ρα 2ρ : ΔΝΑ :: $\dfrac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$: $\varkappa$· ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$ ἐμφαίνει τὸ ἥμισυ τῆς ταχυτῆτος, ἣν σῶμα κτήσαιτ' ἂν καταβαῖνον τὴν διάμετρον ΒΑ (153)· ἐὰν ἄρα πᾶσα ἡ ταχυτὴς, ἢ ὁ χρόνος (153) κληθῇ Κ, πορισθήσεται $2a$ = Κ. $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$, καὶ $K = \dfrac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$· ἄρα ἡ ἤδη ἐκτεθειμένη ἀναλογία ἀντικαταςάσει ἔςαι 2ρ : ΔΝΑ :: Κ : $\varkappa$, εἴτ' ὖν „ὁ χρόνος ὁ δαπανώμενος διὰ παντὸς τόξυ κυκλοει„δῦς πρὸς τὸν διὰ τῆς διαμέτρυ τῦ γεννήτορος κύκλυ, „ἐςιν ὡς κυκλικὴ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἑαυτῆς διάμε„τρον·“ τοιγαρῦν οἱ χρόνοι ὗτοι εἰσὶν ἐν ἀμετατρέπτῳ λόγῳ· τῦθ' ὅπερ, εἰ μὴ προῄδειμεν, ὑπεδήλωσεν ἄν, ὡς ἅπαντα τὰ τόξα τῆς κυκλοειδῦς τὰ ἀπὸ τῦ Α ἀρχόμενα διανύονται ἐν ἴσοις χρόνοις.

226. ΟΡΙΣΜΟΣ. Καμπύλαι ταυτόχρονοι καλῦνται, ὧν τὰ τόξα τάτε μεγάλα καὶ τὰ μικρὰ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ὑπὸ τῶν τῇ ἰδίᾳ βαρύτητι ἐν μέσῳ ἐνςάσεως ἀμοίρῳ φερομένων σωμάτων διανύονται· ἡ ἄρα κυκλοειδὴς ἔςι καμπύλη ταυτόχρονος.

227. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν καμπύλην τῆς ταχίςης καθόδυ, εἴτ' ὖν τὴν ὀλιγιςόχρονον ΑΜ (σχ. 103), δι' ἧς σῶμα τὸ Α ἐκ τῦ Α κάτεισιν εἰς τὸ Μ, ἐν ὅσῳ οἷόντε βραχυτάτῳ χρόνῳ, τῦ μέσυ ἀμοιρῦντος ἐνςάσεως.

ΛΥΣΙΣ. Ηχθωσαν ἀλλήλαις προσεχέςαται αἱ τεταγμέναι ΠΜ, πμ, Νν, καὶ αἱ ἄλλαι γραμμαὶ, ἃς τὸ σχῆμα παρίςησι· καὶ ἔςω ΑΠ = χ, καὶ ΠΜ = υ· ἔςω

$\Pi\pi = M\rho = \mu\zeta = \nu Z = \delta\chi$, καὶ $\mu\rho = \delta\upsilon$, ϗ $M\mu = \surd(\delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)$· ἔςω ϗ $\rho Z = \beta$· ἐκοῦν ἔςαι $\mu Z = \beta - \delta\upsilon$, ϗ $\mu\nu = \surd\overline{(\beta - \delta\upsilon)^2 + \delta\chi^2}$· ἡ δὲ ταχύτης, δι' ἧς ἂν τὸ σῶμα διέλθοι τὸ ἀπειροςὸν τόξον Μμ, ὡς ἰσομερὴς ἐκληφθῆναι δυναμένη, ϗ ὡς ἰσουμένη τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο κατελθὸν ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Π (211), ὑποτεθείσθω $= \gamma$, ϗ ἔςω $= \Gamma$ ἡ ταχύτης, δι' ἧς ἂν διανυσθείη τὸ τόξον μν· ἔςω δὲ κ ὁ χρόνος, ὃν ἐδαπάνησεν, ἵνα διέλθοι τὸ τόξον ΑΜ· ἐκοῦν ὁ χρόνος, ὃν ἐδαπάνησεν, ἵνα διέλθοι τὸ Μμ, ἔςαι δκ· ϗ ἐπειδὴ ἐν τῇ ἰσομερεῖ κινήσει τὰ διαςήματα εἰσὶν ἐν χρόνῳ συνθέτῳ ἔκ τε τῶν χρόνων ϗ τῶν ταχυτήτων (216), ἔςαι $M\mu = \surd(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2) = \gamma\delta\kappa$, ϗ $\mu\nu = \surd[(\beta - \delta\upsilon)^2 + \delta\chi^2] = \Gamma\delta\kappa$· ὁ ἄρα ἐν τῷ τόξῳ Μν δαπανηθεὶς χρόνος ἐςὶν $=$

$$2\delta\kappa = \frac{\surd(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}{\gamma} + \frac{\surd(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}{\Gamma}.$$

ἀλλ' ἡ Αν καμπύλη τοιαύτη ζητεῖται τὴν φύσιν εἶναι, δι' ἧς σῶμα κατιὸν ἐκ τοῦ Μ εἰς τὸ ν δαπανήσειεν ἂν ὡς οἷόν τε ἐλάχιςον χρόνον· ἄρα ὁ χρόνος 2δκ ἐςὶν ἐλάχιςον·

$$\text{ἄρα } 2\delta\delta\kappa = \frac{\delta\upsilon\delta\delta\upsilon}{\gamma\surd(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)} + \frac{\delta\upsilon\delta\delta\upsilon - \beta\delta\delta\upsilon}{\Gamma\surd(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}$$

$= 0$, ἀτρέπτου ὑποτιθεμένου τοῦ δχ (Ἀπειρ. 32)· διαιρέσει δὲ διὰ δδυ, ϗ μεταθέσει, $\dfrac{\delta\upsilon}{\gamma\surd(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} =$

$\dfrac{\beta - \delta\upsilon}{\Gamma\surd(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}$, τοῦτ' ἐςὶ $\dfrac{\rho\mu}{\gamma \,.\, M\mu} =$

$\dfrac{\mu Z}{\Gamma \,.\, \mu\nu}$, ἢ $\dfrac{\gamma \,.\, M\mu}{\rho\mu} = \dfrac{\Gamma \,.\, \mu\nu}{\mu Z} = \dfrac{\Gamma \,.\, \mu\nu}{\zeta\nu}$· ἐπεὶ τοίνυν ἡ μὲν ταχυτὴς γ ἐστὶν ὡς $\sqrt{A\Pi}$, ἡ δὲ ταχυτὴς Γ ὡς $\sqrt{A\pi}$, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν ἀποτετμημένην ῥίζης καὶ τοῦ κατὰ τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον στοιχείου, διαιρεθὲν διὰ τοῦ κατὰ τὴν τεταγμένην ἀπειροστοῦ, δίδωσιν ἀεὶ ποσὸν ἀμετάβλητον, ὅπερ ὑποτεθείσθω $=\sqrt{\alpha}$, ἵν' εἴη $\frac{\sqrt{A\Pi}\,.\,M\nu}{\rho\mu} =$ $\frac{\sqrt{\chi}\,.\,M\nu}{\delta\upsilon} = \sqrt{\alpha}$, ἢ $\frac{\sqrt{\chi}\,.\,\sqrt{(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}}{\delta\upsilon} = \sqrt{\alpha}$, ἢ χ $(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2) = \alpha\delta\upsilon^2$, ὅθεν πρόεισι $\delta\upsilon^2 = \frac{\chi\delta\chi^2}{\alpha-\chi}$ (*)

καὶ $\delta\upsilon = \frac{\sqrt{\chi\delta\chi^2}}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \frac{\sqrt{\chi}\,.\,\delta\chi}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$ (**)

$= \frac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}} - [\frac{\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}]$· ὁλοκληρώσει ἄρα καὶ προσθέσει ποσοῦ ἀμεταβλήτου, $\upsilon + \Gamma =$ $O\,\frac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}} - \sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}$ (***)· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $AB = \alpha$ διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου ΑΞΒ, ἡ τεταγ-

---

(*) $\chi\,.\,(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2) = \alpha\delta\upsilon^2$, εἴτ' οὖν $\chi\delta\chi^2 + \chi\delta\upsilon^2 = \alpha\delta\upsilon^2$, καὶ μεταθέσει, $\chi\delta\chi^2 = \alpha\delta\upsilon^2 - \chi\delta\upsilon^2$, καὶ διαιρέσει διὰ $\alpha - \chi$, $\upsilon^2 = \frac{\chi\delta\chi^2}{\alpha-\chi}$.

