{\chi^2}+\frac{\gamma\chi\delta\chi}{2}=0,$$ εἴτ' οὖν $$-4\alpha^3+\frac{\gamma\chi^3}{2}=0,$$

$$\gamma\chi^3=8\alpha^3,\ \chi^3=\frac{8\alpha^3}{\gamma},\ \chi=\frac{2\alpha}{\sqrt[3]{\gamma}},$$ καὶ $$\psi=\frac{4\alpha^3}{\gamma\chi^2}=$$

$$=\frac{\alpha\sqrt[3]{\gamma^2}}{\gamma}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\gamma^3}}{\sqrt[3]{\gamma}\sqrt[3]{\gamma}}=\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\gamma}}$$· ἄρα τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος τοῦ ἄγγους δεῖ εἶναι ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς ἐσωτερι-

κῆς βάσεως· δεῖ δὲ εἶναι τὴν κοίλην ἐπιφάνειαν =

$$\frac{4a^3}{\gamma} + \frac{\gamma\chi^2}{4} = 2aa \times \sqrt[3]{\gamma} + a^2\sqrt[3]{\gamma} = 3a^2\sqrt[3]{\gamma}.$$

116. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑ'.** Ἐν τριγώνῳ εὑρεῖν σημεῖον τὸ ο, ἀφ' οὗ τῶν πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας ἀχθεισῶν εὐθειῶν τὸ ἄθροισμα εἴη ἐλάχιστον (σχ. 19).

**ΛΥΣΙΣ.** Κέντρῳ τῷ β γεγράφθω κύκλου τόξον διῆκον διὰ τοῦ ζητουμένου σημείου ο· ὑποτεθείσθω δὲ ἡ τοῦδε τοῦ τόξου ἀκτὶς ἄτρεπτος καὶ $= \vartheta$, καὶ αο $= \upsilon$, καὶ ογ $= \chi$· οὐκοῦν ἔσται $\vartheta + \upsilon + \chi$ τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον· ἄρα $\delta\upsilon + \delta\chi = 0$, $\delta\upsilon = -\delta\chi$· ἄρα τὸ ἀπειροστὸν τόξον οι, ὅπερ ἐκληπτέον ὡς εὐθεῖαν, ἐμφαίνει τὸ ἀπειροστὸν τοῦ τόξου ζο, τὰ μέρη ομ, ον τῶν γραμμῶν αο, γο τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τοῦ ο, καὶ αἱ ταῖς γο, αο πρὸς ὀρθὰς ἐφιστάμεναι εὐθεῖαι ιμ, ιν σημαινοῦσι τὰ ἀπειροστὰ τούτων τῶν γραμμῶν, αἵτινες ἑπομένως εἰσὶν ἴσαι, καὶ ἡ γωνία ὑπὸ νοι = μοι (*)· προστεθεῖσαι δὲ αὗται αἱ γωνίαι ταῖς ὀρθαῖς ιοβ, βορ (ἰστέον δὲ, ὅτι αἱ γωνίαι ιον, τορ, ὡς κατὰ κορυφὴν ἀντικείμεναι, εἰσὶν ἴσαι, καὶ ἀντὶ ιον λαβεῖν ἔξεστι τὴν ὑπὸ τορ) ποιήσουσιν ἴσας τὰς γωνίας βογ, βοα· ἐπινοήσασι δὲ κύκλου τόξον γεγραμμένον ἐκ τοῦ σημείου α, δειχθείσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ αοβ, αογ γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· ἄρα αἱ πρὸς τῷ ο ὑπὸ τῶν πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου ἀχθεισῶν εὐθειῶν συσταθησόμεναι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· καὶ ἐπεὶ συνάμα δύνανται 360°, ἑκάστη αὐτῶν δύναται 120°.

