εἶτ' οὖν ποδῶν 60, τούτοις προστιθεμένων τῶν 15 διὰ τὴν ἐν τῷ τρίτῳ λεπτῷ ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος, ἔσονται πόδες 75· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

178. δ'. Ἐν τῇ καθόδῳ τῶν σωμάτων τὰ διανυόμενα διαστήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τετράγωνα (151)· γνωσθέντος οὖν ἅπαξ τοῦ διανυσθέντος διαστήματος ἐν τῷ πρώτῳ χρόνῳ, δυνατὸν, ἤτοι, χρόνου ἄλλου δοθέντος, εὑρεῖν τὸ ἐν αὐτῷ διανυθησόμενον διάστημα, ἢ, διαστήματος δοθέντος, εὑρεῖν τὸν ἀπαιτούμενον χρόνον εἰς διάνυσιν αὐτοῦ, ἢ τέλος, χρόνου ὡρισμένου δοθέντος, εὑρεῖν τὸ ἰδιαίτερον διάστημα, τὸ ἐν ἑκάστῳ μέρει τοῦ χρόνου διανυσθέν.

179. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Α'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Πόσον διάστημα διανύσει ἐν τέσσαρσι λεπτοῖς δευτέροις λίθος ἄφετος; φημὶ δή· τὸ ἀπὸ 1 δευτέρου λεπτοῦ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ 4, ὡς 15 ποδῶν διάστημα διανυόμενον ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ πρὸς χ, εἶτ' οὖν $1 : 16 :: 15 : \chi = 240$· εἰς εὕρεσιν ἄρα τῶν τοῦ διαστήματος ποδῶν πολλαπλασιαστέον 15 ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ χρόνου τετράγωνον.

180. Ἐντεῦθεν ἀρύεται ἡ λύσις τοῦ ἐφεξῆς προβλήματος· σφαῖρα μολυβδίνη ἀφ' ὕψους πύργου κατηνέχθη πρὸς τὴν γῆν ἐν τρισὶ λεπτοῖς δευτέροις· πόσον ἄρ. ἐστὶ τὸ τοῦ πύργου ὕψος; ἢ $15 = 3^2 (= 9) = 135$ ποσί.

181. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Β'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Λίθος ἀφ' ὕψους ποδῶν 375 καταφερόμενος τῷ ὁρίζοντι πρὸς ὀρθὰς, πόσον διαπανήσει χρόνον, ἐς τ' ἂν ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ὁρίζοντος γένηται; ἐπεὶ οὖν $15 : 375 :: 1^2 : \chi^2 = 5$· λίθος ἐν τῷ κατιέναι διαπανήσει 5 λεπτά.

182. ΕΤΕΡΟΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Νεύτων ἔδειξεν, ὡς ἡ τῆς σελήνης βαρύτης, ἣν φέρεται ἐπὶ τὴν γῆν, τοσαύτη ἐστὶν, ὡς ἀφεθεῖσαν ἐν λεπτῷ τῷ πρώτῳ κατελ-

θεῖν πρὸς τὴν γῆν πόδας 15· τοῦ δὲ μεταξὺ γῆς καὶ σελήνης διαςήματος ὄντος λευγῶν 84000, πόσον ἂν χρόνον ἀφεθεῖσα ἡ σελήνη δαπανήσειεν, ἕς τ' ἂν τὸ ἐκείνης κέντρον τῷ ταύτης ἐξ ὑποθέσεως συμπέσῃ; ἀναχθεισῶν τῶν λευγῶν εἰς πόδας, ἐςὶ 15 ποδ. : 1150128000 ποδ. :: 1^2 : $\chi^2 = 76675200$· ἄρα $\chi = 8756,44$· ἡ ἄρα σελήνη πεσεῖται ἐπὶ τῆς γῆς ἐν λεπτοῖς 8756,44 = 6 ἡμ. 56 λεπ. 26 δευτ. ὡς ἔγγιςα.

183. **ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗ Γ'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ.** Σώματι διανύσαν ἐν 5 δευτέροις λεπτοῖς πόδας 375, πόσους ἐν ἑκάςῳ λεπτῷ διήνυσε; τοῦ ὁλικοῦ διαςήματος, τοῦ ἐν 5 δευτέρ. λεπ. διανυσθέντος, ὀφείλοντος εἶναι $= 15 \times 5^2$, ἀφαιρετέον τοῦ 375 τὸ $15 \times 4^2 = 240$· τὸ κατάλοιπον 135 ἔςαι τὸ διανυσθὲν ἐν τῷ πέμπτῳ λεπτῷ· ἀπὸ δὲ 240 ἀφαιρεθέντος τοῦ $15 \times 3^2 = 135$, τὸ κατάλοιπον ἔςαι τὸ διανυσθὲν ἐν τῷ τετάρτῳ λεπ. καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

184. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν χρόνων ᾖ μέγας, πρὸς εὐμάρειαν χρηςέον τῇ ἑξῆς ἰδιότητι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. ἕκαςος αὐτῆς ὅρος ἴσος ἐςὶ τῷ πρώτῳ σὺν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς, καὶ τοῦ τῶν ἡγησαμένων αὐτοῦ ὅρων ἀριθμοῦ (Συμβ. Λογ. 212)· ἐὰν δὲ φέρ' εἰπεῖν ᾖ βουλομένοις εἰδέναι, ἥτις ἐςὶν ἡ ταχύτης τῆς σελήνης ἐν τῷ 8756$^{\omega}$· λεπτῷ, εἴτ' οὖν τῷ ἐσχάτῳ τῶν τῆς ὑποτιθεμένης ἐπὶ τὴν γῆν καθόδου αὐτῆς· οὗτος οὖν ὁ ὅρος ὀφείλει εἶναι $= \overline{1 + 2} \times 8755$· ἀλλ' ὁ πρῶτος ὅρος ἐπὶ ταύτης τῆς ὑποθέσεως ἐςὶ πόδες 15, καὶ δὴ ἡ διαφορὰ αὐτῶν 30· ἄρα ἡ ταχυτὴς τῆς σελήνης ἐν τῷ ἐσχάτῳ λεπτῷ ἔςαι $\overline{15 + 30} \times 8755 = 262665$ ποσί.

185. έ. Οἱ χρόνοι, ἢ αἱ ταχύτητες, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διαστημάτων (153)· γινωσκομένου οὖν τοῦ διανυθέντος ἐν τῷ πρώτῳ χρόνῳ διαστήματος, καὶ ἑτέρου διαστήματος δοθέντος, εὑρεῖν δυνήσομαι, ἥτις ἐστὶν ἡ ταχύτης, ἣν τὸ σῶμα ἕξει τελευτῶντος τοῦ δευτέρου διαστήματος, ἢ, δοθείσης τῆς ταχύτητος, γνωσθήσεται τὸ διάστημα, εἴτ' οὖν ἀφ' ὅσου ὕψους ἔδει κατελθεῖν τὸ σῶμα, ἵνα ταύτην ἂν ἐκτήσατο τὴν ταχύτητα.