(**) $\frac{\sqrt{\chi}\,.\,\delta\chi}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \frac{\sqrt{\chi}\,.\,\sqrt{\chi}\,.\,\delta\chi}{\sqrt{\chi}\,.\,\sqrt{\alpha-\chi}} = \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$.

(***) Ἔστι γάρ· $O\,(\frac{\alpha\delta\chi - 2\,\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}) =$ $\frac{O\,(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)}{\sqrt{(4\alpha\chi - 4\chi\chi)}}$ (Συμβ. Λογ. 167. Τόμ. Α'.) $= O\,(\alpha\delta\chi$

γμένη ΞΠ ἔςαι $= \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ϗ ο $\dfrac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$ $= \text{o}.\ \dfrac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$, τύπος τῦ τόξυ ΑΞ (Α'πειρ. 256)· ἄρα $\upsilon + \Gamma =$ ΑΞ — ΞΠ· ἀλλ' ὅταν ἡ $\upsilon = \text{o}$, τό,τε τόξον ΑΞ ϗ ἡ τεταγμένη ΞΠ γίνονται = ο· ἄρα $\Gamma = \text{o}$, ϗ $\upsilon =$ ΑΞ — ΞΠ, τῦτ' ἔςιν „ἡ τεταγμένη τῆς ζητυ„μένης καμπύλης ἰσῦται τῷ τόξῳ τῦ ἀντιςοιχυ κύκλυ, „ὗ διάμετρος $= \alpha$, πλὴν τῦ κατ' αὐτὸ ἡμιτόνυ."

Ε'ν ὗν τῇ ἡμικλοειδεῖ ΓΑ (ϛχ. 102) ἡ τεταγμένη ΖΜ ἰσῦται τῷ τόξῳ ΖΑ· ἐὰν δὲ ταχθῇ ἐπὶ τὴν ΒΑ διάμετρον, ἡ τεταγμένη ΜΠ ἰσῦται τῷ τόξῳ ΖΑ σὺν τῷ αὐτῦ ἡμιτόνῳ ΖΠ· ὐκῦν ἔςαι ΚΜ + ΜΖ + ΖΠ = ΓΒ = ΒΖ + ΖΑ· ἀφαιρυμένων ὗν ἔνθεν μὲν τῦ ΜΖ, ἔνθεν δὲ τῦ ΖΑ, ἔςαι ΚΜ + ΖΠ = ΖΒ· ἄρα ΚΜ = ΒΖ — ΖΠ, εἴτ' ὖν ΚΜ ἰσῦται τῷ τόξῳ ΒΖ πλὴν τῦ κατ' αὐτὸ ἡμιτόνυ ΖΠ· διόπερ, ἐὰν ὑποτεθῇ ΒΑ $= \alpha$, ϗ ΓΚ ὑποτεθῇ ἡ ἐπὶ τῦ 103 ϛχήματος εὐθεῖα ΑΠ, τὸ Μ σημεῖον τῦ 103 ϛχήματος παραςαθήσεται διὰ τῦ Μ σημείυ

$-\ 2\chi\delta\chi)\,(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}\cdot =$ (Α'πειρ. 206, 216) $=$

$$\frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)\cdot(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(4\alpha\delta\chi - 8\chi\delta\chi)} = \frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)\cdot(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha\delta\chi - 4\chi\delta\chi} =$$

$$\frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)\cdot(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)} = \frac{(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{(4\alpha\chi - 4\chi\chi)}}{2} = \frac{2\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}{2} = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}.$$

τῦ ἐν τῷ 102 σχήματι· ἡ ζητυμένη ἄρα καμπύλη ἐςὶ κυκλοειδὴς, ἧς τῦ γεννήτορος κύκλυ ἡ διάμετρος ἐςὶν $=$ α.

Ἵνα δὲ διοριϑῇ ἡ τῦ γεννήτορος κύκλυ διάμετρος α, ἰςέον, ὡς αἱ κυκλοειδεῖς, γεννώμεναι ἐκ περιεκκυλίσεως κύκλων (οἵτινες ὅμοιαι καμπύλαι ὑπάρχυσι (Τ'ψ. Γ. 256)) διὰ νόμυ ἀμεταϑέτυ, εἰσὶν ἀναγκαίως ὅμοιαι καμπύλαι· τύτυ τεϑέντος, ἔςω Α σημεῖον, ἀφ᾽ ὗ τὸ σῶμα κινεῖϑαι ἄρχεται (σχ. 104), Μ δὲ, εἰς ὃ ἀφικνεῖται κατὰ τὸν ὅσον οἷόν τε ἐλάχιςον χρόνον· ἵν᾽ ὖν διοριϑῇ ἡ ΒΓ διάμετρος $=$ α τῦ γεννήτορος κύκλυ τῆς ἡμικυκλοειδῦς ΑΜΒ, ἐπεζεύχϑω ἡ ΑΜ, ϗ τέρματος ἄνευ ἤχϑω ἡ ὁριζόντιος ΑμΓ, ἥπερ διὰ τῦ Μ κατήχϑω πρὸς ὀρϑὰς ἡ Μμ· ϗ ἐπὶ τῆς Αμ ληφϑείσης ὡς ἡμιβάσεως γεγράφϑω ἡμικυκλοειδὴς ἡ Ανβ, ἐν ᾗ γινώσκεται ἡ ἡμιπεριφέρεια Αμ τῦ γεννήτορος κύκλυ· ὅϑεν δυνατὸν εὑρεῖν ὡς ἔγγιςα τὴν αὐτῦ διάμετρον μβ (Γεωμ. 375. Τόμ. Β'.) ϗ ἐπεζεύχϑω ἡ νμ, ϗ ταύτῃ παράλληλος ἤχϑω ἡ ΜΓ· τοιγαρῦν ἡ ΑΓ ἔςαι ἡμίσεια βάσις τῆς ζητυμένης κυκλοειδῦς ΑΜΒ· αἱ γὰρ νΑ, ΜΑ ἴσον κεκλιμέναι ἐπὶ τῆς εὐϑείας ΑμΓ εἰσὶν εὐϑεῖαι ὁμόλογοι τῶν ἡμικυκλοειδῶν Αβ, ΑΒ· ἀλλαμὴν τῶν τριγώνων Ανμ, ΑΜΓ ὁμοίων ὄντων (Γεωμ. 318. Τόμ. Β'.) ἔςιν Αν : ΑΜ :: Αμ : ΑΓ· ἄρα ϗ Αμ, ΑΓ εἰσὶν εὐϑεῖαι ὁμόλογοι τῶν δύω ἡμικυκλοειδῶν· ἀλλαμὴν Αμ ἐςὶ βάσις τῆς Αβ· ἄρα ΑΓ ἐςὶ βάσις τῆς ζητυμένης ἡμικυκλοειδῦς ΑΜΒ, ϗ ΓΒ ἔςιν ἡ διάμετρος α τῦ κύκλυ, ὗ ἡμιπεριφέρεια ἔςιν $=$ ΑΓ.

228. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Διορίσαι τὴν φύσιν τῆς ἰσοχρόνυ καμπύλης, εἴτ᾽ ὖν δι᾽ ἧς τὰ βαρέα κάτισιν ἰσομερῶς, τῦτ᾽ ἔςιν ἀφ᾽ ὑψῶν ἴσων ἐν ἴσοις χρόνοις πρὸς τῷ ὁρίζοντι γίνονται.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΒΠ $= \chi$ (σχ. 105), ϗ Ππ $= \delta\chi$, ϗ ΠΜ $= \upsilon$· τȣ̃ τοίνυν χρόνȣ, καθ' ὃν διανύει τὸ σῶμα τὴν ἀπειροςὴν καμπύλην Μμ, ὄντος δκ, ϗ τῆς πρὸς τῷ Μ ταχύτητος $= \sqrt{\chi}$ (216), ποριωθήσεται $\frac{\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\sqrt{\chi}} = \delta\kappa = \delta\chi$· κατὰ γὰρ τὴν φύσιν τȣ̃ προβλήματος, ἐπεὶ τὸ σῶμα ἰσομερῶς κινεῖσθαι ὑποτίθεται, τὰ κατὰ κάθετον ὕψη Ππ εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι οἱ δαπανώμενοι εἰς διάνυσιν τῆς καμπύλης Μμ· ἄρσει ἄρα τȣ̃ κλάσματος, τετραγωνισμῷ τε ϗ μεταθέσει, ἔςαι $\delta\upsilon^2 = \chi\delta\chi^2 - \delta\chi^2 = (\chi - 1)\,\delta\chi^2$, ἐξαγωγῇ δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, $\delta\upsilon = \delta\chi \sqrt{(\chi - 1)}$, ὁλοκληρώσει, $\upsilon + \gamma = \mathrm{O}.\delta\chi\,(\chi - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(\chi - 1)^{\frac{3}{2}}$ (Ἀπειρ. 206), προςιθεμένης ϗ ἀμεταβλήτȣ ποσότητος· ἐὰν δὲ γένηται $\chi - 1 = \psi$, ποριωθήσεται $\upsilon + \gamma = \frac{2}{3}\psi^{\frac{3}{2}}$ ἢ $\frac{9}{4}(\upsilon + \gamma) = \psi^3$, ἐξίσωσις τριτογενῆ ἐμφαίνȣσα παραβολὴν, ἧς παράμετρος μὲν $= \frac{9}{4}$, τεταγμένη δὲ $= \upsilon + \gamma$, ἀποτετμημένη δὲ $= \psi$· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ $\gamma = 0$, ὥσπερ ἐνταῦθα προφανῶς ἐπιτρέπεται, ἔςαι $\frac{9}{4}\upsilon^2 = \psi^3$· ἄρα ἡ ζητȣμένη καμπύλη ΒΜΝ ἐςὶ παραβολὴ τῶν τριτογενῶν (Ὑψ. Γ. 268. 269), ἧς ἡ μὲν ἀποτετμημένη ΑΠ $= \psi$, ἡ δὲ τεταγμένη ΠΜ $= \upsilon$, ἡ δὲ παράμετρος $= \frac{9}{4}$· ἀλλ' ὅταν ᾖ ΑΠ $= \psi = 0$, ἐςὶ $\chi = 1$, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi - 1 = \psi$· ἄρα τῶν χ ἀρχὴ ȣ̓ γίνεται ἐκ τȣ̃ Β, ἀλλ' ἐκ τȣ̃ Α, ὑποτιθεμένης ΑΒ $= 1$· ἡ δὲ τῆς παραβολῆς παράμετρος ἔςαι $\frac{9}{4}$. ΑΒ $= \frac{9}{4}\alpha$, ὑποτιθεμένης ΑΒ $= 1 = \alpha$, ϗ τηνικαῦτα ἡ πρὸς τῷ Μ ταχυτὴς ἔςαι $= \sqrt{\chi} = \sqrt{\text{ΑΠ}} = \sqrt{(\text{ΑΒ} + \text{ΑΠ})}$· ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β ταχυτὴς ἔςαι $= \sqrt{\text{ΑΒ}} = \sqrt{\alpha}$· ἵν' ἓν τὸ σῶμα κατίῃ, καθ' ὃν ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημα νόμον, πρὶν ἢ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κορυφῆς Β ἐφάψηται, εὐμοιρεῖν ἐπάναγκες ταχυτῆτος, ὅσην ἂν προσκτήσαιτο, ἐλευθέρως πίπτον ἀφ' ὕψους $=$ ΑΒ· ἀλλὰ γενομένης $\alpha = 1$, ἡ παράμετρος ἐστιν $= \frac{4}{1}\alpha$· ἄρα ἡ ταχύτης πρὸς τῇ τῆς καμπύλης ἀρχῇ Β ἰσοῦσθαι ὀφείλει τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο, ἐλευθέρως καταπίπτον ἀφ' ὕψους $= \frac{1}{4}$ τῆς παραμέτρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ κινήσεως τῶν προβαλλομένων σωμάτων.

229. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἅπαν σῶμα πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι ἀναῤῥιπτόμενον, πρῶτον μὲν ἄνεισιν, εἶτα κάτεισι πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι.

ΔΕΙΞΙΣ. Φανερὸν ἐκ πείρας· ἀλλὰ καὶ οὕτω φύσει ὑπάρχειν ἀνάγκη· καὶ γὰρ, ἀρθείσης μὲν τῆς τοῦ μέσου ἐνστάσεως, ἀνελθεῖν δεῖ μέχρι τοσούτου ὕψους, ἐξ ὅσου κατελθεῖν, ἵνα κτήσηται τὴν ταχύτητα, ἣν ἔλαβεν ἐκ τῆς κάτωθεν ἐπὶ τὰ ἄνω προβαλλούσης δυνάμεως (193)· θεωρουμένης δὲ καὶ τῆς τοῦ μέσου ἐνστάσεως, ἀνελθεῖν αὖθις δεῖ μέχρις ἂν ἡ, ἣν προσέλαβε, ταχύτης ἄρδην ἀφανισθῇ, εἴτε διὰ τὸν ἀνθιστάμενον ἀέρα, εἴτε διὰ τὰς τοῦ βάρους συνεχεῖς ἐνεργείας· ἀνελθεῖν δεῖ πρὸς ὀρθάς· εἴγε ὑποτίθεται κινούμενον ὑπὸ καθέτου δυνάμεως· ἀφικόμενον δὲ, ἐς ὃ ἀνελθεῖν δεῖ, καθηρεμήσει ἐν ἀκαριαίῳ χρονικῷ διαστήματι, εἴτ' οὖν ἐν ᾧ περίεστιν αὐτῷ ἔτι βαθμὸς εἷς τῆς ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ταχυτῆτος, ἴσος τῇ τε ἐνστάσει τοῦ μέσου, καὶ τῇ ἐκ τῆς βαρύτητος ἐμποιουμένῃ ἐπὶ τὰ κάτω ταχυτῆτι ἐν τούτῳ τῷ λεπτῷ· ἀλλ' ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ τῆς ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ταχυτῆτος ἀφανιζομένης πειθαρχῆσαι ἀνάγκη τῇ βαρύτητι μόνῃ, κατιὸν κατὰ τὴν ἐκ τῆς βαρύτητος ταχύτητα ϗ φορὰν, ὅ ἐςι κατὰ κάθετον. Ο. Ε. Δ.

230. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ καμπύλη, ἣν ἐν τῷ κενῷ καταγράφει σῶμα προϊέμενον κατὰ φορὰν, εἴτε ὁριζόντιον, εἴτε τῷ ὁρίζοντι πλαγίαν, ἔςι παραβολή.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ προϊεῖσα δύναμις, μεταδοθεῖσα ἅπαξ τῷ κινητῷ Α (σχ. 106), ἀεὶ ἡ αὐτὴ ὖσα ἐν τῷ κενῷ, εἰ τῦτο κινήσῃ κατὰ τὴν φορὰν ΑΔ τὴν εἴτε κάθετον, εἴτε πλαγίαν τῇ τῆς βαρύτητος φορᾷ ΑΘ, πρῶτον μὲν αὐτὸ ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ μετακομίσει εἰς τὸ Β, διανύσαν τὴν ΑΒ, ἐν δυσὶ δὲ λεπτοῖς εἰς τὸ Γ διανύσαν τὴν ΑΓ = 2ΑΒ, ἐν τρισὶ δὲ, τὴν ΑΔ = 3ΑΒ κτ. ϗ δὴ τὰ διατρεχόμενα διαςήματα ἐκ τῆς προβλητικῆς δυνάμεως συγκροτήσυσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1 . 2 . 3 . 4 κτ.· ἀλλὰ τὰ ἐκ τῆς βαρύτητος διατρεχόμενα διαςήματα αὔξυσι κατὰ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4 κτ. (151)· τεθέντος ὖν ΑΕ = 1, ἔςαι ΑΖ, διάςημα ἐκ τῆς βαρύτητος ἐν δυσὶ λεπτοῖς δευτέροις διανυσθὲν, = 4ΑΕ, ϗ ΑΘ = 9ΑΕ κτ. · ἐὰν ὖν ἐπὶ τύτων τῶν ἑξῆς κειμένων δυνάμεων συςαθῶσι παραλληλόγραμμα τὰ ΑΕΒΗ, ΑΓΖΙ, τὸ σῶμα ἔςαι κατὰ τὸ Η τελευτῶντος τῦ πρώτυ δευτέρυ λεπτῦ, ϗ κατὰ τὸ Ι ἐν τῷ τέλει τῦ δευτέρυ, ϗ κατὰ τὸ Κ ἐν τῷ τέλει τῦ τρίτυ (131)· διαγράψει ἄρα καμπύλην τὴν ΑΗΙΚ· λέγω δὴ ὡς ἔςιν αὕτη παραβολή· ἐπείπερ αἱ ἀποτετμημέναι ΑΕ, ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ (ἐκ κατασκευῆς)· ἀλλὰ αἱ τεταγμέναι ΕΗ, ΖΙ, ΘΚ εἰσὶν ἴσαι ἑκάςῃ ταῖς ἀντιςοίχοις εὐθείαις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ· ἄρα αἱ ἀποτετμημέναι ΑΕ, ΑΖ, ΑΘ, εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα· ἥτις ἐςὶν ἰδιότης τῆς παραβολῆς (Τ'ψ. Γεωμ. 14) Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δοθέντος τȣ͂ ΑΒ διαςήματος, ὃ διανύει τὸ προβαλλόμενον σῶμα ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ, ϗ τȣ͂ ΑΕ, ὃ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διὰ τὴν βαρύτητα διατρέχει, εὑρεθήσεται ἡ παράμετρος τῆς καταγραφησομένης παραβολῆς τρίτη ȣ̓͂σα ἀνάλογος τῇ τε ἀποτετμημένῃ ΑΕ, ϗ τῇ τεταγμένῃ ΕΗ = ΑΒ (Τ'ψ. Γ. 29).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τὰ μέρη ΘΜ, ΜΝ, ΝΚ τῆς ὁριζοντίȣ ΘΚ, ἃ ἀντιςοιχεῖ τοῖς τόξοις ΑΗ, ΗΙ, ΙΚ, τοῖς διανυομένοις ἐν χρόνοις ἴσοις, εἰσὶν ἴσα· ϗ γὰρ (Γεωμ. 127) αἱ παράλληλοι ΑΘ, ΒΜ, ΓΝ, ΔΚ ἴσον ἀλλήλων ἀπέχȣσιν, ὅτι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ προβολῆς τῶν ἐκ τῶν πυροβόλων ὅπλων σφαιρῶν.

Ἐχομένως τȣ́των εἰώθασιν οἱ Γεωμετρȣ͂ντες τύπον τινὰ ὑποσυνάπτειν τῆς τῶν πυροβολικῶν σφαιρῶν προβολῆς.

231. Ἐὰν σῶμα τὸ Δ (σχ. 107) ἐκ τȣ͂ Γ ἐπὶ τὸ Δ πέσῃ, ἕξει ταχύτητα, δι' ἧς ἂν διέλθῃ ἰσομερῶς ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, ΒΔ = 2ΓΔ (176)· ἀλλὰ προείσθω τὸ Δ κατὰ τὴν φορὰν Δη σὺν τῇ αὐτῇ ταχυτῆτι· ȣ̓κȣ͂ν τὰ ȣ̓͂τω διανυσθησόμενα διαςήματα Δη, ΒΔ ἔσονται ὡς οἱ χρόνοι Χ, χ οἱ πρὸς τȣ͂το δαπανηθέντες (110)· ἔςαι ἄρα Δη: ΒΔ :: Χ : χ· ϗ $Δη^2 : ΒΔ^2 :: Χ^2 : χ^2$.

232. Ἔςω Ηη εὐθεῖα, καθ' ἣν τὸ Δ ἠνέχθη ἐν

τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ διήνυσε τὸ Δη· ὄντος δὲ τῦ αὐτῦ χρόνυ Χ ὑπέρτε τῆς Ηη, ἢ τῆς Δη, ὁ ὑπὲρ τῆς ΓΔ χρόνος χ ἔςαι ὁ αὐτὸς τῷ ὑπὲρ τῆς ΒΔ· ἔςαι τοίνυν $Hη : ΓΔ :: X^2 : χ^2$ (151)· ἄρα $Hη : ΓΔ :: Δη^2 : ΒΔ^2$· ἄρα $Hη \times ΒΔ^2 = ΓΔ \times Δη^2$ (Z)· ἔςω ὖν $ΔΑ = 2ΒΔ = 4ΓΔ$· ὅθεν $ΓΔ : ΒΔ :: ΒΔ : ΔΑ$, ἢ δὴ $ΓΔ \times ΔΑ = ΒΔ^2$· ἐν τῇ Z ὖν ἀντικαταςάσης ἀντὶ $ΒΔ^2$ τῆς δυνάμεως ταύτης, ἔςαι $Hη \times ΓΔ \times ΔΑ = ΓΔ \times Δη^2$, ἢ διαιρέσει διὰ ΓΔ, $Hη \times ΔΑ = Δη^2$· ἀλλὰ $Hη = ΔΠ$ (Γεωμ. 127)· ἄρα $ΔΠ \times ΔΑ = Δη^2$.

233. Ἐπεὶ δὲ Δη, ΒΔ ἀνάλογοί εἰσι τοῖς χρόνοις Χ, χ (231), δυνατὸν ἄρα λαβεῖν Χ ἀντὶ Δη· ἀλλὰ $Δη^2 = ΔΠ \times ΔΑ$ (232)· ἄρα $X^2 = ΔΠ \times ΔΑ$· κληθείσης δὲ τῆς $ΓΔ = α$, ὅθεν $ΔΑ = 4α$, ἔςαι $X^2 = ΔΠ \times 4α$ (Μ).

234. Ἔςω ἤδη ΕΔ εὐθεῖα ὁριζόντιος, ἢ ἡ Δη φορὰ, καθ' ἣν τὸ Δ πρόειται, περιέξει μετὰ τῆς ΕΔ γωνίαν τὴν ὑπὸ ηΔΕ· κληθήτω δὴ ἡ ἀπτομένη ταύτης τῆς γωνίας = Η· ἐν ὖν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΔηΟ, ἐκλαμβανομένης τῆς ΔΟ ὡς αὐτῆς ἀκτῖνος = ρ, ἔςαι (Γεωμ. 497) $ΔΟ : ηΟ :: ρ : Η$· ἄρα $ηΟ \times ρ = ΔΟ \times Η$· ἀλλὰ ά. δυνατὸν ὑποθέσθαι τὴν ἀκτῖνα, ἥτις ἐςὶ ςαθερὰ, = 1· ἄρα (Ἀριθ. 78) $ηΟ = ΔΟ \times Η$· ἢ $Hη = ηΟ - ΗΟ$, $= ΔΟ \times Η - ΗΟ$· β΄. $Δη^2 = ηΟ^2 + ΔΟ^2$ (Γεωμ. 349), ἢ ἀντικαταςάσει τῦ X^2 ἀντὶ $Δη^2$, ἔςαι $X^2 = ηΟ^2 + ΔΟ^2$· ἐὰν ὖν ληφθῇ ἡ δύναμις τῆς ηΟ, ἡ ἐσχάτη ἐξίσωσις γενήσεται $X^2 = ΔΟ^2 \times Η^2 + ΔΟ^2$ (Ο) ἐπεὶ ὖν $X^2 = ΔΠ \times 4α = ηΗ \times 4α = ΔΟ \times Η \times 4α - ΗΟ \times 4α$, ἡ Ο γενήσεται $ΔΟ \times Η \times 4α - ΗΟ \times 4α = ΔΟ^2 \times Η^2 + ΟΔ^2$ (Ρ).

