ὑποτεθῇ ἡ γωνία Β, εἴτ' οὖν $= 180° - \frac{1}{\infty}$· αἱ δύω φοραὶ ΒΔ, ΒΕ ἀντίθετοι ἔσονται, ϗ τὸ πρὸς τὸ Π ἀποτέλεσμα ἔσεται $= 0$.

137. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Δυνατὸν δὲ, ὅσας ἄντις βούληται, συνθέσθαι δυνάμεις, εἰ μόνον ἀλλήλας τέμνοιεν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἔστωσαν γὰρ τέσσαρες δυνάμεις (σχ. 89 Α) ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ἀλλήλας τέμνουσαι κατὰ τὸ Α· οὐκοῦν τὸ μὲν ἐκ τῶν δύω ΑΒ, ΑΓ ἀποτέλεσμα, συμπληρωθέντος ἐπ' αὐτῶν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΘ, ἔσαι ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ΑΘ, ἧς ὡς ἁπλῆς ἐκληφθείσης δυνάμεως, ἐπ' αὐτῆς ϗ τῆς ἐφεξῆς ΑΔ συσταθέντος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΘΔΗ, ἡ αὐτοῦ διαγώνιος ΑΗ τὴν ἐκ τῶν ΑΘ, ΑΔ, ϗ δὴ ἐκ τῶν τριῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἐμφανεῖ σύνθετον δύναμιν· ἡ δὲ ΑΤ τοῦ τρίτου παραλληλογράμμου ΑΗΕΤ σημανεῖ τὴν ἐκ τῶν τεσσάρων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ συγκροτουμένην.

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Τὐναντίον δὲ πᾶσαν ἁπλῆν δύναμιν, ϗ ἁπλῆν κίνησιν, θεωρεῖν δυνάμεθα ὡς σύνθετον ἐκ δύω δυνάμεων ϗ κινήσεων· ἔστω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ. 90.), ἐμφαίνουσα δύναμιν ϗ κίνησιν ἡντιναοῦν, ϗ ἐκ τοῦ κατ' αὐτὴν πέρατος ἤχθωσαν ὡς ἔτυχε δύω εὐθεῖαι, ὡς εἶναι δι' αὐτῶν παραλληλόγραμμον συμπληρῶσαι τὸ ΑΒΓΔ· οὐκοῦν ἡ ΑΒ δύναμις ἀναλέλυται εἰς δύω τὴν ΑΓ, ϗ ΑΔ, ἃς ὡς συνθετικὰς τῆς ΑΒ ἐκλαβεῖν δυνάμεθα.

Ἐπεὶ δὲ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΑΒ μέγεθος ἔχουσα πεπερασμένον, ποδὸς φέρε, ἀπείρων παραλληλογράμμων διαγώνιος δύναται εἶναι, διαφόρων τήν τε γωνίαν Α, ϗ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, οὐκ ἔστιν ἄρα ἁπλῆ δύναμις ϗ κίνησις ὡρισμένη, ἣν ἐ δυνάμεθα ἀπειραχῶς εἰς δύω ἀναλῦσαι δυνάμεις.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Ἡ ἀνάλυσις τῆς κινήσεως αὔξει τὴν ποσότητα· ὃ ἀναγκαίως ἕπεται ἐκ τέτε, ὅτι σμικρύνει αὐτὴν, ὡς εἴδομεν, ἡ σύνθεσις· ἀναλυομένης γὰρ τῆς ΑΒ δυνάμεως, εὑρίσκονται δύω αἱ ΑΓ, ΑΔ ὧν τὸ ἄθροισμα ἐςὶ μεῖζον τῆς ΑΒ· ἐκ δὲ τῶν εἰρημένων (135) δῆλον, ὅτι τοσέτῳ μᾶλλον ἡ ἀνάλυσις αὔξει τὴν ποσότητα, ὅσῳ μείζων ἂν εἴη ἡ ὑπὸ τῶν φορῶν περιεχομένη γωνία Α.

140. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ θεωρία τῆς συνθέσεως ϗ ἀναλύσεως τῶν δυνάμεων χρησιμωτάτη ὑπάρχει τῇ Φυσικῇ, ἀδιαλείπτε ἔσης τῆς χρήσεως αὐτῆς ἐν τοῖς περί τε τῶν ἐρανίων, ϗ τῶν γηΐνων σωμάτων· φανήσεται γὰρ ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ὅτι τὰ ἐράνια σώματα ἰδιότητι δύω δυνάμεων, τῆς μὲν ὠθέσης αὐτὰ πρὸς τὸ τῆς κινήσεως αὐτῶν κέντρον, τῆς δ᾽ ἀπ᾽ αὐτῦ ἀποσπώσης, περιάγεται, ἀναγκαζόμενα ἔτω φέρεσθαι ἀεὶ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμε, συνιςαμένε κατὰ τὸν λόγον τῶν δυνάμεων τέτων ϗ τῶν κατ᾽ αὐτὰ φορῶν· ἡ γενικὴ ἀλλήλων συνεπίδρασις τῶν ἐρανίων σωμάτων, τελεμένη ἀεὶ πλαγίως τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν καταγραφομένης καμπύλης, ἀεὶ ἀναλύεται· αἱ τῆς θαλάσσης παλίῤῥοιαι γίνονται μάλιςα διὰ τῆς ἀναλύσεως τῆς κινήσεως· πάντα τὰ γήϊνα σώματα κατὰ μίαν τινὰ φορὰν προβαλλόμενα πλαγίως ἢ παραλλήλως τῷ ὁρίζοντι φέρονται ἀεὶ ὑπὸ δύω δυνάμεων, τῆς μὲν τῷ ὁρίζοντι ἔσης καθέτε, ἥ ἐςιν ἡ βαρύτης, τῆς δὲ πλαγίας ἢ παραλλήλε τῷ ὁρίζοντι, ἣ αὐτὰ καταναγκάζει εἰς κίνησιν, κἂν τέτε ἐν ἑκάςῳ ἀκριβεῖ γράφεσι διαγώνιον πα-

ραλληλογράμμου συνισαμένου ἐπ' αὐτῶν τῶν δύω δυνάμεων, καὶ τῶν κατ' αὐτὰς φορῶν.