186. **ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Β'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ.** Ἀφ' ὅσου ὕψους κατελθεῖν δεῖ σῶμα, ἵνα κτήσηται ταχύτητα, δι' ἧς ἰσομερῶς κινούμενον διανύσειεν ἂν πόδας 20 ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ; εἰδότες οὖν ὡς τὸ σῶμα προσκτᾶται ταχύτητα ὡς διανύσαι πόδας 30, κατερχόμενον ἐξ ὕψους ποδῶν 15, λύσομεν ῥᾷστα τὸ πρόβλημα· $30 : 20 :: \sqrt{15} : \sqrt{\chi}$· ἐπεὶ δὲ $\sqrt{15} = 3,8,3$ ὡς ἔγγιστα, ἄρα ἔσται $\sqrt{\chi} = 2,582 = 6,66$ ποσὶ περίπου, καὶ δὴ ἀπὸ τοσούτου ὕψους κατιὸν τὸ σῶμα κτήσεται ταχύτητα τὴν ζητουμένην, ἵνα δι' αὐτῆς ἰσομερῶς κινούμενον διανύσῃ ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ πόδας 20.

187. **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.** ά. Ἐπείπερ ἅπαν ἔγνωσται ἐν ταῖς ταχύτησι τῶν βαρέων, ἔξεστι ταύταις χρήσασθαι ὡς ὅροις παραθέσεως ἐν ἄλλαις ταχύτησιν· οἷον ἔξεστιν εἰπεῖν, ὅτι ταχύτης 30 ποδῶν ἐν λεπτῷ δευτέρῳ κινήσεως ἰσομεροῦς ἴση ἐστὶ τῇ, ἣν κτᾶται λίθος καταφερόμενος ἀφ' ὕψους ποδῶν 15, καὶ ἐπὶ ἄλλων ὡσαύτως· β'. εἴτις βούλοιτο κινητῷ τινι ταχύτητα ἐμποιῆσαι, μεθ' ἧς ἂν ἐν χρόνῳ ὡρισμένῳ διάστημα δοθὲν διανύσειε, τεύξεται τούτου ῥᾷστα, εἰ σῶμά τι βαρὺ κατιὸν ἀφ' ὕψους, ὃ τὴν ζητουμένην ταχύτητα ἐμποιῆσαι δύναται, μεταδῷ τῷ κινητῷ τούτῳ ἁπάσης τῆς ἑαυτοῦ ταχύτητος.

188. ϛʹ. Αἱ ταχύτητες τῶν ἀνιόντων σωμάτων φθίνουσι κατὰ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ÷ 6.5.4.3.2.1 (156), ἐκ πείρας.

189. Ἀλλὰ καὶ οὕτως ἔχειν ἀνάγκη τὸ πρᾶγμα· ἐπεὶ γὰρ ἡ κίνησις τῶν κατιόντων ἔϛιν ἰσοταχὴς διὰ τὴν βαρύτητα, προσεπιτιθεμένων ἀεὶ νέων ταχυτήτων ἐν ἑκάϛῳ λεπτῷ ἴσων· ἀνιόντων ἄρα, ἀφαιρεῖσθαι ἀνάγκη ἀεὶ βαθμοὺς ἰσαλλήλους ταχύτητος· οὕτως ἄρα αἱ ταχύτητες τῶν ἀνιόντων ἀπομειωθήσονται κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν φθίνουσαν πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 6.5.4.3.2.1.

190. Ἐντεῦθεν ἄρα αʹ. ἡ βαρύτης βραδύνει τὰ βαρέα ἀνιόντα, ὅσον αὐτὰ ἐπιταχύνει κατιόντα· βʹ. σῶμα κατιὸν κτᾶται ταχύτητα, ὅσης ἐπιδεῖται, ἵν' ἀνέλθῃ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐξ οὗ κατῆλθεν· γʹ. πάντα τὰ εἰρημένα περὶ τοῦ λόγου τῶν ταχυτήτων, τῶν διαϛημάτων, καὶ τῶν χρόνων καὶ τοῦ, καθ' ὃν τρόπον ταῦτα λογίζεσθαι δεῖ περὶ σώματος βαρέος κατιόντος, τὰ αὐτὰ νοητέον καὶ περὶ σώματος ἀνιόντος, ἀρχομένοις ἐκ ἀπὸ τῆς ἐλαχίϛης ταχύτητος, ὡς ἤδη ἐποιοῦμεν, ἀπὸ δὲ τῆς μεγίϛης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ.

Περὶ καθόδου τῶν σωμάτων διὰ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

191. Βαρύτης καλεῖται ἀπόλυτος, ἣν ἔχει τὸ σῶμα ἐν ἑαυτῷ, μηδόλως παρεμποδιζόμενον ὑπὸ τῶν μέσων· βαρύτης δὲ σχετικὴ ἡ ἐναπολειπομένη ἀπὸ τῆς τῶν κωλυμάτων ἐπηρείας· σῶμα τοίνυν βαρὺ, ἐν μὲν τῷ

κενῷ κάτεισι κατὰ τὴν ἀπόλυτον βαρύτητα ἑαυτῦ· κείμενον δὲ ἐν μέσῳ, ὃ ϗ αὐτό ἐςι βαρὺ, οἷος ὁ ἀὴρ, ἀπόλλυσιν, ὡς ὀψόμεθα, μέρος τῆς ἑαυτῦ βαρύτητος ἴσον τῇ τῦ μέσυ βαρύτητι· τὸ δὲ περιὸν τῆς ἀπολύτυ βαρύτητος, ὀνομάζεται βαρύτης σχετική· ὡσαύτως βαρὺ σῶμα τεθὲν ἐπὶ τραπέζης τυχὸν κεκλιμένης τῷ ὁρίζοντι, μὴ δυνάμενον πρὸς ὀρθὰς κατελθεῖν, ὥσπερ διὰ τῆς ἀπολύτυ ἑαυτῦ βαρύτητος, ἀλλὰ πλαγίως, ἀπόλλυσιν, ὡς δείκνυται διὰ πείρας, μέρος τῆς ἑαυτῦ βαρύτητος· τὸ δὲ κατάλοιπον, βαρύτης ἤκυσε σχετική.

192. Ἔςω ὁριζόντειος εὐθεῖα (σχ. 93) ἡ ΖΘ ϗ ἡ ΕΘ, κεκλιμένη ἐπὶ τῆς πρώτης, εἴτ᾽ ὖν τῦ ὁρίζοντος, ἔςω, ὃ καλεῖται κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἡ ὖν ΕΘ μῆκος καλεῖται τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ, ϗ ἡ ΕΖ κάθετος τῷ ὁρίζοντι, ὕψος τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ.

193. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ἀπόλυτος βαρύτης τῦ Μ τῦ ἐπὶ τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ ΕΘ πρὸς τὴν αὐτῦ σχετικὴν λόγον ἔχει, ὃν ΕΘ πρὸς ΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω ἐκ τῦ κέντρυ Κ τῦ σώματος Μ ἡ τῷ ΕΘ ὁρίζοντι κάθετος ΚΤ, ϗ ἡ Κα κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ϗ πεπληρώσθω τὸ παραλληλόγραμμον αΚνβ· ἐκῦν ἡ εὐθεῖα Κβ, ἣ ἐμφαίνει τὴν φορὰν τῦ Μ σώματος πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον, ϗ συναντᾷ κατὰ τὸ β τῷ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ἐφ᾽ ὖ ἔςι πλαγία, ἀναλυθῆναι δύναται εἰς δύω δυνάμεις, τήντε αΚ κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ, δι᾽ ἧς τὸ κινητὸν ἐπιδρᾷ τῷ ἐπιπέδῳ, ϗ τὴν Κν, καθ᾽ ἣν ἡ δύναμις Κβ σπεύδει μετακινεῖν τὸ Μ πρὸς τὸ ἐπίπεδον (138)· ἀλλ᾽ ἡ αΚ πᾶσα ἀφανίζεται, καταθλίβοντος τῦ Μ τὸ ΕΘ ἐπίπεδον, ἤ, ὃ ταὐτὸν, τὸ ΕΘ ἐπίπεδον αἴρει πᾶσαν ταύτην τὴν βαρύτητα· καταλείπεται ἄρα τῷ κινητῷ, ἵνα κινηθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, μόνη ἡ ἰσχὺς Κν = αβ· ἄρα Κβ μὲν ἐμφαίνει τὴν ἀπόλυτον τοῦ Μ βαρύτητα, αβ δὲ τὴν σχετικήν· ἀλλὰ τὰ Κνβ, βΤΘ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια· παρὰ γὰρ τὰς ὀρθὰς ν, Τ, αἱ δύω ὑπὸ ΤιΘ, βΓν ὡς ἀντίστοιχοι εἰσὶν ἴσαι· ἄρα Κβ : Κν :: βΚ : βΤ, ἐπεὶ δὲ ϗ τὰ βΤΘ, ΕΖΘ τρίγωνα ὅμοια, ἄρα Κβ : Κν :: ΕΘ : ΕΖ. Ο. Ε. Δ.

194. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατιόντος διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὴν αὐτοῦ τούτου κατιόντος πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι λόγον ἔχει, ὃν τὸ τοῦ ἐπιπέδου ὕψος ΕΖ πρὸς τὸ μῆκος ΕΘ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν τὸ μῆκος ΕΘ διπλοῦν ᾖ τοῦ ὕψους ΕΖ, τὸ κινητὸν διασώσει τὸ ἥμισυ τῆς ἑαυτοῦ βαρύτητος· ἐὰν δὲ τριπλοῦν, ἓν τριτημόριον, ϗ οὕτως ἑξῆς.

195. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ἀπόλυτος βαρύτης πρὸς τὴν σχετικὴν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς κλίσεως· καὶ γὰρ $\mathrm{Κβ} : \mathrm{Κν} :: \mathrm{ΕΘ} : \mathrm{ΕΖ} :: \frac{\mathrm{ΕΘ}}{2} : \frac{\mathrm{ΕΖ}}{2}$· ἀλλὰ $\frac{\mathrm{ΕΘ}}{2}$ ἐστὶν ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας Ζ, ϗ $\frac{\mathrm{ΕΖ}}{2}$ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς κλίσεως (Γεωμ. 482)· ἄρα κτ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ὅσον ἡ ὑπὸ ΕΘΖ γωνία τῆς κλίσεως ἐστὶ ποσὸν πεπερασμένον, τοῦτ᾽ ἔστιν ὅσον ἡ ΕΘ οὐ δύναται ἐκληφθῆναι ὡς παράλληλος τῇ ΖΘ, τὸ ἡμίτονον τῆς Θ γωνίας ἕξει λόγον πεπερασμένον πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ἤτε σχετικὴ βαρύτης ἔσται μέρος πεπερασμένον τῆς ἀπολύτου· ἄρα ἀεὶ βαρύτι, τιθέμενον ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, κατιέναι ὀφείλει, ἥτις ποτ᾽ ἂν ᾖ ἡ ἔγκλισις· ἐὰν οὖν συχνάκις συμβαίνῃ βάρος τι, τιθέμενον ἐπὶ κεκλιμέγȣ ἐπιπέδȣ, μὴ κατιέναι, ἀπ' ἐξωτερικῆς τινος αἰτίας τȣτὶ γίνεται, οἷα ἡ τριβὴ, ἣν ἀφανίσαι ὀφείλει τὸ βάρος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ϗ ἡ τȣ περιέχοντος ἀέρος ἀντίςασις.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ σχετικαὶ βαρύτητες τȣ αὐτȣ σώματος, κειμένȣ ἐπὶ διαφόρως κεκλιμένων ἐπιπέδων, εἰσὶν ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν ἐγκλίσεων.

196. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ κίνησις σώματος, ἐπὶ κεκλιμένον ἐπίπεδον κειμένȣ, ἔςιν ἰσοταχής

ΔΕΙΞΙΣ. Ὅσον ἂν τὸ ἐπίπεδον ἐπικεκλιμένον ᾖ τῷ ὁρίζοντι, ἀεὶ καταλείπεταί τι βαρύτητος ὠθȣσης τὸ Μ σῶμα πρὸς τὴν ΕΘ· τȣτὶ τὸ μέρος τῆς ἀπολύτȣ βαρύτητος, εἴτ' ȣν ἡ σχετικὴ βαρύτης, ἥτις ἐπενεργεῖ τῷ Μ κατὰ τὸ β, ϗ ἐμποιεῖ αὐτῷ ταχύτητα Κν = αβ, ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ προσθήσει αὐτῷ ταχυτῆτα ἴσην τῷ αβ, ὥσπερ ϗ ἡ ἀπόλυτος βαρύτης ἐμποιήσειεν ἂν τῷ Μ καινὴν ταχυτῆτα ἴσην τῷ βΚ, εἴγε ἡ σχετικὴ βαρύτης παραμένει τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ὡς ἡ ἀπόλυτος τῷ καθέτῳ ΕΖ· αὕτη δὲ ἡ δευτέρα ταχύτης συναπτομένη τῇ πρώτῃ, ϗ ἰσȣμένη αὐτῇ, τελευτῶντος τȣ δευτέρȣ λεπτȣ, διπλῆ γίνεται τῆς πρώτης· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ ταχύτης, τελευτῶντος τȣ τρίτȣ λεπτȣ, ἔσεται τριπλῆ τῆς πρώτης, ϗ ȣτως ἑξῆς. Ο. Ε. Δ.

197. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Λοιπὸν ȣν ἐςιν, ἃ δέδεικται περὶ τῶν κατὰ κάθετον κατιόντων σωμάτων, ἀποδεῖξαι ϗ περὶ τῶν διὰ κεκλιμένȣ ἐπιπέδȣ καταβαινόντων.

Οὐκȣν ἐν ταύτῃ τῇ κινήσει, α΄. αἱ ταχύτητες αὔξȣσιν ὡς οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1 . 2 . 3 . 4 κτ· β΄. τὰ διανυόμενα διαςήματα ἐν ἑκάςῳ λεπτῷ πεπερασμένῳ ἔσονται ὡς οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ 1 . 3 . 5 . 7 κτ· γ΄. τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν διανυομένων διαςημάτων τελευτώντων τῶν χρόνων ἔσαι ὡς τὸ ἀπὸ τῶν χρόνων τέτων τετράγωνον· ᾗ ὕτως ἑξῆς.

198. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ταχύτης, ἣν κτᾶται σῶμα τὸ Μ, κατιὸν ἐν δεδομένῳ χρόνῳ, ἐν 3 φέρε δευτέροις λεπτοῖς, διὰ τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ ΕΘ, πρὸς τὴν ταχύτητα, ἣν κτᾶται τὸ αὐτὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, κατιὸν κατὰ τὴν κάθετον ΕΖ, λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὕψος ΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ μῆκος τῦ ἐπιπέδυ· ἐπεὶ ἑκάςη ταχύτης ἀπειροςὴ, ἣν ποιεῖ ἡ ἀπόλυτος βαρύτης ἐν ἑκάςῳ ἀπειροςῷ λεπτῷ ἰὸν κατὰ τὴν ΕΘ, ἔσαι πρὸς ἑκάςην ἀπειροςὴν ταχύτητα, ἣν ποιεῖ κατὰ τὴν κάθετον ΕΖ, ὡς ΕΖ : ΕΘ· ἡ γὰρ σχετικὴ βαρύτης πρὸς τὴν ἀπόλυτον ἔςιν ὡς ΕΖ : ΕΘ (193)· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἀπειροςῶν ταχυτήτων, εἴτ᾽ ῦν ἡ ὁλικὴ κατὰ τὴν ΕΘ ταχύτης, ἡ ἐκ τῆς σχετικῆς βαρύτητος ἐγγινομένη πρὸς τὴν ὁλικὴν ταχυτῆτα τὴν κατὰ τὴν ΕΖ ἔσαι ὡς ΕΖ : ΕΘ.

Ἡ πρώτη ἄρα ταχύτης πρὸς τὴν δευτέραν, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς ἐγκλίσεως, εἴτ᾽ ῦν $\frac{ΕΖ}{2}$ πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἴτ᾽ ῦν $\frac{ΕΘ}{2}$. ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΖΘ, ἡμίτονον μὲν τῆς κατὰ τὴν ἔγκλισιν γωνίας ἐςὶ τὸ $\frac{ΕΖ}{2}$, ἡμίτονον δὲ τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ $\frac{ΕΘ}{2}$ (Γεωμ. 482).

199. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Οὕτως ἄρα (110) τὸ διανυόμενον διάςημα ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς τὸ διάςημα τὸ κατὰ κάθετον διανυόμενον ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ,

ἐστιν ὡς ΕΖ : ΕΘ· ἐὰν ἓν, ἐν ᾧ σώματι κάτεισι τὴν κάθετον ΑΒ (σχ. 94)· δύω ἕτερα σώματα κατίωσιν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διὰ τῶν κεκλιμένων ἐπιπέδων ΑΘ, ΑΖ, ᾗ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας Β ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΒΓ, Βξ, αὐτοῖς τοῖς ἐπιπέδοις, τὰ δύω ἕτερα σώματα ἀφίξονται, τὸ μὲν τοῦ Γ σημείου, θάτερον δὲ τοῦ ξ, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ πρῶτον ἀφίξεται τοῦ Β· διὰ γὰρ τὰς ταῖς ὑποτεινούσαις ΑΘ, ΑΖ καθέτους ΒΓ, Βξ, α΄. ἐκ τῶν δύω ὁμοίων τριγώνων ΑΒΘ, ΑΒΓ (Γεωμ. 340), ἔσται ΑΓ : ΑΒ : : ΑΒ : ΑΘ· β΄. ἐκ τῶν ἄλλων δύω ὁμοίων τριγώνων ΑΒΖ, ΑΒξ, ἔσται Αξ : ΑΒ : : ΑΒ : ΑΖ· εἴτ' ἓν τὸ διανυόμενον διάστημα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὸ κατὰ κάθετον ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυόμενον λόγον ἔχει, ὃν ἡ κάθετος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον.

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐὰν δύω σώματα ἅμα πίπτωσιν ἀπὸ τοῦ σημείου Ε (σχ. 95), τὸ μὲν πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΕΘ, θάτερον δὲ τὴν ΕΖ κάθετον, δυνατὸν προσδιορίσασθαι, εἰς ὃ σημεῖον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀφίξεται τὸ πρῶτον, ὅταν τὸ δεύτερον γένηται ἐπί τινος δεδομένου σημείου Ι τῆς καθέτου· ᾗ γὰρ ἀχθείσης τῆς Ιτ καθέτου τῇ ΕΘ, τὸ σημεῖον τ, καθ' ὃ αὕτη συμβάλλει τῷ ἐπιπέδῳ, ἔσται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἀφίξεται τὸ πρῶτον, ὅταν ἀφίκηται τὸ δεύτερον ἐπὶ τοῦ Ι· διὰ γὰρ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕτΙ, ΕΘΖ, ἐστιν Ετ : ΕΙ : : ΕΖ : ΕΘ· ἄρα τὸ διανυθὲν διάστημα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὸ διανυθὲν κατὰ κάθετον ἐστιν ὡς ἡ κάθετος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Πᾶν σῶμα ἴσοις χρόνοις διέρχεται ἑκάστην τῶν χορδῶν, ᾗ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου· τῷ γὰρ Κ μέσῳ σημείῳ τῆς ΑΒ (σχ. 96), ὡς κέντρῳ,

κ. διαςήματι τῷ ΑΚ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΔΒΖ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΔ, Βτ, τοῖς κεκλιμέναις ἐπιπέδοις ΑΘ, ΑΗ· λέγω δὴ σῶμα ἅπαν διερχόμενον τὴν διάμετρον ΑΒ, κ. τὰς χορδὰς ΑΔ, Ατ, ἴσοις χρόνοις ἑκάςην αὐτῶν διανύσει· αἱ γὰρ γωνίαι ΒΔΑ, ΒτΑ, ὡς βεβηκυῖαι ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἔσονται ὀρθαὶ ἐγγεγραμμέναι, κ. δὴ αἱ ΑΔ, Ατ, χορδαὶ τοῦ κύκλου· ἄρα ἴσοις χρόνοις ἅπαν σῶμα διελεύσεται τήν τε διάμετρον κ. ἑκάςην χορδήν.

202. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ὁ χρόνος, ὃν δαπανᾷ τὸ κινητὸν, ἵνα διέλθῃ ἅπαν τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ (σχ. 97), πρὸς ὃν δαπανᾷ, ἵνα διέλθῃ τὴν κάθετον ΑΒ, λόγον ἔχει, ὃν τὸ μῆκος ΑΘ τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτοῦ ὕψος ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ γὰρ σῶμα, διανύον ἅπαν τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ, κάτεισι τῷ ὄντι πᾶσαν τὴν κάθετον ΑΒ, ἐν ᾧ χρόνῳ διελεύσεται ὁριζοντίως τὴν παράλληλον ΘΒ = Αν· ἀλλὰ τὸ μέρος τῆς ΑΒ ἐπὶ τῆς ΑΘ διατρεχόμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ, τὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυόμενον, λόγον ἔχει, ὃν ἡ σχετικὴ βαρύτης πρὸς τὴν ἀπόλυτον (199)· ἐὰν ἄρα ΑΘ διπλῆ ᾖ τῆς ΑΒ, τὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυσθὲν μέρος τῆς ΑΘ, ἥμισυ ἔςαι τοῦ διανυσθέντος μέρους τῆς ΑΒ· δεήσει ἄρα αὐτῷ χρόνου διπλοῦ, ἵνα διέλθῃ ὅλην τὴν ΑΒ ἐπὶ τῆς ΑΘ, ἐὰν ᾖ ΑΘ = 2ΒΑ· ὡσαύτως δεήσει χρόνου τριπλοῦ, ἐὰν ἡ ΑΘ = 3ΑΒ· κ. ἐν γένει ὁ χρόνος, ὃν δαπανᾷ τὸ κινητὸν, ἵνα διανύσῃ τῆς ΑΘ μέρος ἴσον τῷ ὕψει ΑΒ, πρὸς τὸν χρόνον, ὃν δαπανᾷ κατιὸν αὐτὸ τὸ ΑΒ κατὰ κάθετον, ἐςὶν ὡς τὸ μῆκος τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτοῦ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

203. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οἱ δαπανώμενοι χρόνοι μέχρις ἂν τὸ σῶμα ἀφίκηται ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου διὰ διαφόρων

ἐπιπέδων ΑΘ, ΑΗ, κτ. (σχ. 96) τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ ἐχόντων, ἔσονται ὡς τὰ ἐπίπεδα.

204. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ ἔσεται ἡ αὐτή, τότε κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ διελθόντος, καὶ τὴν ΑΒ κατελθόντος κάθετον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ προσκτηθεῖσα ταχύτης ἐπὶ τῆς ΑΘ ἐν ἑκάστῳ λεπτῷ ἐστὶ τυχὸν ὑποτριπλάσιος τῆς ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἣν ἡ ΑΘ = 3ΑΒ (198)· ἄρα ἐν ὡρισμένῳ τινὶ χρόνῳ τὸ ἄθροισμα τῶν προσκτηθεισῶν ταχυτήτων ἐπὶ τῆς ΑΘ ὑποτριπλάσιον ἔσται τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐν τῇ ΑΒ ταχυτήτων· ἀλλ' ὡσαύτως ὁ ἐπὶ τῆς ΑΘ χρόνος ἐστὶ τριπλάσιος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ (202)· ἐπεὶ δὲ ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι (148)· τὸ ἄρα πρῶτον ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων, ὃ ἦν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ $\frac{1}{3}$ τοῦ δευτέρου, ἰσωθήσεται αὐτῷ ἐν χρόνῳ τριπλασίῳ· ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

205. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν σώματα κατίωσιν ἐξ ἐπιπέδων κεκλιμένων (σχ. 98), τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΑΖ, τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχόντων· α΄. ἴσην ἕξουσι ταχύτητα καταβάντα κατὰ τὰ Δ, Γ, Ζ· β΄. ἴσην ἕξουσι ταχύτητα ἐν τοῖς σημείοις π, ξ, ρ, τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων τοῖς ἀντιστοιχοῦσι τῷ αὐτῷ ὕψει Ατ.

206. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἅπαν σῶμα κατιὸν διὰ πολλῶν κεκλιμένων ἐπιπέδων ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ (σχ. 99), κατὰ τὸ Ε γενόμενον, τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα, ἣν ἂν σχοίη κατελθὸν εἰς τὸ Β διὰ τῆς καθέτου ΑΒ· ἐν γὰρ τῷ Γ τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα, ἣν καὶ ἐν τῷ Ζ, ἐν δὲ τῷ Δ, ἣν καὶ ἐν τῷ Θ, τέλος δὲ ἐν τῷ Ε, ἣν καὶ ἐν τῷ Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῆς διὰ καμπύλων κινήσεως.

207. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶν σῶμα, τὰ κοῖλα φερόμενον παντὸς πολυγώνȣ, ἐν τῷ συναντᾷν ἑκάςῃ πλευρᾷ ἀπολέσει ποσότητα κινήσεως, ἐμφαινομένην ὑπὸ τȣ̃ πλαγίȣ ἡμιτόνȣ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῶν δύω πλευρῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Κεκτήσθω γὰρ τὸ σῶμα, μετὰ τὸ τὴν ΑΒ (Σχ. 100) πλευρὰν διελθεῖν, δύναμιν ἡντιναȣ̃ν, ἣν ἐμφαινέτω ἡ ΒΓ, μέρος ȣ̓̃σα τῆς ΑΒ προεκβεβλημένης· ἐν ᾧ ȣ̃ν τὸ κινητὸν συμβάλῃ τῇ ΒΖ πλευρᾷ κατὰ τὸ Β, ἡ δύναμις ΒΓ, ἅτε πλαγία τῇ ΒΖ, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς συγκειμένη ἐκ τῆς δυνάμεως ΒΕ, παραλλήλȣ τῇ ΒΖ, καὶ τῆς ΓΕ, καθέτȣ τῇ ΒΖ (138)· ἀπολέσει ȣ̃ν ἀναγκαίως πᾶσαν τὴν δύναμιν ΓΕ, διὰ τὴν ἀντίςασιν τȣ̃ ἐπιπέδȣ ΒΖ, καὶ μόνη περιέςαι αὐτῷ ἡ ΒΕ· ἐὰν ȣ̃ν, κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαςήματι δὲ τῷ ΒΓ, γραφῇ τόξον τὸ ΓΤ, ἡ ΕΤ ὑπεροχὴ ἔςαι τῆς ΒΓ ὑπὲρ τὴν ΒΕ· ἐμφανεῖ ἄρα αὕτη, ὃ ἀπώλεσε τὸ κινητὸν, προσβαλὸν τῇ ΒΖ πλευρᾷ· ἀλλὰ τὸ ΕΤ ἐςι πλάγιον ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΓΒΖ γωνίας (Γεωμ. 492)· ἄρα. Ο. Ε. Δ.

208. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐς ὃ ἂν ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία εἴη πεπερασμένη, ἡ διαφορὰ ΕΤ, ᾗ διαφέρει ἡ ΒΓ τῆς ΒΕ, ἢ τὸ πλάγιον ἡμίτονον ταύτης τῆς γωνίας, ἔςαι ποσότης πεπερασμένη· ȣ̓̃ν τὸ σῶμα, ἀπαντῶν ἑκάςῃ πλευρᾷ, ἀπόλλυσιν ἀεὶ ποσὸν πεπερασμένον τῆς ἑαυτȣ̃ κινήσεως.

209. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία ἀπειροςὴ, τὸ πλάγιον ἡμίτονον ἔςαι ἀπειροςὸν δευτεροταγές (*). τὸ ἄρα σῶμα ἀπολέσει μέρος τῆς ἑαυτȣ̃ κινήσεως, ὃ ἔςαι $\frac{1}{\infty}$ δευτεροταγές· ἄρα ἡ κίνησις μενεῖ ἡ αὐτή (Συμβ. Λογ. 528).

210. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐν καμπύλῃ πᾶν σῶμα, ἀφαιρȣμένης αὐτȣ̃ τῆς βαρύτητος, τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἕξει ἐν ἑκάςῳ σημείῳ τῆς καμπύλης, ϗ μετὰ πᾶσαν τὴν περιαγωγήν· ἡ γὰρ καμπύλη νοεῖται ὡς πολύγωνον κανονικὸν, ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν ϗ γωνιῶν ἀπειροςῶν συγκροτȣμένον (Γεωμ. 172)· τὸ σῶμα ἄρα ἐν ἑκάςῃ γωνίᾳ ἀπολέσει τῆς ἑαυτȣ̃ κινήσεως ἀπειροςὸν δευτεροταγές· τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν ἔςαι $\infty \cdot \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$, ἀπειροςὸν πρωτοταγές· ἡ ἄρα κίνησις ἔςαι ἡ αὐτὴ, ϗ δὴ ϗ ἡ ταχύτης ἐν ἑκάςῳ σημείῳ τῆς καμπύλης, ϗ μετὰ πᾶσαν τὴν περιαγωγήν.

211. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Πᾶν σῶμα, κατὰ τὴν ἑαυτȣ̃ βαρύτητα διελθὸν καμπύλην πᾶσαν τὴν ΑΒΓ (σχ. 101), ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἂν ἐκτήσατο, κατελθὸν ἐκ τȣ̃ αὐτȣ̃ ὕψȣς τὴν κάθετον ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Κατερχέσθω γὰρ πρῶτον τὴν κοίλην καμπύλην ΑΒ· νοείσθω δὲ συγκειμένη ἐξ ἐλαχίςων ἐπιπέ-

---

(*) Ἔςι μὲν γὰρ αὐτȣ̃ τύπος ὁ $\frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha}$ (Τ. Ψ. Γ. 238)· ἐπεὶ δὲ, τȣ̃ τόξȣ ἀπειροςȣ̃ ὄντος, ȣ̓δὲν ἧττόν ἐςιν, ᾗ δῆλον, ἀπειροςὴ ϗ ἡ υ· ἄρα $\upsilon = \frac{1}{\infty}$, ϗ $\upsilon^2 = \frac{1}{\infty^2}$, ϗ $\frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} = \frac{\frac{1}{\infty^2}}{2\alpha} = \frac{1}{\infty^2} : \frac{2\alpha}{1} = \frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha\infty^2}$· ἄρα κτλ.

δων κεκλιμένων ἀπειραρίθμων τῶν Αμ, μν, κτ. διελθὸν γὰρ τὴν Αμ, κτήσεται τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν κτήσαιτ' ἂν, διελθὸν τὴν Αχ (204)· διελθὸν δὲ τὴν μν ἕξει καινὴν ταχύτητα ἴσην τῇ χτ = μο, ϗ ἑξῆς οὕτως· κατελθὸν ἄρα εἰς τὸ Β ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἂν κτήσαιτο κατελθὸν τὴν κάθετον ΑΔ· ἐντεῦθεν ἓν κατερχέσθω αὖθις τὰ κοῖλα τῆς ΒΓ· διελθὸν τοίνυν τὴν Βς, κτήσεται ταχύτητα, ἣν ϗ τὴν Δξ = ΒΠ· ἀλλὰ τῶν γωνιῶν τῆς καμπύλης οὐσῶν ἀπειροστῶν, ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ ἥκιστα ἐλαττωθήσεται (210)· ἕξει ἄρα τὴν αὐτὴν ταχύτητα διελθὸν τὴν ΒΓ, ἣν ἐκτήσατ' ἂν, διελθὸν τὴν ΔΓ· ἄρα τὸ κινητὸν κτ. Ο. Ε. Δ.

212. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πᾶν σῶμα, κατερχόμενον διὰ καμπύλης τῆς ΑΒΓ, ἕξει κατὰ τὴν ἑαυτοῦ βαρύτητα τοσαύτην ταχύτητα, ὅσην ἀπολέσει, ἀνερχόμενον μέχρι τοῦ Α διὰ τῆς καμπύλης ΓΘΑ, εἴγε ἡ βαρύτης ἐπιβραδύνει τοσοῦτον τὴν ταχύτητα ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Α, ὅσον αὐτὴν ἐπαύξει ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ (190)· ἄρα, ἀφαιρεθείσης ἁπάσης ἄλλης αἰτίας, πᾶν σῶμα, κατελθὸν ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ διὰ τῆς ἑαυτοῦ βαρύτητος, ἀνελεύσεται αὖθις ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Α, ϗ ἐπαναλήψεται οὕτω τὰς ἑαυτοῦ περιόδους ἐπ' ἄπειρον.

213. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν ληφθῶσι πρὸς τὸ δοκοῦν ἀντικείμενα σημεῖα μ, μ', ν, ν', κτ· τὸ κινητὸν ἐν τοῖς ἀντιθέτοις σημείοις τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα· ὅσῳ γὰρ αὐξήσει ἡ βαρύτης τὴν ταχύτητα ἐκ τοῦ μ μέχρι τοῦ Γ, τοσούτῳ αὐτὴν ἐλαττώσει ἐκ τοῦ Γ μέχρι τοῦ μ.

214. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἀφ' οὑτινοσοῦν σημείου τὸ σῶμα πέσῃ, τοῦ Β φέρε, α΄. ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα μέ-

χρι τῦ Γ, ἣν ἂν σχοίη πεσὸν ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τῦ Γ· β΄. ἀνελεύσεται εἰς τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον ὕψος υ.

215. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐὰν σῶμα κινέμενον καταγράψῃ τόξον ὅ,τι δήποτε τὸ νΒ, ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατ' ἂν, διελθὸν τὸ ἀντίστοιχον τῆς καθέτε μέρος τΔ.

216. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐὰν σῶμα ἐκ τῦ Α κατέρχηται διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ, αἱ αὐτῦ ἀλληλοδιάδοχοι ταχυτῆτες ἐν δυσὶ σημείοις Β, Γ, ἔσονται ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ὕψεων ΑΔ, ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰ γὰρ τὸ σῶμα κατήρχετο διὰ τῆς ΑΓ, ἡ αὐτῦ ταχύτης ἐν τῷ Δ πρὸς τὴν αὐτῦ ἐν τῷ Γ, εἴη ἂν ὡς $\sqrt{}$ΑΔ : $\sqrt{}$ΑΓ (153)· ἀλλὰ κατερχομένε διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ, αἱ ταχύτητες αὐτῦ ἐν δυσὶ σημείοις Β, Γ, ἔσονται αἱ αὐταὶ ταῖς ἐν τοῖς Δ, Γ, εἰ κατήρχετο διὰ τῆς ΑΓ καθέτε (214)· ἄρα αἱ ταχύτητες ἐν τοῖς Β, Γ, ἔσονται ὡς $\sqrt{}$ΑΔ : $\sqrt{}$ΑΓ. Ο.Ε.Δ.

217. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ ταχύτης, ἣν κτᾶται πᾶν σῶμα, κατιὸν διὰ διαφόρων τόξων, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν κατ' αὐτὰ ὕψεων.

218. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἵν' ἓν σώματι ἐνεγείρωμεν ταχυτῆτα τὴν ζητεμένην ἐν ἀριθμοῖς, ἵνα φέρε διέλθῃ πόδας 2 ἐπὶ λεπ. δευτ. ἑνός· α΄. ζητείσθω, καθ' ὃν εἴρηται τρόπον, τὸ ὕψος, ἀφ' ὃ κατελθεῖν ἀνάγκη εἰς πρόσκτησιν ταχυτῆτος 2 ποδῶν (186)· β΄. ἐπὶ καθέτε τινὸς μετηνέχθω τῦτο τὸ ὕψος, ὃ ἔστω τὸ ΔΓ· γ΄. ἐξαρτηθὲν τὸ σῶμα σχοίνε προσδεδεμένε τῷ Α, ὑψέσθω ἕως τῦ Β πέρατος τῦ τόξε ΒΓ· πίπτον ὂν ἐκ τῦ Β ἐπὶ τὸ Γ, κτήσεται τὴν ζητεμένην ταχύτητα.

219. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἐπὶ δύω ὁμοίων σχημάτων

ΑΒΓ, αβγ, αἱ ἀθροιζόμεναι ταχύτητες ἐκ τόξων ὁμοίων εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διαμέτρων.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ΑΒΓ, ἡ ἐπὶ τῦ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ Γ ἐστιν ὡς $\sqrt{ΑΔ} : \sqrt{ΑΓ}$· ἀλλ' ἐν τῷ αβγ, ἡ ἐν τῷ β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ γ ἐστιν ὡς $\sqrt{αβ} : \sqrt{αγ}$· ἄρα ἡ ἐν τῷ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ β ὡς $\sqrt{ΑΔ} : \sqrt{αδ}$ (Γεωμ. 327)· ἀλλαμὴν ΑΔ : αδ : : ΑΓ : αγ (Γεωμ. 382)· ἄρα ἡ ἐν τῷ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ β, ὡς $\sqrt{ΑΓ} : \sqrt{αγ}$. Ο.Ε.Δ.

220. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐν δυσὶν ὁμοίοις κυκλικοῖς τόξοις, αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων.

221. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει οἱ χρόνοι εἰσὶν ὡς αἱ ταχύτητες (185)· ἄρα ἐν τοῖς κυκλικοῖς ὁμοίοις τόξοις οἱ χρόνοι εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων.

222. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐπεὶ τὰ ὅμοια τόξα ὁμοίων σχημάτων πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς τὰ ὅλα σχήματα· ἄρα αἱ ταχύτητες, καὶ δὴ καὶ οἱ χρόνοι, γενικῶς μὲν ἐπὶ πάντων τῶν ὁμοίων σχημάτων, εἰδικώτερον δὲ ἐπὶ τῶν κύκλων, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων· καὶ ἐν ὁμοίοις τόξοις, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τόξων. (Γεωμ. 398)

223. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸν χρόνον τῆς καθόδε σώματος τῇ βαρύτητι κατιόντος δι' ὁτινοσῦν κυκλοειδῦς τόξυ τῦ κΑ (σχ. 102).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ηΔ κάθετος τῇ ΒΑ διαμέτρῳ τῦ γεννήτορος κύκλυ, καὶ ἐπὶ διαμέτρυ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΔΝΑ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ἐν τῷ σχήματι καταφαινομένων ἄλλων εὐθειῶν, γενέσθω ἡ διάμετρος $ΑΒ = 2α$, καὶ $ΔΑ = 2ρ$, καὶ $ΔΠ = χ$, καὶ ἑπομένως $\mathrm{A\Pi} = 2\rho - \chi$, καὶ $\Pi\pi = \delta\chi = \zeta\mu$, καὶ ὁ χρόνος, ὃν δαπανήσει τὸ σῶμα, ἵνα διέλθῃ τὸ ἀδιόριστον τόξον ΜΑ, $= \kappa$, ὁ δὲ, ὃν δαπανήσει, ἵνα διέλθῃ τὸ Μμ, $= \delta\kappa$· ἡ δὲ ταχυτὴς, ἣν κτᾶται τὸ σῶμα, κατιὸν τὸ τόξον ηΜ, οὖσα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ΔΠ (217), ἐστὶν $= \sqrt{\chi}$· ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς κυκλοειδοῦς ἀπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ χορδῇ ΑΖ (Ὑψ. Γ. 335. Τόμ. Γ΄.)· τὰ τρίγωνα Μζμ, ΠΖΑ εἰσὶν ὅμοια (Γεωμ. 220. Πόρισμ. Γ΄. Τόμ. Β΄.)· ὅθεν ἡ ἀναλογία $\mathrm{M}\mu : \mu\zeta :: \mathrm{ZA} : \mathrm{\Pi A}$· ἀλλ' ἐστι διὰ τὴν τοῦ κύκλου ἰδιότητα $\mathrm{AB} : \mathrm{AZ} :: \mathrm{AZ} : \mathrm{A\Pi}$ (Γεωμ. 552. Τόμ. Γ΄.) ἄρα $\mathrm{AB} : \mathrm{ZA}$, ἢ $\mathrm{ZA} : \mathrm{A\Pi} :: \sqrt{\mathrm{AB}} : \sqrt{\mathrm{A\Pi}}$ (Συμβ. Λογ. 270. Τόμ. Α΄.)· ἄρα $\mathrm{M}\mu : \mu\zeta :: \sqrt{2\alpha} : \sqrt{(2\rho - \chi)}$· ἄρα $\mathrm{M}\mu = \dfrac{\delta\chi\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{(2\rho - \chi)}}$, ἀντικαθισαμένης τῆς κατὰ τὴν μζ δυνάμεως, ἀλλὰ τοῦ μὲν χρόνου, καθ' ὃν διελεύσεται τὸ σῶμα τὸ Μμ, ἐμφαινομένου διὰ δκ, τῆς δὲ ταχύτητος διὰ $\sqrt{\chi}$, ἔσται $\mathrm{M}\mu = \delta\kappa\sqrt{\chi}$ (107), ἢ $\delta\kappa = \dfrac{\mathrm{M}\mu}{\sqrt{\chi}}$· ἀντικαθισαμένης ἄρα τῆς τοῦ Μμ δυνάμεως, $\delta\chi = \dfrac{\delta\chi\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{(2\rho\chi - \chi\chi)}} = \dfrac{2\rho . \delta\chi\sqrt{2\alpha}}{2\rho . \sqrt{(2\rho\chi - \chi\chi)}}$· ἀλλὰ τὸ τοῦ τόξου ΔΝ ἀπειροστὸν Νν ἐστὶν $= \dfrac{\rho\delta\chi}{\sqrt{(2\rho\chi - \chi\chi)}}$ (Ἀπειρ. 256)· ἄρα $\delta\kappa = \dfrac{\delta . \Delta\mathrm{N} . 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον ἐστι $\kappa = \dfrac{\Delta\mathrm{N} . 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$, τύπος τοῦ ζητουμένου χρόνου, ὃν τὸ σῶμα δαπανήσει ἐν τῷ διατρέχειν τὸ τόξον κΜ.

224. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν κ σημαίνῃ τὸν χρόνον τὸν δαπανηθησόμενον ἐν τῷ τόξῳ ηΑ, τὸ τόξον ΔΝ ἀποκαθίσταται ἡμιπεριφέρεια ΔΝΑ, καὶ τηνικαῦτα ἔσται $\kappa = \frac{\Delta N A \,.\, 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$· ἐπεὶ τοίνυν $2\sqrt{2\alpha}$ ἐστὶ ποσότης ἀμετάτρεπτος, ὁ χρόνος κ ἔσται ἐν τῷ λόγῳ $\frac{\Delta N A}{2\rho} = \frac{\Delta N A}{\Delta A}$. ὡσαύτως ὁ χρόνος ὁ δαπανηθησόμενος ἐν τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΓΑ ἔσται ὡς $\frac{BZA}{BA}$· τοιγαροῦν οἱ χρόνοι οἱ δαπανώμενοι ἐν τῇ κινήσει σωμάτων φερομένων διὰ παντοίων κυκλοειδοῦς τόξων εἰσὶν ἐν λόγῳ, ὃν ἔχει κυκλικὴ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἑαυτῆς διάμετρον· εἰσὶν ἄρα ἰσάλληλοι, τοῦτ᾽ ἔστι, πᾶν σῶμα, φερόμενον διὰ κυκλοειδοῦς δυνάμει τῆς ἑαυτοῦ βαρύτητος ἐν μέσῳ ἀμοιροῦντι ἐνστάσεως, ἀφικνεῖται εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον Α, κἂν ἐκ τοῦ Γ, κἂν ἐκ τοῦ Μ, κινεῖσθαι ἄρξηται.

225. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπειδὴ ὁ τῆς διὰ τοῦ τόξου κΑ καθόδου χρόνος ἐστὶ $\kappa = \frac{\Delta N A \,.\, 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$, ἔσται 2ρ : $\Delta N A :: 2 \,.\, \sqrt{2\alpha} : \kappa$· ἀλλὰ $2\sqrt{2\alpha} = \frac{2\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}}$ (*)· ἄ-

---

(*) Ἔστι γὰρ $\frac{2\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}} =$

$$\frac{\sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}} = \frac{\sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{1} : \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \frac{\sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{1} \times$$

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2 \,.\, \sqrt{2\alpha} \times \sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2 \,.\, \sqrt{2\alpha}}{1} = 2 \,.\, \sqrt{\alpha}.$$

ρα $2\rho : \Delta N A :: \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}} : \varkappa$· ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$ ἐμφαίνει τὸ ἥμισυ τῆς ταχυτῆτος, ἣν σῶμα κτήσαιτ' ἂν καταβαῖνον τὴν διάμετρον ΒΑ (153)· ἐὰν ἄρα πᾶσα ἡ ταχυτής, ἢ ὁ χρόνος (153) κληθῇ Κ, ποριωθήσεται $2a = K \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2a}$, καὶ $K = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$· ἄρα ἡ ἤδη ἐκτεθειμένη ἀναλογία ἀντικαταστάσει ἔσται $2\rho : \Delta N A :: K : \varkappa$, εἴτ' οὖν „ὁ χρόνος ὁ δαπανώμενος διὰ παντὸς τόξου κυκλοειδοῦς πρὸς τὸν διὰ τῆς διαμέτρου τοῦ γεννήτορος κύκλου, „ἐστὶν ὡς κυκλικὴ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἑαυτῆς διάμετρον·" τοιγαροῦν οἱ χρόνοι οὗτοι εἰσὶν ἐν ἀμετατρέπτῳ λόγῳ· τοῦθ' ὅπερ, εἰ μὴ προῄδειμεν, ὑπεδήλωσεν ἄν, ὡς ἅπαντα τὰ τόξα τῆς κυκλοειδοῦς τὰ ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενα διανύονται ἐν ἴσοις χρόνοις.

226. ΟΡΙΣΜΟΣ. Καμπύλαι ταυτόχρονοι καλοῦνται, ὧν τὰ τόξα τά τε μεγάλα καὶ τὰ μικρὰ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ὑπὸ τῶν τῇ ἰδίᾳ βαρύτητι ἐν μέσῳ ἐνστάσεως ἀμοίρῳ φερομένων σωμάτων διανύονται· ἡ ἄρα κυκλοειδὴς ἐστι καμπύλη ταυτόχρονος.

227. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν καμπύλην τῆς ταχίστης καθόδου, εἴτ' οὖν τὴν ὀλιγιστόχρονον ΑΜ (σχ. 103), δι' ἧς σῶμα τὸ Α ἐκ τοῦ Α κάτεισιν εἰς τὸ Μ, ἐν ὅσῳ οἷόν τε βραχυτάτῳ χρόνῳ, τοῦ μέσου ἀμοιροῦντος ἐνστάσεως.

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν ἀλλήλαις προσεχέσταται αἱ τεταγμέναι ΠΜ, πμ, Νν, καὶ αἱ ἄλλαι γραμμαί, ὡς τὸ σχῆμα παρίστησι· καὶ ἔστω $A\Pi = \chi$, καὶ $\Pi M = \upsilon$· ἔχου