235. Ἐπὶ τέτοις δὲ, ἐὰν ἐπὶ τῆς ὁριζοντίε ΔΕ ληφθῇ σημεῖον ἕτερον τὸ $O^{\prime}$, λογισμῷ χρησαμένοις ϗ περὶ τε̃ $O\Delta^{\prime}\eta^{\prime}$ τριγώνε τῷ αὐτῷ, ᾧ ϗ περὶ τε̃ ΔΟη, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις $\Delta O^{\prime} \times H \times 4\alpha - HO^{\prime} \times 4\alpha = O\Delta^{\prime 2} \times H^{2} + \Delta O^{\prime 2}$ ὁμοία τῇ Ρ· δυνατὸν ὖν ἐν τῇ Ρ ἀντὶ μὲν ΔΟ ἀντικαταςῆσαι τὴν τρεπτὴν χ, ἀντὶ δὲ τῆς ΗΟ τὴν τρεπτὴν υ· ϗ δὴ ἔςαι $\chi \times H \times 4\alpha - \upsilon \times 4\alpha = \chi^{2} H^{2} + \chi^{2}$ (Ν)· ὅθεν ἀρύεται τὰ τείνοντα εἰς τὴν προβολὴν τῶν πυροβολικῶν σφαιρῶν.

236. ΟΡΙΣΜΟΣ. Πλάτος καλεῖται τῆς διὰ προβολῆς καταγραφομένης παραβολῆς ἡ ὁριζόντιος εὐθεῖα ΔΕ, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τε̃ τῆς προβολῆς σημείε μέχρι τε̃ σημείε Ε, καθ' ὃ ἡ παραβολὴ συναντᾷ τῇ ὁριζοντίῳ.

237. ΠΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τὴν ἰσχὺν τῆς κόνεως ὁρίσασθαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἰσχὺς ἐνταῦθα καλεῖται τῆς κόνεως, καθ' ἣν τὸ Δ, προβαλλόμενον κατὰ τὴν Δη φορὰν, καταγράφει τὴν παραβολὴν ΔΗΕ· δύναται δὲ ὑποτεθῆναι αὕτη ἴση τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο κατιὸν ἐκ τε̃ Γ ἐπὶ τὸ Δ (190), ϗ δὴ τὴν αὐτὴν, ἧς χρήζει ἐφ' ᾧ ἀνελθεῖν ἐκ τε̃ Δ ἐπὶ τὸ Γ· ἐμφαινέτω ὖν ταύτην ἡ ΓΔ παριςαμένη διὰ α, ϗ δὴ διὰ τῆς ἐξισώσεως Ν· ἐκε̃ν, εἰς εὕρεσιν τῆς δυνάμεως τε̃ α, ϗ δὴ τῆς ἰσχύος τῆς κόνεως, ὑποτεθείσθω ἡ γωνία $\eta\Delta E = 45^{\circ}$, ἧς ἀπτομένη ἔςαι αὐτὴ ἡ ἀκτὶς = 1 (Γεωμ. 498), ϗ διῃρήσθω ἡ Ν διὰ $4\chi H - \alpha\upsilon$· ὅθεν ἔςαι $\alpha = \dfrac{\chi^{2}H^{2} + \chi^{2}}{4\chi H - 4\upsilon}$ · Π.

Ὑποτιθεμένης ὖν τῆς, ἧς ςοχαζόμεθα, νύσσης ἐπὶ τῆς ὁριζοντίε εὐθείας κατὰ τὸ Ε, ΗΟ = υ ἔςαι = ο, ϗ τεθέντος ΔΕ = χ = 100 ὀργ., ἡ Π γενήσεται α =

$\frac{10000 \times 1 + 10000}{400 \times 1 - 4 \times 0} = -50$· ἐὰν δὲ ΔΕ $= \chi =$ 50, ἡ Π ἔςαι $\alpha = 25$, τοῦτ' ἔςιν ἐν γένει ἡ ἰσχὺς τῆς κόνεως ἴση ἐςὶν τῷ ἡμίσει πλάτει, ἢ τῇ ὁριζοντίῳ γραμμῇ, τῇ ἀποτελουμένῃ ἐκ προβολῆς, γινομένης διὰ γωνίας 45°, πορισθήσεται ἄρα ἡ ἰσχὺς α τῆς κόνεως ἐν προβολῇ διὰ γωνίας 45°, μετρουμένου τοῦ πλάτους, ϗ λαμβανομένου αὐτοῦ τοῦ ἡμίσεως.

238. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Γνωςῶν ὄντων τῆς κατὰ τὴν κόνιν ἰσχύος α (237), τοῦ ὁριζοντίου διαςήματος ΔΟ $= \chi$, τῆς νύσσης Η, τῆς αὐτοῦ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ὑψώσεως ΟΗ $= \upsilon$, εὑρεῖν τὴν γωνίαν, ἣν συςῆσαι μετὰ τοῦ ὁρίζοντος ὀφείλει ἡ θέσις τοῦ κανονίου, ἵν' ἡ σφαῖρα τύχῃ τῆς Η.

ΛΥΣΙΣ. Πορισθήσεται αὕτη ἡ γωνία διὰ τῆς ἁπτομένης Η, ἧς εἰς διορισμὸν τῆς δυνάμεως μεταθέσει γενέσθω ἡ Ν ἐξίσωσις· $H^2\chi^2 - \chi H 4\alpha = -\chi^2 - 4\alpha\upsilon$· διαιρέσει δὲ διὰ χ^2, $H^2 - \frac{4\alpha H}{\chi} = \frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2}$. ἀναπληρώσει δὲ τοῦ ἐλλείποντος τετραγώνου (Συμβ. Λογ. 464), $H^2 - \frac{4\alpha H}{\chi} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2} = \frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}$. ἐξαγωγῇ ῥιζῶν· $H - \frac{2\alpha}{\chi} = \pm\sqrt{\frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}}$ ἄρα $H = \frac{2\alpha}{\chi} \pm \sqrt{\frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}}$ (Σ)· ἐντεῦθεν ...

239. Ἤτοι πρὸς τῷ ὁρίζοντι κεῖται ἡ νύσσα, ἢ ὕπερθεν, ἢ ἔνερθεν αὐτοῦ· ϗ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει,

ἐπεὶ ἡ Ε νύσσα ὑποτίθεται πρὸς τῷ ὁρίζοντι, υ ἔσαι $= 0$, ϗ δὴ ἡ Σ ἐξίσωσις γενήσεται $H = \frac{2\alpha}{\chi} \pm \sqrt{\frac{4\alpha^2 - \chi^2}{\chi}}$ (Ψ)· ἀλλ' ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει, ἐὰν ὑποτεθῇ $\alpha = 50$ ὀργ., ϗ τὸ ὁριζόντιον διάσημα $= \chi = 100$ ὀργ., ἡ Ψ ἔσαι $H - \frac{100}{100} \pm \sqrt{\frac{10000 - 1000}{100}} = 1, =$ τῇ ἁπτομένῃ τῆς 45° γωνίας (Γεωμ. 498) τῆς ζητουμένης.

Ἀλλ' ἐὰν ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ $\chi = 50$, ἡ Ψ γενήσεται $H = \frac{100}{50} \pm \sqrt{\frac{10000 - 2500}{50}} = 2 \pm \sqrt{\frac{7500}{50}}, = 2 \pm \frac{8,660230}{50}$ (Συμβ. Λογ. 144) $=$ $2 \pm 1,73205$· συναπτομένυ μὲν ὖν τῷ 2 τῦ ἀριθμῦ 1,73205, ἔσαι 3,73205 ἁπτομένη γωνίας 75°· ἀφαιρυμένυ δὲ (ὃ δηλοῖ τὸ ±) ἔσαι 0,26795 ἁπτομένη γωνίας 15°· ἄμφω δὲ αἱ γωνίαι ἐπίσης τὸ πρόβλημα ἐπιλύυσι· ἐντεῦθεν ἄρα...