141 Οὐκοῦν νηὸς πλεούσης ἐνεργείᾳ τῶν πνευμάτων κατὰ φορὰν ὁριζόντιον, ἐὰν ἐκ τῆς τοῦ ἱσοῦ κορυφῆς ναύτης ὀλισθήσας πέσῃ, οὐκ ἐν τῇ θαλάσσῃ καταβυθισθήσεται, ἀλλὰ πρὸς τῇ τοῦ ἱσοῦ βάσει κατακείσεται, διὰ τὸ διαδραμεῖν τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ συνισαμένου ἐπὶ τῶν φορῶν τῆς τε ὁριζοντίου καὶ τῆς καθέτου κινήσεως· ὑποτεθείσθω οὖν ὁ ναύτης πίπτων ἀφ' ὕψους ποδῶν 60, καὶ δὴ μόνῃ τῇ οἰκείᾳ βαρύτητι καταφερόμενος, εἰ ἡ ναῦς ἠρεμοίη, καταπεσεῖται πρὸς τῇ τοῦ ἱσοῦ βάσει μετὰ δύω λεπτὰ δεύτερα, ὡς ὕστερον φανήσεται· ὑποτεθείσθω δὲ κινουμένη ἰσοταχῶς καὶ δυσὶ δευτέροις λεπτοῖς διανύουσα πόδας 100· εἰ οὖν ὁ ναύτης μόνῃ τῇ οἰκείᾳ ἑαυτοῦ δυνάμει κατεφέρετο, πάντως ἂν κατέπιπτεν ἐν τοῖς ὕδασι πόῤῥω τοῦ ἱσοῦ πόδας 100· ἐπεὶ δὲ πρὸς τῇ βάσει τοῦ ἱσοῦ καταπίπτει, ἀναγκαίως διατρέχει τὴν διαγώνιον ἐπιμήκους ὀρθογωνίου, οὗ ἡ μὲν ὁριζόντιος πλευρὰ τὴν τῆς κινήσεως ἐμφαίνει τοῦ ναύτου δύναμιν τὴν τῇ νηῒ κοινήν, δι' ἧς ἔσπευδε διανύσαι ἅμα τῇ νηῒ 100 πόδας ἐν δυσὶ δευτέροις λεπτοῖς, ἡ δὲ τῷ ὁρίζοντι κάθετος τὴν δύναμιν τῆς βαρύτητος, καθ' ἣν ὁ ναύτης ἔσπευδε διανύσαι διὰ καθέτου κινήσεως 60 πόδας ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι.

Οὐκοῦν θεατὴς ἱστάμενος ἐν νηῒ ἠρεμούσῃ ὄψεται τὸν ἐν τῇ κινουμένῃ νηῒ καταπίπτοντα ναύτην οὐχὶ πρὸς ὀρθὰς καταφερόμενον, ἀλλὰ κατὰ φορὰν πλαγίαν τῷ ὁρίζοντι, καὶ γράφοντα διαγώνιον παραλληλογράμμου τοῦ ἐπί τε τῆς ὁριζοντείου καὶ τῆς καθέτου τῶν κινήσεων.

142. Ἡ ἐπὶ τοῦ ἐν νηῒ κινουμένῃ καταπίπτοντος ἀνάπτυξις ἐφαρμοσθῆναι δύναται πᾶσι τοῖς γηΐνοις σώμασι

τοῖς κινεμένοις κατὰ πᾶσαν ἄλλην φορὰν, ἢ κάθετον· ἐπεὶ γὰρ πάντα τὰ γήϊνα σώματα εἰσὶ βαρέα, ὡς δειχθήσεται, ἐάν τις δύναμις ἄλλη πλὴν τῆς βαρύτητος κινήσῃ αὐτὰ κατὰ φορὰν ἄλλην πλὴν τῆς καθέτε, ἀχθήσονται ὑπὸ δύω δυνάμεων, ὧν αἱ φοραὶ γωνίαν περιέξεσι, ϗ κινηθήσονται τὴν διαγώνιον τῦ ἐπὶ τῶν δύω φορῶν παραλληλογράμμε.