(*) *Ἐὰν ἀπὸ τοῦ τῆς ὑποτεινούσης οι τετραγώνου ἀφαιρεθῶσι τὰ ἀπὸ ον, ομ τετράγωνα, αἱ ῥίζαι τῶν καταλοίπων ἴσων παρέξουσιν ἴσας πλευρὰς τὰς ιν, ιμ· ἄρα τὰ τρίγωνα ομι, ονι ἔχουσι πάσας τὰς ἑαυτῶν πλευρὰς ἴσας, καὶ δὴ καὶ τὰς γωνίας.*

119. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οὐκ ἀεὶ μέντοι δυνατόν ἐςι τὸ πρόβλημα· εἰ γὰρ εἴη τὸ αβγ τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ὡς τὴν ὑπὸ αγβ γωνίαν ὑπάρχειν = 140°, τὸ σημεῖον ο ἐκτὸς πεσεῖται τῦ τριγώνυ αγβ· ἐν ἄρα τῷ προτεθέντι τριγώνῳ ὐδὲν ἔςαι σημεῖον ο, ἀφ' ὗ ἂν ἀχθεῖεν εὐθεῖαι αἱ ογ, οβ, οα, ὡς ἑκάςην τῶν ὑπ' αὐτῶν συνιςαμένων γωνιῶν δύνασθαι 120°.

120. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΒ΄. Τῶν κύκλῳ ἐγγεγραμμένων ἀπειραρίθμων τριγώνων εὑρεῖν τὸ μέγιςον. (σχ. 20).

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν ἐπινοηθῶσι πολλὰ τρίγωνα γεγραμμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς ΑΔ, εὐπετῶς προσδιορίζεται τὸ μέγιςον· τμηθείσης γὰρ δίχα τῆς ΑΔ κατὰ τὸ μ, ϗ διὰ τῦ κέντρυ Κ ἀχθείσης τῆς εὐθείας Κμ, ἥτις συμβάλλει τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Β, τὸ ΒΑΔ τρίγωνον ἔςαι τὸ μέγιςον τῶν συςαθῆναι δυναμένων ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΔ· ϗ γὰρ βάσεως τῆς αὐτῆς ὔσης, τὰ τρίγωνα ἔσονται ὡς τὰ ὕψη, ἢ ὡς αἱ τῇ βάσει κάθετοι· ἀλλὰ Βμ προδήλως ἐςὶν ἡ μεγίςη κάθετος τῶν, ὧν ἄντις ἀγάγοι ἀπὸ παντὸς σημείυ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΔ· ἄρα τὸ ζητηθὲν τρίγωνον δεῖ εἶναι ἰσοσκελές· ἔςω ἡ τῦ κύκλυ ἀκτὶς $= \alpha$, ϗ ἡ ἀποτετμημένη Κμ $= \chi$· ἄρα, διὰ τὴν ἰδιότητα τῦ κύκλυ, μΔ $= \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· τὸ δὲ τρίγωνον ΒΑΔ ἔςαι $= (\alpha+\chi) \cdot \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ὅπερ ὑποτεθείσθω $= \upsilon$· ἄρα $\upsilon^2 = (\alpha+\chi)^2 \times (\alpha\alpha - \chi\chi)$, ϗ αὐδυ $= 0 = 2\delta\chi \times (\alpha+\chi) \times (\alpha\alpha - \chi\chi) - 2\chi\delta\chi \cdot (\alpha+\chi)^2 = 0$· ἄρα $2 \cdot (\alpha+\chi) \cdot (\alpha\alpha - \chi\chi) = 2\chi(\alpha+\chi)^2$, $(\alpha\alpha - \chi\chi) = \chi \times (\alpha+\chi)$, ϗ διαιρέσει διὰ $\alpha + \chi$, $\alpha - \chi = \chi$, $\alpha = 2\chi$, $\chi = \frac{\alpha}{2}$· τμηθείσης ἄρα διχα τῆς ΚΖ κατὰ τὸ μ, ϗ ἀχθείσης τῆς χορδῆς ΑμΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΖ, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἔςαι τὸ μέγιςον· ἔςι δὲ τοῦτο ἰσόπλευρον, ϗ ἑκάςη αὐτοῦ πλευρὰ $= \alpha\sqrt{3}$, ὅπερ εὐπετῶς εὑρίσκεται, ἀντικαθιςαμένης τῆς τοῦ χ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς μΔ, ϗ διπλασιαζομένης· ϗ γὰρ μΔ $=$

$$\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \sqrt{\frac{3\alpha\alpha}{4}} = \tfrac{1}{2}\,\alpha\sqrt{3},$$ οὗ τὸ διπλοῦν $= \alpha$