240. α΄. Τὸ πλάτος ὑπὸ γωνίαν 45° ἐπὶ δεδομένης ποσότητος κόνεως τὸ μέγισόν ἐσι πάντων τῶν δυνατῶν· ϗ γὰρ ὄντος $\alpha = 50$ ὀργ. ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi > 100$ ὀργ. ἃς εἶχε τὸ ἐν γωνίᾳ 45° πλάτος, $4\alpha^2 - \chi^2$ γενήσεται ἐν τῇ ἐξισώσει Ψ λειπτικὸν, ϗ $\pm \sqrt{\frac{4\alpha^2 - \chi^2}{\chi}}$ ποσὸν ἀνύπαρκτον· β΄. ἐν γωνίᾳ 15°, ϗ 75° τὸ αὐτὸ διανύεται πλάτος, ϗ διὰ τῦ Ψ τύπυ ἰδεῖν ἔξεσιν ἐν γένει

δύω γωνίας ἰσοδιεςώσας τῶν 45° ἀποτελέσας ἴσα πλάτη· δυνατὸν ἄρα τυχεῖν τῆς νύσσης, διχῶς ἰθύναντας τὸ κανόνιον (τῦ ὁριζοντίυ διαςήματος, περὶ ὃ ὁ λόγος, ἐλάττονος ὄντος τῦ ἐν γωνίᾳ 45° πλάτυς), παρ' ὅσον ἡ μὲν μείζων ἢ 45° γωνία, ὑψηλότερον μεταίρυσα τὴν σφαῖραν, δεξιὰν αὐτὴν καθίςησιν οἴκυς κατερείπειν, ἡ δ' ἐλάττων ἢ 45° δεξιωτέρα ἐςὶ τὺς ἐχθρὺς λυμήνασθαι, εἴτε ὅτι ταχίςα διὰ τῆς ὁριζοντίυ αὐτῆς κινήσεως διαδραμεῖται, εἴτε ὅτι χρόνον ἐλάττονα μετὰ τὴν λάμψιν δαπανήσει, ἵνα διεκδράμῃ· γ΄. ἐπεὶ τὸ πλάτος τὸ ὁριζόντιον τὸ ἐν γωνίᾳ 15° ἐςιν = 50 ὀργ. (239), ἥμισυ τῦ ὑπὸ 45° ὁριζοντίυ πλάτυς, ἐμφαίνει αὐτὴν τὴν ἰςὺν τῆς α κόνεως· ἔςιν ἄρα εὐχερέςερον ἀποπειρᾶσθαι τῆς κόνεως ἐν γωνίᾳ 15°, ἢ ἐν 45°, λαμβάνυσιν ὑπὲρ τῆς α ὅλον τὸ πλάτος· δ΄. τὰ πλάτη ἐν γωνίαις διαφόροις ἐλαττῦται, περαιτέρω μὲν τῶν 45° ἕως τῶν 90°, κατωτέρω δὲ τῶν 45° μέχρι τῦ 0· ἐν τύτοις γὰρ τοῖς ὅροις, εἴτ' ὖν κατὰ τὴν φορὰν ΔΑ, ἢ ΔΕ τὸ πλάτος ἔςαι μηδὲν, ὡς δῆλον· ε΄. ῥᾷςον κατιδεῖν, ὡς διὰ τῦ τύπυ Ψ πίνακά τις δύναται ἐκθέσθαι πάντων τῶν πλάτεων τῶν ἀποτελυμένων ὑπὸ πληρώματος κόνεως, ἧς ἡ ἰςὺς δέδοται ἐν διαφόροις γωνίαις, ὃ πέπρακται ὑπὸ τῦ Μ. Β, ἐν τῷ Γαλλικῷ αὐτῦ Πυροβολικῷ συγγράμματι.

241. Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει κείσθω κατὰ τὸ Η ἡ νύσσα, ϗ ληφθέντος διὰ τῆς τριγωνομετρίας τῦ ὁριζοντίυ διαςήματος ΔΟ = χ, ϗ τῦ ὑψώματος ΗΟ = υ, ἀντικαταςήτωσαν ἐν τῷ τύπῳ Σ αἱ δυνάμεις α, χ, υ, ϗ τἆλλα πεπράχθω ὡς ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει.

Ἐν δὲ τῇ τρίτῃ περιπτώσει ἔςω ἡ νύσσα ἐν τῷ Μ· ϗ δὴ ἡ ΜΟ", εἴτ' ὖν υ, ὡς ἐναντία τῇ ΗΟ, γενήσεται λειπτικαὶ, ὃ ποιήσει τὸν τύπον $H = \frac{2a}{x} \pm \sqrt{\frac{-x^2+4av+4a^2}{x}}$.

τούτου προϋποτεθέντος, τὰ λοιπὰ γενέσθω, ὡς πρότερον.

242. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ὑποτέθεινται μὲν (230) αἱ ἐν διαφόροις σημείοις Α, Η, Ι κτ. τῆς καμπύλης ΑΙΚΗ τῆς ὑπὸ βαρέος καταγραφομένης φοραὶ ΑΘ, ΒΜ, ΓΝ, κτ. παράλληλοι· ἔσονται δὲ ἀληθῶς, τοῦ μεταξὺ τούτων τῶν φορῶν διαστήματος ὡς μηδὲν ἐκλαμβανομένου, παραθέσει τοῦ διαστήματος, καθ᾿ ὃ ἡ καμπύλη τοῦ τῆς γῆς κέντρου ἀπέχει, ἔνθα αἱ φοραὶ αὗται συμπεσοῦνται ἀλλήλαις (170), οὐκ εἰσὶ μέντοιγε κυρίως παράλληλοι· καὶ γὰρ καμπύλη, ἣν καταγράφει ἡ προβολὴ, οὐκ ἔστι κυρίως παραβολὴ, καίτοι ἐγγὺς ἐκείνης τῆς φύσεως προσπελάζουσα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Τοῦ βάρους τοῦ ἀέρος $\frac{1}{970}$ ὄντος τοῦ βάρους τοῦ ὕδατος, καὶ δὴ $\frac{1}{8670}$ τοῦ βάρους τῆς ὕλης, ἧς κατασκευάζουσι τὰ πυροβολικὰ σφαιρίδια, δοκεῖ τὸ κατ᾿ ἀρχὰς οὐδεμίαν αἰσθητὴν ἐκ τοῦ ἀέρος αὐτοῖς ἐγγίνεσθαι ἔνστασιν· καὶ οὕτω προβαλλόμενα καταγράφειν παραβολήν· οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ ὅσα εἰδικὴν ἔχει βαρύτητα, οἷον λίθοι κτ, ἐν ἰσχύϊ προϊέμενα· δοκεῖ δὲ μάλιστα οὕτως ἔχειν, καὶ ὅτι ἐνιστάμενος ὁ ἀὴρ βραχύτι τῇ προβλητικῇ δυνάμει, ἐνίσταται ὡσαύτως καὶ τῇ τῆς βαρύτητος.

243. Ἐὰν μέντοι διανοηθῇ τις α΄. ὡς ἡ ταχύτης σφαίρας τινὸς, ἐξιέσης τοῦ κανονίου, εἰ μὴ τῷ ἀέρι ἐπιβραδύνοιτο, διέτρεχε περίπου πόδας 1200 ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, ὅτε πίπτουσα διὰ τῆς βαρύτητος αὐτῆς ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ διανύει μόνον πόδας 15· β΄. ἡ πρὸς τὰς προβολὰς ἔνστασις τοῦ ἀέρος ἐστὶν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν

ταχυτήτων· γ΄. τῆς τοῦ ἀέρος πυκνότητος αἰσθητῶς διαφόρου ἔσης ἐν τῷ ὁρίζοντι ϗ ἐν διαφόροις ὕψεσιν, εἰς ἃ ἀνίασι τὰ προβαλλόμενα ἐν διαφόροις γωνίαις, ῥᾳδίως ἄντις κατανοήσειεν, ὡς ὁ ἀὴρ τὴν τῶν προβαλλομένων κίνησιν, ϗ δὴ τὴν ἐξ αὐτῶν διαγραφομένην καμπύλην, ὁπωσοῦν ἀλλοιοῖ.