143. Ῥαδίως κατανοεῖται ἐκ τῶν εἰρημένων, δι' ὅ,τι πλοιάριον, ἑλκόμενον ἐκ θατέρε χείλες ποταμῦ ἐπὶ θάτερον, ἐ φέρεται πρὸς τὸν ἕλκοντα κατ' εὐθεῖαν· εἰσιὸν γὰρ εἰς τὸ ὕδωρ ἀναγκάζεται κινεῖσθαι πρὸς τὰ ῥεῖθρα ὑπ' αὐτῦ τῦ ὕδατος, ϗ ἅμα πρὸς τὸν ἕλκοντα αὐτὸ ἐκ θατέρε χείλες· διατρέχει ἒν τὴν διαγώνιον τὴν ἐπὶ τῶν φορῶν τῶν δύω τούτων δυνάμεων· ἐπεὶ δὲ ἡ κατὰ μῆκος κίνησις ἀεὶ ποικίλλεται, τόπες ἀμείβεσα, ἡ δὲ κατὰ πλάτος τῦ ἕλκοντος ἀεί ἐςιν ἄτρεπτος, ἡ γωνία τῆς φορᾶς ἀεὶ ποικιλθήσεται, ϗ τὸ πλοιάριον, ἀεὶ νέαν διαγώνιον καταγράφειν ἀναγκαζόμενον, ἰχνογραφήσει καμπύλην διὰ τῆς ἑαυτῦ ὁλικῆς κινήσεως περὶ τὴν ἕλκεσαν χεῖρα.

144. Πάντα τὰ γήϊνα σώματα πλαγίως τῷ ὁρίζοντι κινέμενα, ἐπεὶ ἐν ἑκάςῳ ἀκαρεῖ ἡ βαρύτης αὐτῶν καταναγκάζει αὐτὰ πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ὃ ἐςι μόνιμον, ποικιλῦσιν ἀεὶ τὴν γωνίαν τῆς φορᾶς, τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς βαρύτητος ϗ τῆς τῷ ὁρίζοντι πλαγίας κινήσεως· ἀεὶ ἄρα παραβαλεῖν ἔξεςαι τὴν αὐτῶν κίνησιν τῇ τῦ, περὶ ἒ εἴπομεν, πλοιαρίε· ϗ τὸ μὲν τῆς γῆς κέντρον ἀνάλογον ἔςαι πρὸς τὴν δύναμιν τῆς ἑλκέσης χειρὸς, ἡ δὲ δύναμις τῆς πλαγίας κινήσεως πρὸς τὸ ῥέον ὕδωρ· ῥᾷςα τοίνυν κατανοεῖται, δι' ὅ,τι τὰ ἐν τῷ ἀέρι

πλαγίως τῷ ὁρίζοντι κινέμενα σώματα γράφεσι καμπύλας, ὧν ἡ κοιλότης ἔςραπται πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον.

145. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐν τῇ συνθέτῳ κινήσει α'· αἱ δύω συνθετικαὶ δυνάμεις ΤΒ, ΤΓ (σχ. 91) εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ἀντιςρόφως ὥσπερ τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ΒΤΣ, ΓΤΣ τῶν περιεχομένων ὑπ' αὐτῶν τῶν δυνάμεων, ϗ τῆς ἐξ αὐτῶν συντιθεμένης ΤΣ, εἴτ' ἔν ἔςι ΤΒ : ΤΓ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΒΤΣ· β'. ἑκάςη τέτων τῶν δυνάμεων ἔςι πρὸς τὴν συντιθεμένην, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας συνθετικῆς δυνάμεως ϗ τῆς συντιθεμένης, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ἐξ ἀμφοτέρων τῶν συνθετικῶν δυνάμεων, εἴτ' ἔν ΤΒ : ΤΣ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. ΤΒ:ΤΓ : : $\frac{\text{ΤΒ}}{2}$: $\frac{\text{ΤΓ}}{2}$ (Συμ. Λογ. 234)·

ἀλλ' ἐν τῷ ΒΤΣ τριγώνῳ, $\frac{\text{ΤΒ}}{2}$ ἔςιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΤΣΒ γωνίας (Γεωμ. 496), ϗ δὴ ἡμίτονον τῆς ἐντὸς ἐναλλὰξ ΓΤΣ, ϗ $\frac{\text{ΒΣ}}{2} = \frac{\text{ΤΓ}}{2}$ ἔςιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ Β ΤΣ γωνίας· ἄρα ΤΒ : ΤΓ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΒΤΣ.

β'. ΤΒ : ΤΣ : : $\frac{\text{ΤΒ}}{2}$: $\frac{\text{ΤΣ}}{2}$· ἀλλὰ ΤΒ ἔςιν ἡμίτονον τῆς ΒΣΤ, ϗ δὴ τῆς ἐντὸς ἐναλλὰξ ΓΤΣ, ϗ $\frac{\text{ΤΣ}}{2}$ ἔςιν ἡμίτονον τῆς Β, ϗ δὴ τῆς ὑπὸ ΓΤΒ, ἥτις ἐςὶ παραπλήρωμα τῆς Β (Γεωμ. 235)· ἄρα ΤΒ : ΤΣ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ, Ο.Ε.Δ.

146. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐκ τῶν τεσσάρων τέτων,

δύω συνθετικῶν δυνάμεων, καὶ δύω γωνιῶν, περιεχομένων ὑπ' αὐτῶν καὶ τῆς συντιθεμένης, τριῶν δοθέντων ἐν ἀριθμοῖς, τὸ τέταρτον διὰ μεθόδου τῶν τριῶν ῥᾷστα εὑρίσκεται· ἐὰν γὰρ τυχὸν γνωστὰ ὦσιν ἡ ΤΒ, ἡ γωνία ΓΤΣ, καὶ ἡ γωνία ΣΤΒ, εὑρεθήσεται ἐν ἀριθμοῖς ἡ ΤΓ διὰ τῆς ἀναλογίας· ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΒΤΣ : : ΤΒ : χ = ΤΓ.

147. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.** Ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων, μιᾶς τῶν δύω συνθετικῶν δυνάμεων, τῆς συντιθεμένης, τῆς γωνίας, ἣ περιέχεται ὑπὸ τῆς ἑτέρας δυνάμεως καὶ τῆς συντιθεμένης, καὶ τῆς ἐξ ἀμφοτέρων τῶν δυνάμεων περιεχομένης γωνίας, τριῶν δοθέντων ἐν ἀριθμοῖς, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρεθήσεται ἡ τετάρτη· ἐγνωσμέμένων μὲν γὰρ τῆς πλευρᾶς ΤΒ, τῆς γωνίας ΣΤΣ, καὶ τῆς ὅλης γωνίας ΓΤΒ, εὑρεθήσεται ἡ συντιθεμένη ΤΣ ἐκ τῆς ἀναλογίας, ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ : : ΤΒ : ΤΣ· τοὐναντίον δὲ γνωστῶν ὄντων τῆς ΤΣ, τῆς ὑπὸ ΓΤΒ καὶ μιᾶς μερικῆς τῆς ΣΤΣ, εὑρεθήσεται ἡ ΤΒ ἐκ τῆς ἀναλογίας, ἡμ. ΓΤΒ : ἡμ. ΓΤΣ : : ΤΣ : ΤΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ἰσοταχοῦς κινήσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἰσοταχὴς μὲν ἡ κίνησις λέγεται, ὅταν τὸ κινητὸν ἐν ἑκάστῳ ἀκαρεῖ προσκτᾶται βαθμὸν ταχυτῆτος ἴσον, ἰσοβραδὴς δὲ, ὅταν ἐν ἑκάστῳ ἀκαρεῖ ἀποβάλῃ βαθμὸν ταχυτῆτος ἴσον.

148. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.** Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει, αἱ ταχυτῆτες αὔξουσιν, ὡς οἱ χρόνοι.

ΔΕΙΞΙΣ. Κληθέντος 1 τοῦ τῆς ταχυτῆτος βαθμοῦ, ὃν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν τῷ πρώτῳ ἀκαρεῖ, ἐν τῷ δευτέρῳ αὖθις προσκτήσεται 1· καὶ δὴ ἐν τῷ τέλει τοῦ δευτέρου ἕξει δύω ταχυτῆτος· ἐν δὲ τῷ τέλει τοῦ τρίτου προσκτήσεται ὡσαύτως ϗ ἕτερον 1· ϗ δὴ ἔσονται 3, ϗ οὕτως ἑξῆς· ἄρα αἱ ταχύτητες αὔξουσιν, ὡς οἱ χρόνοι· Ο. Ε. Δ.

149. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ ἄρα κινήσει αἱ ταχυτῆτες αὔξουσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πρόοδον ÷ 1. 2. 3. 4. 5 κτ.

150. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει τὰ διατρεχόμενα ἐν ἑκάστῳ τελευτῶντι χρόνῳ διαστήματα αὔξουσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ταχυνέτω τὸ κινητὸν τὴν ἑαυτοῦ κίνησιν ἐν λεπτοῖς 6, ϗ ἐμφαινέτω τοῦτον τὸν χρόνον ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 92) διῃρημένη εἰς ἓξ ἰσάλληλα μέρη Α1 = 12 = 23 κτ. ἀφ᾽ ἑκάστης δὲ διαδοχῆς ἐστάθωσαν κάθετοι 2α, 2β, 3γ κτ, ὡς τὴν μὲν 2β διπλῆν εἶναι τῆς 1α, τὴν 3γ τριπλῆν τῆς 1α κτ.· οὐκοῦν ἐν τοῖς ἑξῆς κειμένοις τριγώνοις Α1α, Α2β, Α3γ κτ. προφανῶς ὁμοίοις, ἐστὶν Α1 : 1α : : α2 : 2β, ἢ Α2 : 2β : : Α3 : 3γ καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐὰν οὖν ἤδη ὑποτεθῇ ἡ μονὰς τοῦ πεπερασμένου χρόνου, τοῦ λεπτοῦ κατὰ τὸ ἤδη προτεθὲν, διῃρημένη εἰς ἄπειρα ἀκαριαῖα λεπτὰ, ϗ δὴ ἡ ταύτην ἐμφαίνουσα εὐθεῖα Α1 εἰς ἄπειρα μέρη ἀπειροστά· ϗ ἐπὶ τούτοις ἐπινοηθῶσι κάθετοι τῇ Α1 ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, παριστάνουσαι ἑκάστη τὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν ἑκάστῳ χρονικῷ ἀκαριαίῳ σημείῳ, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ λεπτόν· ἡ μὲν πρώτη τούτων τῶν καθέτων, ἡ πρώτη ταχυτὴς, ἀπειροστὴ οὖσα, ἔσαι ἡ κορυφὴ τοῦ Αια τριγώνου· πᾶσαι δὲ αἱ ἄλλαι αὐξήσουσι κατὰ τὴν ἄπειρον ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 .... ∞, ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος ∞ σημανθήσεται διὰ τῆς ια βάσεως τοῦ Αια τριγώνου, ὃ ἐμφαίνει τὴν ταχυτῆτα, ἣν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν τελευτῶντος τοῦ πρώτου λεπτοῦ· πᾶσαι δε αἱ κάθετοι καλύψουσι τὴν ἐπιφάνειαν Αια, καὶ ἐμφανοῦσι τὰς ταχυτῆτας, ἃς τὸ κινητὸν προσεκτήσατο ἐν πᾶσι τοῖς ἀκαριαίοις λεπτοῖς, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ λεπτὸν, καὶ δὴ πάντα τὰ διαστήματα, ἃ διήνυσεν ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ (110).