$\sqrt{3}$· ὡσαύτως ἐὰν ἀντικαταςαθῶσιν αἱ δυνάμεις τῆς Βμ, ϗ μΔ ἐν τῇ $\Delta B = \sqrt{(\mu\Delta)^2 + (B\mu)^2}$, εὑρεθήσεται ΔΒ $= AB = \alpha\sqrt{3}$· δυνατὸν δὲ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΔ συςήσασθαι ἕτερον τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΖΔ, οὗπερ ἐκτὸς κεῖται τὸ τοῦ κύκλου κέντρον· ἀλλ' ἐπεὶ τῆς Κμ αὐξούσης, ἢ μειουμένης, αὔξει ἢ μειοῦται ϗ τὸ τρίγωνον, οὐκ ἔςιν οὔτε μέγιςον, οὔτ' ἐλάχιςον.

121. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΓ'.** Κύκλῳ περιγράψαι τὸ ἐλάχιςον τῶν περιγραφῆναι δυναμένων τριγώνων (σχ. 21).

**ΛΥΣΙΣ.** Ὑποτεθείσθω τὸ ζητηθὲν τρίγωνον εἶναι τὸ Αθζ· φημὶ δὴ ὡς εἰ διὰ τῆς κατὰ τὴν Α γωνίαν κορυφῆς ϗ τοῦ κυκλικοῦ κέντρου Κ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚν, ἡ πλευρὰ θζ κάθετος ἐπιςήσεται ταύτῃ τῇ εὐθείᾳ, ϗ συμβαλεῖ αὐτῇ κατὰ τὸ ν, ὡς εἶναι ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον Αθζ· ἐὰν γὰρ ἀχθῇ ἑτέρα ἁπτομένη ἡ σΛη, τὸ τρίγωνον Αησ μεῖζον ἔςαι τοῦ Αθζ· εἰς δέ γε τὴν τούτου δεῖξιν, ἤχθω ἡ ζμ εὐθεῖα παράλληλος τῇ σθ· ϗ τῶν τριγώνων σιθ, ζμι ὁμοίων ὄντων, ἔςι $\zeta\iota : \vartheta\iota :: \zeta\mu : \vartheta\sigma$· ἀλλὰ $\zeta\iota > \vartheta\iota$· ἄρα $\zeta\mu > \vartheta\sigma$· ἔςι δὲ ϗ $\zeta\iota : \iota\vartheta :: \iota\mu : \sigma\iota$· ἄρα $\mu\iota > \iota\sigma$· ἄρα πολλῷ μᾶλλον $\iota\eta > \iota\sigma$· ἄρα ϗ $\zeta\mu \times \eta\iota > \vartheta\sigma \times \sigma\iota$· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ιζη ἔςιν ὡς τὸ γινόμενον $\iota\eta \times \zeta\mu$· τὸ δὲ γινόμενον $\vartheta\sigma \times \sigma\iota$ ὡς τὸ τρίγώνιον θσι (*)· ἄρα τὸ τρίγωνον ιζη > ισθ· κοινῆ δὲ προστεθέντος τοῦ τετραπλεύρου Ασιζ, ἔσαι Αση > Αθζ· ἄρα τὸ Αθζ ἐσὶ τὸ ἐλάχισον τρίγωνον· ἵνα δὲ διορισθῇ τὸ σημεῖον Α, ἀφ' οὗ ἀχθεῖσαι αἱ ἁπτόμεναι Αθ, Αζ μετὰ τῆς ἁπτομένης θζ περιέχοιεν ἂν τὸ ζητούμενον ἐλάχισον τρίγωνον, διὰ τοῦ σημείου ν καὶ τοῦ κέντρου Κ ἤχθω ἡ εὐθεῖα νΚΑ, καὶ ὑποτεθείσθω ΚΑ $= \chi$, καὶ ἡ ἀκτὶς Κβ $= \alpha$· ἐκεῖ ἔσαι Αν $= \chi + \alpha$, πΑ $= \chi - \alpha$, Αβ $= \sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)}$· ἀλλὰ Αβ : κβ :: Αν : θν (διὰ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΑβΚ, Αθν), ἢ $\sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)} : \alpha :: \chi + \alpha : \theta\nu = \dfrac{\alpha(\chi + \alpha)}{\sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)}}$· πολλαπλασιασθείσης δὲ ταύτης τῆς ποσότητος ἐπὶ $\chi + \alpha$, εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον $= \alpha \cdot \dfrac{(\chi+\alpha)^2}{\sqrt{(\chi\chi + \alpha\alpha)}} = \upsilon$, $\upsilon^2 = \dfrac{\alpha\alpha.(\chi+\alpha)^4}{\chi\chi - \alpha\alpha}$