Ἵνα δὲ κρίνειν ἔχῃ τις πόσον ὁ ἀὴρ μεταβάλλει τὴν ὑπὸ τῶν βαρέων καταγραφεῖσαν ἂν παραβολὴν, εἰ φέροιντο ἐν τῷ κενῷ, ὑπ᾽ ὄψιν τοῦ ἀναγνώστου ᾠήθην δεῖν ὑποθέσθαι τὸν πίνακα τῶν ἐμμελῶς γενομένων πειραμάτων ἐν τοῖς βασιλικοῖς παιδευτηρίοις τῆς πυροτεχνίας.

Πίναξ.

Τῶν πλάτεων προβολῶν, γενομένων κατὰ τὸν Ὀκτώβριον μῆνα τοῦ 1771, κατὰ τὴν τοῦ ἀέρος ἔνστασιν, ϗ τῶν αὐτῶν πλάτεων λογισθέντων ἐν τῷ κενῷ, ἄνευ τῆς ἐκ τοῦ ἀέρος ἐνστάσεως· αἱ ληφθεῖσαι σφαῖραι ἐν τούτοις τοῖς ἀποπειράμασιν ἦσαν διαμέτρου 11 δακτ. ϗ γραμ. 10, βάρους δὲ 142 λιτρῶν· προέθησαν δὲ διὰ κόνεως 3 λιτρῶν ϗ $\frac{3}{4}$.

γωνίαι τῆς προβολ.	πλάτη ἐν τῷ κενῷ.	πλάτη, οἷα παρετηρήθησαν.	διάρκεια πλάτεων ἐν τῷ κενῷ.	διάρκεια πλάτεων οἷα παρετηρήθη.
10 βαθμ.	253 ὀργ.	257 ὀργ.	4 $\frac{3}{5}$ δευτ.	4 δεύτ.
		249		
		221		
		228		
20	476	440	8 $\frac{9}{16}$	7 $\frac{1}{5}$
		424		
		394		
		398		

30 βαθμ.	640 ὀργ.	451 ὀργ.	$12\frac{1}{5}$ δευτ.	$10\frac{3}{4}$ δεύτ.
		516		
		537		
		492		
40	728	569	$15\frac{3}{5}$	$14\frac{2}{3}$
		575		
		574		
		544		
43	738	506	$16\frac{1}{2}$	14
		517		
		543		
		509		
45	739	490	$17\frac{1}{5}$	$15\frac{1}{3}$
		536		
		505		
		489		
50	728	481	$18\frac{3}{5}$	16
		512		
		488		
		507		
60	640	457	21	$19\frac{1}{3}$
		424		
		457		
		448		
70	470	349	$22\frac{4}{5}$	22
		297		
		349		
		328		
75	370	298	$23\frac{2}{5}$	22
		265		
		261		
		256		

244. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἐκ μόνης τῆς ὄψεως τῦ προτεθέντος πίνακος εὐχερῶς συνάγεται, ὅτι α΄. ἀδύνατον ἀπὸ πλάτες γωνίας τινὸς συναγαγεῖν τὸ πλάτος γωνίας ἄλ-

λης, εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν· ὕτως ὖν τὸ πρῶτον ἄραντες τὸ κανόνιον ἐν γωνίᾳ κλίσεως, ἣν περιέχυσιν οἱ πίνακες ἐπὶ νύσσης, ἧς ἡ θέσις ἔγνωςαι, λείπεται παρατηρῆσαι, πόσον πλάτος ἐςὶ λίαν ἰσχυρὸν, ἢ λίαν ἀσθενὲς, ϗ διορθῶσαι τὸ διάπτωμα, αὔξοντας ἢ ἐλαττῦντας τὴν κλίσιν τῦ κανονίυ, ἐς τ' ἂν τὸ προβαλλόμενον τύχῃ τῆς νύσσης· β'. ὐκ ἐλπιςέον πάντως τεύξεσθαι τῆς νύσσης, εἰ ἐν ἑκάςῳ πλάτει μικρά τις εἴη ἔκτασις· ϗ γὰρ καίτοι ἐν τοῖς προεκτεθεῖσιν ὑποδείγμασιν, ὅσην ἐνῆν κατέθεντο τὴν φροντίδα, ἵν' αἱ ἐν τῇ αὐτῇ γωνίᾳ ἀπόπειραι τὰ αὐτὰ πλάτη ἀποτελῶσι, χρησάμενοι ἀεὶ τῇ αὐτῇ ποσότητι τῆς κόνεως κτ, ὐδέποτε μέντοι εὑρεῖν ἠδυνήθησαν δύω ἰσάλληλα πλάτη· εἰλήφθωσαν γὰρ τέσσαρα πλάτη, ἃ ἐγένοντο ἐν γωνίᾳ 45°, ὑφ' ἣν συνήθως τῆς κόνεως ἀπόπειρα γίνεται· εἰσὶν ὖν τέσσαρα πλάτη πάντῃ διάφορα, ὧν τὸ μέγιςον διαφέρει τῦ ἐλαχίςου ὀργυιαῖς 47, εἴτ' ὖν $\frac{1}{16}$ περίπυ τῦ ἐλαχίςυ πλάτυς· ἀλλὰ ϗ ὕτως ἐπάναγκες εἶναι τὸ πρᾶγμα· παρὰ γὰρ τὰς διαφόρους αἰτίας, τὰς ἀπαντώσας ἐν τῇ ἀναφλέξει τῆς κόνεως, εἰσὶ ϗ αἱ μὴ ὡρισμένως γινόμεναι παραπληρώσεις· ὐκῦν ὅσῳ ἰσχυρότερον παραπληρῦται ἡ κόνις, τοσύτῳ τὸ προβαλλόμενον πόῤῥω χωρεῖ.

245. Ἀλλ' ἐξιέσης τῆς σφαίρας ἐκ τῦ κανονίυ ἐν δυσὶ πληρώμασι κόνεως ἴσοις, ἡ τῦ ἀέρος ἔνςασις διάφορος εἶναι δύναται, ϗ ἐν δυσὶν ὥραις διαφόροις ἀεὶ ἔςαι διάφορος· α'. ἀὴρ γὰρ θερμότερος, ἧττον ἔχει πυκνότητος, ϗ δὴ ἧττον ἐνίςαται ἀέρος ψυχροτέρυ· β'. ἠρεμῦντος, ἢ ἀντιπνέοντος, ἢ ϗ συντρέχοντος τῦ ἀνέμυ ταῖς φοραῖς τῶν σφαιρῶν, ἡ προβολὴ διαφόρως ἀλλοιωθήσεται, ἐλαττυμένη, ἢ αὐξομένη· ἀλλ' ὅ,τε ἀὴρ, ϗ αἱ πνοαὶ

τῶν ἀνέμων συνεχῶς μεταβάλλεσιν· ἄρα ὁριωθῆναι τὰ πλάτη ἐκ πάντων τῶν εἰρημένων ἀδυνάτως ἔχον δείκνυται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τῆς κατ' ἀναλίκνισιν κινήσεως.

246. Βάρος τὸ Β (σχ. 108) ἐξ ὕλης ςερεᾶς, ἵν' ἐλάττονι ἀπαντᾷ τῇ τῦ ἀέρος ἐνςάσει, μίτῳ προσηρτημένον τῷ ΑΒ, καλεῖται σῶμα *ἐκκρεμές*· τὸ δὲ Β σημεῖον τῆς ΑΒ καθέτε καλεῖται σημεῖον *ἠρεμήσεως*· ἐὰν ἔν τὸ Β ἀρθῇ φέρε, ἐκεῖθεν δὲ ἀφεθῇ, κατελεύσεται εἰς τὸ Β· εἶτα ταχυτῆτα τοσαύτην προσκτήσεται, ὅση ἂν οἵαν ᾖ ἀναβῆναι ὕψος τὸ ΒΔ, ἴσον τῷ ἀφ' ὗ κατέπεσε ΓΒ (190), ἀπάσης ἄλλης αἰρομένης αἰτίας (99)· αὕτη ἔν ἡ ὅλη κίνησις ΓΒΔ τῦ ἐκκρεμῦς σώματος καλεῖται *ἀναλίκνισις*.