$$= \frac{\alpha\alpha(\chi + \alpha)^3}{\chi - \alpha},\ 2\upsilon\delta\upsilon = 0 = .$$

$$\frac{3\,\alpha\alpha\delta\chi.(\chi+\alpha)^2.(\chi-\alpha) - \alpha\alpha\delta\chi.(\chi+\alpha)^3}{(\chi-\alpha)^2},$$ εἴτ' οὖν $3$: $(\chi+\alpha)^2.(\chi - \alpha) = (\chi+\alpha)^3$, $3.(\chi - \alpha) = \chi + \alpha$, $3\chi - \chi = \alpha + 3\alpha$, $2\chi = 4\alpha$, $\chi = 2\alpha$· διὸ δὴ ληφθείσης τῆς ΚΑ ἴσης τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀχθεισῶν τῶν ἁπτομένων, μέχρις ἂν συμβάλωσι τῇ ἁπτομένῃ θνζ, πορισθήσεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον· ὅπερ ἰσόπλευρόν ἐσι, καὶ ἑκάσῃ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν $= 2\alpha\sqrt{3}$·

---

(*) Ἐὰν γὰρ ἐκ τῶν γωνιῶν θ, ζ ἀχθῶσι κάθετοι ταῖς αὐτὰς ὑποτεινούσαις πλευραῖς, αὗται, ὕψη οὖσαι τῶν τριγώνων, ἔσονται ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί (Γεωμ. 324).

ϗ γὰρ ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑβΚ, Ανθ πρόεισιν Αβ : ΑΚ :: Αν : Αθ, ἤ, τετραγωνιζομένων ϗ εἰσαγομένων τῶν ἀναλυτικῶν δυνάμεων, $3\alpha\alpha$ (εἴγε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑβΚ ἐστιν $A\beta^2 = AK^2 - \beta K^2 = 4\alpha\alpha - \alpha\alpha = 3\alpha\alpha$) $: 4\alpha\alpha :: 9\alpha\alpha : A\vartheta^2 = 12\alpha\alpha = 4\alpha\alpha \times 3$· ἄρα $A\vartheta = A\zeta = 2\alpha\sqrt{3}$· ἀλλὰ $\nu\vartheta^2 = A\vartheta^2 - A\nu^2 = 12\alpha\alpha - 9\alpha\alpha = 3\alpha\alpha$· ἄρα $\nu\vartheta = \alpha\sqrt{3}$, ϗ $\vartheta\zeta = 2\alpha\sqrt{3}$.

122. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ ΚΒ΄ προβλήματι εὕρηται ἡ τοῦ μεγίστου τῶν κύκλῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων τριγώνων πλευρὰ ἴσα $= \alpha\sqrt{3}$, τοῦ α ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ὄντος· ἔστιν ἄρα αὕτη ἡ πλευρὰ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐλαχίστου τῶν κύκλῳ περιγραφῆναι δυναμένων τριγώνων· εἰσὶν ἄρα ταῦτα τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ὡς 1 : 4· εὐπετῶς δ' ἐνίοτε τὰ μέγιστα ϗ ἐλάχιστα ἀνιχνεύονται δίχα τῆς τοῦ τῶν ἀπειροστῶν λογισμοῦ βοηθείας.

123. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΔ΄. Δύο εὐθειῶν δοθεισῶν τῶν ΑΜ, ΑΒ, εὑρεῖν τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν, ὃ ἂν αὗται περικλείσειαν μετὰ τῆς ἀδιορίστου εὐθείας ΜΒ (σχ. 22).

ΛΥΣΙΣ. Δῆλον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΑΒ ἔσται μέγιστον, ὅταν ἡ Α γωνία ᾖ ὀρθή· τηνικαῦτα γὰρ μεῖζον ἕξει ὕψος παντὸς ἄλλου τριγώνου αβμ, ὅπερ ἂν ἔχοι τὰς πλευρὰς αμ, αβ ἴσας ταῖς ΑΜ ϗ ΑΒ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἀμβλεῖαν δὲ τὴν ὑπὸ μαβ γωνίαν.

124. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΕ΄. Τεσσάρων εὐθειῶν δοθεισῶν, ϗ μιᾶς ἀδιορίστου, εὑρεῖν τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀπολαμβανομένων (σχ. 23).

ΛΥΣΙΣ. Φημὶ δὴ ταύτας τὰς δεδομένας εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΠ, ΠΔ ἐνηρμοσμένας εἶναι ἡμικυκλίῳ, οὗ διάμετρον εἶναι τὴν ἀδιόριστον ΑΔ· δέδεικται γὰρ ἀνωτέρω τὴν μεγίστην τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ϗ μιᾶς ἀδιορίστου ἐπιφανειῶν ὑπάρχειν, ὅταν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ποιῶσι γωνίαν ὀρθήν· ἐπεὶ, εἴπερ αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΑΓΔ μὴ εἶεν ὀρθαὶ, δυνατὸν αὐξηθῆναι, ἢ μειωθῆναι, ταῦτα τὰ τρίγωνα, μηδὲν ὅλως, μήτ' αὐξηθέντος, μήτε μειωθέντος, τοῦ καταλοίπου σχήματος· εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία μὴ εἴη ὀρθὴ, δυνατὸν αὐξηθῆναι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, γινομένης ὀρθῆς τῆς ὑπὸ ΑΓΔ γωνίας· ὃ δὴ εὐπετῶς τελεῖται, περιστρεφομένου τοῦ ΒΓΑ τριγώνου περὶ τὸ Γ σημεῖον, ἐπεὶ μήτε τὸ τρίγωνον τοῦτο, μήτε ἡ ἐπιφάνεια ΓΠΔ, ἐκ τούτου ἀπομειωθήσονται.

125. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ αὐτὸ δὲ ὡσαύτως δειχθήσεται, ὅσαι πότ' ἂν ὦσιν αἱ δεδομέναι εὐθεῖαι Αβ, βγ, γζ, ζϑ, ϑΒ (σχ. 24)· ὥστε ἡ περιεχομένη ὑπὸ πέντε δοθεισῶν εὐθειῶν ϗ μιᾶς ἕκτης ἀδιορίστου ἐπιφάνεια μεγίστη ἔσται, ὅταν αἱ δοθεῖσαι ἐνηρμοσμέναι ὦσιν ἡμικυκλίῳ, οὗ διάμετρος ἡ ἀδιόριστος· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ χωρίον αβζϑ μέρος τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας τὸ μέγιστον ἔσται, ὅταν αἱ περιέχουσαι αὐτὴν εὐθεῖαι ὦσι χορδαὶ κυκλικαί· ἄλλως γὰρ ἡ ἐπιφάνεια ΑβγζϑΒ αὐξηθῆναι δύναται, εἴπερ ἓν τῶν αὐτῆς μερῶν αὐξηθείη, τοῦ λοιποῦ σχήματος τοῦ αὐτοῦ μένοντος.

126. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐντεῦθεν ἄρα τὸ μέγιστον χωρίον, ὧν ἂν περικλείσειαν εὐθεῖαι δεδομέναι, ἐστὶ σχῆμα κύκλῳ ἐγγεγραμμένον· ὡς, εἴπερ αἱ εὐθεῖαι εἶεν ἄπειροι τὸν ἀριθμὸν, ϗ ἐλάχισται τὸ μέγεθος, ἑκάστη δύναται ἐκληφθῆναι ὥσπερ τόξον ἀπειροστόν· τὸ δὲ πάντων ἄθροισμα ὡς κυκλικὴ περιφέρεια· διὸ δὴ ὁ κύκλος μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων, καθὰ ϗ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ εἴρηται.

Ἀλλ' εἴπωμεν ἤδη περὶ τῶν ἐν ταῖς εἰδικαῖς συνεκθέσεσι μεγίστων καὶ ἐλαχίστων· ὅταν εἰδικὴ συνέκθεσις μίαν μόνην τρεπτὴν $\chi$ περιέχῃ, δυνατὸν ὑποθέσθαι ταύτην ἴσην τῷ $\upsilon$, καὶ λαβεῖν αὐτῆς τὰ ἀπειροστὰ, ὡς εἴπερ ζητοῖτο ἡ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη ἐν καμπύλῃ τεταγμένη.

127. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κϛ'.** Εὑρεῖν, καθ' ἃς περιπτώσεις ἡ συνέκθεσις $\chi^4 - 8\chi^3 + 22\chi^2 - 24\chi + 12$ γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

**ΛΥΣΙΣ.** Ὑποτεθείσθω ἡ ποσότης αὕτη $= \upsilon$· ληφθέντων οὖν αὐτῆς τῶν ἀπειροστῶν, καὶ ὑποτεθέντος $\delta\upsilon = 0$, ἔσται $4\chi^3 - 24\chi^2 + 44\chi - 24 = \delta\upsilon = 0$, $\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0$, ἧς διαιρέται $\chi - 1$, $\chi - 2$, $\chi - 3$· ἄρα δυνάμεις τῆς $\chi$ εἰσὶ $\chi = 1$, $\chi = 2$, $\chi = 3$· ἐὰν οὖν ἀντὶ $\chi = 1$ ἀντικατασταθῇ $1 + \delta\chi$, καὶ εἶτα $1 - \delta\chi$, εὑρεθήσεται ἐν ἑκατέρᾳ περιπτώσει δύναμις τοῦ $\upsilon$ μείζων, ἢ ἀντικαθισταμένης τῆς 1· ἄρα ἡ πρώτη δύναμις τοῦ $\chi$ ἐμφαίνει ἐλάχιστον· δυνατὸν δὲ ὡσαύτως εὑρεῖν, τὴν μὲν δευτέραν ἐμφαίνουσαν μέγιστον, τὴν δὲ τρίτην ἐλάχιστον.

128. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Δυνατὸν ἰδεῖν ἐν τῷδε τῷ ὑποδείγματι τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα διαλλήλως διαδεχόμενα· ἐν γένει δὲ, εἴπερ καμπύλη ἡ $\beta\mu$ (σχ. 25) πολλὰ ἔχει μέγιστα καὶ ἐλάχιστα $\alpha\beta$, $\alpha\nu$ $\kappa\tau$, ὡς τὴν ἀποτετμημένην $\mathrm{A}\alpha$ συστοιχεῖν ἐλαχίστῳ τῷ $\alpha\beta$, δῆλον ὡς ἡ τεταγμένη $\alpha\pi$ οὐκ ἂν γένοιτο ἐλάχιστον, εἰ μὴ τὸ μέρος $\beta\nu\pi$ τοῦ ἄξονος ἀποχωρήσειε ποσότητι μείζονι τῆς τεταγμένης $\alpha\beta$, ἥτις ἐστὶ τὸ πρῶτον ἐλάχιστον· δεῖ δὴ ὑπάρχειν μέγιστον μεταξὺ τῶν δύω ἐλαχίστων· ἄρα ἅπαν ἐλάχιστον $\alpha\pi$ οὐκ ἐπακολουθήσει ἐλαχίστῳ, ἀλλὰ μεγίστῳ· ἐὰν οὖν τῇ ἀποτετμημένῃ $\mathrm{A}\alpha = \chi$ (σχ. 26) συστοιχῇ μέγιστον τὸ $\alpha\beta$, τέ-