Καλῦνται ἀναλικνίσεις *ἰσόχρονοι*, ἡνίκα χρόνον ἴσον διαρκῦσι.

247. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Μόνης θεωρεμένης τῆς βαρύτητος, ἐὰν ἐγερθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἠρεμήσεως Β, τὸ ἐκκρεμὲς ἀποτελέσει ἀναλικνήσεις ἀεὶ ἴσας ϗ ἀπείρυς τὸν ἀριθμόν.

ΔΕΙΞΙΣ. Καταπίπτον γὰρ ἐκ τῦ Γ ἐπὶ τὸ Β, προσκτᾶται ταχύτητα, ὅση ἀνελθεῖν δύναται ἐς τὸ Δ (190)· καταπίπτον δὲ ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τὸ Β προσκτᾶται ταχύτητα, ὅση ἂν ἀνέλθοι ἐπὶ τὸ Γ, ϗ ὕτως ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ο.Ε.Δ.

248. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Αἰρομένης τῆς ἐκ τῦ ἀέρος ἐνςάσεως, ἐὰν ἀκίνητος ὑποτεθῇ ἡ γῆ, ϗ κατὰ διάμε-

τρον τετρημένη, λίθος ἄφετος εἰς τὴν κατὰ κάθετον ὀπὴν, πεσεῖται εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ϗ ἐν τῇ καθόδῳ προσκτήσεται ταχύτητα, ὅσῃ ἀνελθεῖν δυνήσεται εἰς τοὺς ἡμῶν ἀντίποδας· ἀφικόμενος δὲ ἐκεῖσε, ϗ πᾶσαν ἀποβαλὼν τὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατο πεσὼν ἀφ᾽ ἡμῶν ἐς τὸ τῆς γῆς κέντρον, παλινδρομήσει αὖθις εἰς τὸ κέντρον, κἀκεῖ αὖθις κτησάμενος ταχυτῆτα ἱκανὴν, ἀνελεύσεται ὡς ἡμᾶς, ϗ τοῦτο ἐπ᾽ ἄπειρον· ϗ γὰρ ἅπαν σῶμα βαρὺ τὴν αὐτὴν προσκτᾶται ταχυτῆτα, εἴτε πίπτοι κατὰ κάθετον τὴν τΒ, ἢ διὰ τοῦ τόξου ΓΒ μέχρι τοῦ κέντρου τῆς ἠρεμήσεως (204), ϗ ἀεὶ κτᾶται ταχύτητα, δι᾽ ἧς ἂν ϗ πέραν τοῦ κέντρου τῆς ἠρεμήσεως ἀνελθεῖν δύναται ἐς ὕψος ἴσον τῷ ἀφ᾽ οὗ κατέπεσεν· ἀλλὰ κέντρον ἠρεμήσεως τῶν γηΐνων βαρέων ἐστὶν αὐτὸ τὸ κέντρον τῆς γῆς, ὡς εἰς τοῦτο ὠθέσης αὐτὰ τῆς βαρύτητος (170)· ἄρα ὁ λίθος ἀνελεύσεται εἰς ὕψος ἴσον τῷ, ἀφ᾽ οὗ κατέπεσε, μετὰ τὸ ἀφικέσθαι εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ϗ οὕτως ἐπ᾽ ἄπειρον.

249. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.** Ἐὰν ἄρα βάρος τι τὸ Β ἧττον ὑψῶται μεθ᾽ ἑκάστην ἀναλίκνισιν, ϗ τέλος καθηρεμῇ, τουτὶ γίνεται διὰ τὸν ἐνιστάμενον ἀέρα, ϗ ἔτι τυχὸν διὰ τὸ τοῦ μίτου δύσκαμπτον.

250. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.** Ἐὰν ἐκκρεμὲς τὸ ΑΒ πλείω χρόνον δαπανᾷ εἰς τὰς ἑαυτοῦ ἀναλικνίσεις ἐν τῷ τύπῳ Π, ἢ ἐν τῷ τύπῳ ξ, τοῦτο γίνεται, ὅτι ἡ βαρύτης ἧττον ἐπενεργεῖ ἐν τῷ Π, ἢ ἐν τῷ ξ.

ΔΕΙΞΙΣ. Καθ᾽ ἑαυτὸ δῆλον· μόνη γὰρ ἡ βαρύτης ἐμποιεῖ τὴν ταχύτητα τῶν ἀναλικνίσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς, ϗ ἅπαν ἀποτέλεσμα ἀνάλογον εἶναι δεῖ τῇ ἑαυτοῦ αἰτίᾳ (87).

251. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Αἱ ἀναλικνίσεις βραδεῖαι γίνονται αἰσθητῶς ὑπὸ τὸν ἐξισωτὴν, καίτοι τῶν αὐτῶν ἐπι-

μελῶς τηρουμένων περιστάσεων αὐτοῦ τε, ϗ ἐν τοῖς πόλοις· ἄρα τὰ σώματα εἰσὶν ἡττοβαρῆ ἐν τῷ ἰσημερινῷ, ἢ ἐν τοῖς πόλοις· διαπιστοῦνται δὲ τοῦτο ϗ ἄλλαι δύω αἰτίαι, περὶ ὧν ἐροῦμεν ἐν τοῖς ἑξῆς.

252. **ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.** *Αἱ διάρκειαι ἑκάστης ἀναλικνίσεως δύω ἐκκρεμῶν* ΑΒ, αβ (σχ. 108), *διαφόρων τὸ μῆκος, εἰσὶν ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν μήκεων.*

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ ταχύτητες τοῦ βάρους Β, ϗ τοῦ β, ἐν δυσὶν ὁμοίοις τόξοις ΓΒΔ, γβδ, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων ΑΒ, αβ (216)· ἐχέτω οὖν ΑΒ : αβ :: 4 : 1· ἄρα ϗ ΓΔ : γδ :: 4 : 1· ἄρα τὸ διατρεχόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ Β ταχυτῆτι διπλῇ, ἔσεται τετραπλάσιον· δεήσει ἄρα διπλοῦ χρόνου, ἵνα διανυσθῇ τὸ ΓΔ, ἢ τὸ γδ· ἡ ἄρα διάρκεια τῆς τοῦ Β ἀναλικνίσεως ἔσεται πρὸς τὴν διάρκειαν τῆς τοῦ β ὡς 2 : 1 :: $\sqrt{AB}$: $\sqrt{\alpha\beta}$. Ο.Ε.Δ.

253. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.** Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναλικνίσεων ἐκκρεμοῦς τοῦ ΑΒ πρὸς τὸν τῶν τοῦ αβ, ἐστὶν ἐν ἀντιστρόφῳ ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν μήκεων, εἴτ' οὖν ὡς $\sqrt{\alpha\beta}$: $\sqrt{AB}$.

254. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.** Ἐπεὶ ἡ διάρκεια τῆς ἀναλικνίσεως αὔξει κατὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κατὰ τὸ ἐκκρεμὲς μήκους, εὑρεθήσεται μεταξὺ τῶν ἀπείρων ἀναλικνίσεων διαφόρων τὴν διάρκειαν, ἐκ μηκῶν τελουμένων διαφόρων, ἀναλίκνισις, ἥτις διαρκέσει ἴσον ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ· ἄρα ἐκκρεμὲς, οὗ τὸ μῆκος τοιοῦτον, ὥστε ἑκάστην ἀναλίκνισιν, τελουμένην ἐν τόξῳ τριῶν ἢ τεσσάρων μοιρῶν, διαρκεῖν ἓν λεπτὸν δεύτερον, καλεῖται ἐκκρεμὲς τῶν δευτέρων· ἐπεὶ δὲ ἑκάστῃ ὥρᾳ εἰσὶ λεπτὰ δεύ-