Ἀλλ' ἐρεῖ τις τυχόν· ἑκάστης τῶν ἐφεξῆς εὐθειῶν ὑποτιθεμένης μείζονος, ἢ ἡ πρὸ αὐτῆς, εἴτ' οὖν ἡ ἐμφαίνουσα τὴν ἀκαριαίαν ταχύτητα, ἐναπολειφθήσεται διαστημάτιόν τι τριγωνικὸν ἀκάλυπτον ταῖς εἰρημέναις εὐθείαις· ὑποτιθέμεναι, φέρ' εἰπεῖν, αἱ 1α, 2β ἀπείρως ἀλλήλων ἐγγίζουσαι, καταλείψουσι τὸ αχβ διαστημάτιον ὅλως ἀκάλυπτον, καὶ δὴ τὸ ἄθροισμα πασῶν τούτων τῶν εὐθειῶν οὐ καλύψει πᾶσαν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου Αια· ἀλλὰ α. ἐν τῷ Αια τριγώνῳ οὗ τὸ ὕψος Αι διήρηται εἰς ἄπειρα μέρη, ἡ πρώτη ταχυτὴς, ἣν ἐμφαίνει τὸ βχ, ἔστιν ἀπειροστή· β΄. τὸ ὕψος αχ καὶ αὐτό ἐστιν ἀπειροστὸν, τῶν 1α, 2β προσεχεστάτων ὑποτεθεισῶν· οὐκοῦν τὸ αβχ τρίγωνον γινόμενον ἐκ τοῦ ἀπειροστοῦ βχ, καὶ τοῦ ἀπειροστοῦ $\frac{αχ}{2}$ (Γεωμ. 285 Τόμ. Β΄.) ἔσαι ἀπειροστὸν δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527 Τόμ. Β΄.), ὃ ὡς οὐδὲν λογίζεται πρὸς τὸ πρωτοταγὲς ἀπειροστὸν ὃ καλύπτουσιν αἱ δύω εὐθεῖαι 1α, 2β (Συμβ. Λογ. 529)· δυνατὸν ἄρα εἰπεῖν ὡς πᾶσαι αἱ ταχυτῆτες, καὶ δὴ πάντα τὰ διανυόμενα διαστήματα τα, ἐν ἑκάςῳ ἀκαρεῖ, ϰ ἐν ὅλῳ τῷ λεπτῷ, παρίςανται ἀκριβῶς διὰ τῆς ἐπιφανείας τȣ Αια τριγώνȣ.

Ἐὰν δὲ ὡσαύτως διαιρεθῇ ϰ τὸ δεύτερον λεπτὸν, ϰ δὴ τὸ μέρος 12 τῆς ΑΒ, ϰ ἐπ' αὐτȣ ἐγερθῶσι προσεχέςαται κάθετοι, ϰ αὔξωνται πᾶσαι ἐκ διαδοχῆς τῷ ἀπειροςῷ ποσῷ, ὃ παρίςατο κατὰ τὸ Α, εἴτ' ȣ̓̃ν τῇ πρώτῃ ἀπειροςῇ ταχυτῆτι, αὗται καλύψȣσιν ἀκριβῶς τὸ τραπέζιον 1α2β· ἡ δ' ἐπιφάνεια τȣ̃δε τȣ̃ τραπεζίȣ ἐμφανεῖ ἀκριβῶς τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ταχυτήτων, ἃς ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ, ϰ δὴ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν διανυσθέντων διαςημάτων (148). Κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ϰ τὸ τραπέζιον 23βγ παριςᾷ πάσας τὰς ταχυτῆτας, ϰ δὴ τὰ διανυσθέντα διαςήματα τȣ̃ τρίτȣ λεπτȣ̃, ϰ ȣ̓́τως ἑξῆς.

Ἐὰν ȣ̓̃ν ἤδη ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αθ, βη κτ. παράλληλοι τῇ Αζ, πάντα τὰ τριγωνίδια 1αχ, κτ. ἴσα ἔσονται τῷ τριγώνῳ Αια, ἔχȣσι γὰρ ἕκαςον τὰς ἑαυτȣ̃ πλευρὰς ἴσας ἑκάςην ἑκάςῃ τῶν ἐν τῷ Αια, ϰ δὴ ἰσάλληλα ἔσονται· τȣ̃ ȣ̓̃ν τριγώνȣ Αια παριςῶντος τὸ ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ διανυσθὲν διάςημα, τὸ τραπέζιον 1α2β παραςήσει τρια τȣ́των τῶν τριγώνων, ϰ δὴ διαςήματα 3 ἴσα ἕκαςον τῷ πρώτῳ, διανυσθέντα ἐν τῷ ἐφεξῆς πρώτῳ λεπτῷ· τὸ δὲ 23βγ τραπέζιον ἐμφαίνει τὸ ἐν τῷ τρίτῳ λεπτῷ διανυσθὲν διάςημα ὂν 5, ϰ ἑξῆς ὡσαύτως· ἄρα ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει τὰ διανυόμενα διαςήματα ἐν χρόνοις πεπερασμένοις αὔξȣσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ÷ 1.3.5.7.9. κτ. Ο.Ε.Δ.

151. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τὰ διανυόμενα διαςήματα τελευτώντων τῶν χρόνων, εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τῶν δαπανηθέντων· ἐν γὰρ τῷ 92 σχήμ.

τὸ μὲν πρῶτον λεπτὸν ὁρίζεται παρὰ τῦ τριγώνε Α 1 α· τὸ δ᾽ ἐπὶ τῦ τέλυς τῦ ἐφεξῆς λεπτῦ διανυσθὲν διάςημα ἐμφαίνεται ὑπὸ 4 ἴσων τριγώνων· τὸ δ᾽ ἐς τέλος τῦ τρίτε, ὑπὸ 9 τριγώνων, καὶ ἐφεξῆς ὕτως· τὰ διανυόμενα ἄρα διαςήματα εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα 1, 4, 9, 16, 25 κτ. τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων 1, 2, 3, 4, 5 κτ.

152. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τὰ διανυόμενα διαςήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ταχυτήτων τετράγωνα· ἐν γὰρ τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι (148)· τὰ δὲ διαςήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τετράγωνα· εἰσὶν ἄρα καὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ταχυτήτων (Συμβ. Αλγ. 263)· ἐὰν ὖν κληθῶσι δύω τινὰ διαςήματα δ, Δ ἐν δυσὶ χρόνοις διανυόμενα τοῖς χ, Χ, ἔςαι $\delta : \Delta :: \chi^2 : X^2 :: \tau^2 : T^2$.

153. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐντεῦθεν ἄρα $\chi : X :: \sqrt{\delta} : \sqrt{\Delta} :: \tau : T$, εἴτ᾽ ὖν οἱ χρόνοι, ἢ αἱ ταχυτῆτες, ἔσονται ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διανυομένων διαςημάτων. κληθείσης γὰρ 1 τῆς ταχυτῆτος 1α, τῆς προσκτηθείσης ἐν τῷ τέλει τῦ πρώτυ λεπτῦ, ἡ προσγενομένη ταχυτὴς ἐν τῷ τέλει τῦ ἐφεξῆς λεπτῦ, ἥτις ἐςὶ 2β διπλῆ τῆς 1α, κληθήσεται 2, καὶ 3γ κληθήσεται 3, καὶ ὕτως ἐφεξῆς· ἀλλ᾽ ὕπερθεν μὲν τῆς εὐθείας 1α ὐδὲν ἐςι μόνον τρίγωνον, τέσσαρα δὲ ὕπερθεν τῆς δευτέρας, 9 ὕπερθεν τῆς τρίτης κτ.· οἱ χρόνοι ἄρα, ἢ αἱ ταχυτῆτες 1, 2, 3 εἰσὶν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διανυομένων διαςημάτων 1, 4, 9 κτ.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἵν᾽ ὖν εὑρεθῇ τὸ διανυσθὲν διάςημα δεδομένυ τινὸς χρόνυ τελευτῶντος τετάρτυ τυχὸν λεπτῦ, ληπτέον τὸν ἀπ᾽ αὐτῦ τετράγωνον ἀριθμὸν, εἴτ᾽ ὖν τὸν 16, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

155. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Τὸ ὁλικὸν διάςημα, ὃ διανύει σῶμα ἰσοταχῶς κινέμενον ἐν χρόνῳ ὡρισμένῳ, ἥμισυ. μέν ἐςι τῦ διανυομένυ ὑπὸ σώματος ἰσομερῶς κινυμένυ. ἰσχύει ἴση τῇ, ἣν τὸ ἰσοταχῶς κινέμενον προσκτᾶται. ἐν τῷ τέλει τῦδε τῦ χρόνυ· εἰ γὰρ τὸ κινητὸν ἐν 6 λεπτοῖς εἶχε τὴν ἰσομερῆ ταχύτητα τὴν ἐμφαινομένην ὑπὸ τῆς εὐθείας 6ζ, ἣν ἐκτήσατο ἐν τῷ τέλει τῦ ἕκτυ λεπτῦ, πᾶσαι ὁμῦ αἱ ταχύτητες, ἢ τὰ διανυόμενα διαςήματα, συνιςαῖεν ἂν τὸ ἐντελὲς τετράγωνον Α6πζ, ὃ προφανῶς ἐςι διπλῦν τῦ τριγώνυ Α6ζ.

156. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἐν τῇ ἰσοβραδεῖ κινήσει αἱ τῦ κινητῦ ταχυτῆτες μεθ' ἕκαςον λεπτὸν μειῦνται, κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν μειυμένην πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1· ἐμφανομένης γὰρ τῆς ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ ταχυτῆτος διὰ 6ζ, ἡ ἐφεξῆς ταχυτὴς τῦ ἑπομένυ λεπτῦ ἔςαι 5ε, ἢ 5, ἡ δὲ τρίτη, 4, κτ, ἡ δὲ μετὰ τὸ ἕκτον λεπτὸν, ἔςαι 1α = 1.

157. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἐν τῇ ἰσοβραδεῖ κινήσει τὰ ἐν ἑκάςῳ λεπτῷ διανυόμενα διαςήματα μειῦνται, κατὰ τὴν μειυμένην ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ÷ 11 . 9 . 7 . 5 . 3 . 1· ὑποτιθεμένης γὰρ ἀεὶ τῆς πρώτης ταχυτῆτος 6ζ, τὸ ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ διανυόμενον διάςημα ἐμφανῦσιν 11 τρίγωνα, ἐμπεριεχόμενα τῷ τραπεζίῳ 6ζ5ε· τὸ δὲ διανυόμενον ἐν τῷ ἐφεξῆς, τὰ ἐν τῷ 5ε4β τραπεζίῳ 9 τρίγωνα, κ. ὕτως ἐφεξῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ κινήσεως τῶν βαρέων.

158. **Βάρος** σώματος γήϊνε ἐςὶν ἰδιότης, καθ' ἣν τὸ σῶμα ἐπείγεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς· φανήσεται δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ὡς ἐςὶν ἀνάλογον τῇ μάζῃ τῦ σώματος· αἱ φωναὶ δὲ **βάρος** ἢ **βαρύτης** σχεδόντι συνωνυμῦσι, παρ' ὅσον, ἡ μὲν βαρύτης τὴν ῥοπὴν ἁπλῶς ἐμφαίνει τῦ κατιόντος σώματος, τὸ δὲ βάρος τὸ ἄθροισμα τῶν βαρυτήτων τῶν μορίων, ἐξ ὧν συντίθεται ἡ μάζα τῦ σώματος.

159. **Σταθμὸς** ἡ δύναμίς ἐςιν ἡ ἀντιτιθεμένη σώματι βαρεῖ, ἐφ' ᾧ κωλύσει αὐτῦ τὴν κάθοδον· λέγεται ὅτω σώματι ςαθμὸν ἕλκειν λίτρας τυχὸν, ὅταν ἐν θατέρᾳ πλάςιγγι αὐτῦ τιθεμένε, ἐν θατέρᾳ δέῃ μάζαν λίτρας μιᾶς ἀντιθέσθαι, ἵν' εἶεν **ἰσόςαθμα**.

160. **Βαρύτης εἰδικὴ** σώματος ἐςὶν ἡ ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ σωμάτων διαφόρων ὁλκὴ ςαθμῶν διαφέρυσα (75)· ὅτω δάκτυλος κυβικὸς χρυσῦ βάρος ἕλκει, λόγον ἔχον πρὸς βάρος δακτύλυ κυβικῦ ὕδατος ὃν 19:1· ἡ ἄρα εἰδικὴ βαρύτης ἀνάλογός ἐςι τῇ μάζῃ τῇ ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ περιεχομένῃ.

161. Ἀλλὰ γὰρ ἡ τῶν σωμάτων πυκνότης ἐν τούτῳ, ὡς εἴδομεν (75), κεῖται, ἐν τῷ περιέχειν αὐτὰ πλείω ἢ ἐλάττω μάζαν ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ, ἢ ἐςὶν ἀνάλογος τῇ μάζῃ, ἄρα ἡ εἰδικὴ βαρύτης ἀνάλογός ἐςι τῇ πυκνότητι (Γεωμ. 327).

162. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.** Ἀρθείσης τῆς τῶν μέσων

ἀντιςάσεως, πάντα τὰ βαρέα ἐν ἴσῃ ταχυτῆτι κατενεχθήσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἐν γὰρ τῷ κενῷ τῆς πνευματικῆς ἀντλίας τὰ κυφότατα σώματα ἀφιέμενα, οἷον πτερὰ, πάμβαξ κτ, ϗ τὰ βαρύτατα δὲ ἅμα, οἷον μόλυβδος, χρυσὸς κτ, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ εἰς τὴν βάσιν τȣ̃ δοχείȣ ἀφικνȣ̃νται, ϗ δὴ κατίασι ταχυτῆτι ἴσῃ.

β΄. Κείσθω δὲ τὸ βάρος τȣ̃ μολύβδȣ ἔχειν πρὸς τὸ τȣ̃ πάμβακος, ὡς 10 : 1, ἕξει ȣ̃ν ϗ ἡ μάζα πρὸς τὴν μάζαν ὡς 10 : 1· δυνατὸν τοίνυν κατ᾽ ἐπίνοιαν διελεῖν τὸν μόλυβδον εἰς 10 μόρια ἰσάλληλα, ϗ δὴ ἴσα τῇ μάζῃ τȣ̃ πάμβακος· ἰδὲ δὴ 11 μόρια ὕλης, 10 μὲν μολύβδȣ, 1 δὲ πάμβακος, ἅμα ἀφίενται ἀπὸ τῆς κορυφῆς τȣ̃ δοχείȣ· ἐπεὶ δὲ ἡ μάζα τȣ̃ πάμβακος τοσȣ̃τον ἕλκει ςαθμὸν, ὅσον ἓν δεκατημόριον τȣ̃ μολύβδȣ, ἡ βαρύτης τὴν αὐτὴν ταχυτῆτα ἐμποιήσει ἀμφοτέροις· ȣ̓κȣ̃ν ἡ βαρύτης ἐπίσης ἀμφοτέροις ἐπενεργήσει, ϗ ἕκαςον δεκατημόριον τȣ̃ μολύβδȣ, ȣ̓́τε βράδιον, ȣ̓́τε τάχιον, κατενεχθήσεται τῆς τȣ̃ πάμβακος μάζης· ἀλλ᾽ ὅλος ὁ μόλυβδος ȣ̓ δύναται κατιέναι τάχιον ἑκάςȣ τῶν αὐτȣ̃ μορίων· ἄρα, ἀφαιρεθείσης τῆς ἀντιςάσεως τῶν μέσων, ὁ μόλυβδος ȣ̓́τε τάχιον ȣ̓́τε βράδιον κάτεισι τȣ̃ πάμβακος. Ο.Ε.Δ.

163. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ βάρος τῶν σωμάτων ἐςὶν ἀνάλογον τῇ μάζῃ· ἐν ἴσῳ γὰρ χρόνῳ κάτισι τά τε βαρύτερα ϗ τὰ ἡττοβαρῆ, ἴσον ὄγκον ἔχοντα, ἀρθείσης τῆς ἀντιςάσεως (ἄνωτ.)· ἀλλ᾽ ὁ μόλυβδος, δεκαπλῆν ἔχων μάζαν ὕδατος ἐν τῇ αὐτῇ ταχυτῆτι ἕξει ποσότητα κινήσεως δεκαπλῆν τȣ̃ ὕδατος· τȣ̃ γὰρ ὕδατος ἡ ποσότης τῆς κινήσεως ἔςαι 1 μάζα πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ταχυτῆτα 1, ἴση 1 (115), τȣ̃ μολύβδȣ τῆς κατὰ τὴν κίνη-

σιν ποσότητος ἴσης 10×1, ὕλης ἀμέλει ἐπὶ ταχυτῆτα $= 10$· ἐντεῦθεν ἄρα, ἡ ποσότης τῆς κινήσεως τȣ̃ μολίβδȣ καὶ τȣ̃ ὕδατος ἀποτέλεσμά εἰσι τȣ̃ αὐτῶν βάρȣς· ἀλλ' ἡ ποσότης τῆς κινήσεως τȣ̃ μολίβδȣ πρὸς τὴν τȣ̃ ὕδατος ἐςὶν ὡς $10 : 1$· ἄρα τὸ βάρος τȣ̃ μολίβδȣ ἐςὶ δεκαπλάσιον τȣ̃ κατὰ τὸ ὕδωρ τὸ δεκαπλȣ̃ν· ἐπεὶ ȣ̓̃ν ἐκεῖνο πρὸς τȣ̃το ἐςὶν ὡς $10 : 1$· ἄρα εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς μάζαις.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ σώματος βαρέος ταχυτὴς ȣ̓κ ἐςὶν ἀνάλογος τῇ μάζῃ ἢ τῷ βάρει τȣ̃δε τȣ̃ σώματος· ϗ γὰρ τῶν μέσων ἀρθέντων, τὸ 100 λιτρῶν, φέρ' εἰπεῖν, μάζαν ἔχον, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ πεσεῖται, ᾧ ϗ σῶμα, ȣ̔̃ μάζα λίτρας μιᾶς (162).

Ἀλλ' ἔςω τῇ μάζῃ ἀνάλογος· ȣ̓κȣ̃ν ἡ ταχύτης τȣ̃ 100 λίτρας ἕλκοντος πρὸς τὴν τȣ̃ 1 ἔςαι ὡς $100 : 1$· 100 δὲ μόρια μάζης πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ 100 ταχυτῆτος ποιȣ̃σι 10000 ποσότητος κινήσεως σώματος 100 λιτρῶν, ὅτε 1 μάζης ἐπὶ ἓν ταχύτητος ποιεῖ 1 ποσότητος κινήσεως σώματος μιᾶς λίτρας· ἀλλὰ τὸ ἀποτέλεσμα ἀνάλογον εἶναι ὀφείλει τῇ αἰτίᾳ· ἐπεὶ ȣ̓̃ν τὸ βάρος αὐτῶν ἐςὶν ἡ αἰτία τῆς κατὰ κίνησιν αὐτῶν ποσότητος, τῶν βάρεων ὄντων ὡς $100 : 1$, ϗ αἱ ποσότητές τῶν κατ' αὐτὰ κινήσεων ἀναγκαίως ἔσονται ὡς $100 : 1$, ȣ̓χὶ δὲ ὡς $10000 : 1$· ἡ ἄρα ταχυτὴς τῶν σωμάτων τῇ μάζῃ ȣ̓κ ἐςιν ἀνάλογος.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς ἡ ταχυτὴς τῶν βαρέων ȣ̓δόλως ἐξῆπται τῆς αὐτῶν μάζης.

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐπεὶ σῶμα μεῖον ἑτέρȣ, κόκκος φέρε ψάμμȣ παραβαλλόμενος πρὸς ὅλον λίθον, ϗ σῶμα εἰδικῶς ἑτέρȣ κȣφότερον, πάμβακος φέρε μέρος πρὸς σφαιρίδιον μολυβδῦν παραβαλλόμενον, ὀφείλυσι πί-πτειν κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἐ ἐνεργείᾳ πίπτυσιν ἐν τῷ κενῷ δοχείῳ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον· ἐὰν ἄρα ὁρῶ-μεν σῶμα παχύτερον καταπίπτον τάχιον ἢ σῶμα λεπτό-τερον, ἰσοβαρῆ ἄμφω εἰδικῶς, ἐ σῶμα εἰδικῶς βαρύτερον ἄλλυ, λίθον φέρε τάχιον πίπτοντα, ἢ κόκκον ψάμμυ, ἐ σφαῖραν μολυβδίνην τάχιον, ἢ μέρος πάμβακος· τὴν δια-φορὰν ταύτην ἀποδοτέον τῇ διαφόρῳ ἀντιςάσει τῶν μέ-σων, δι᾽ ὧν κινῦνται, φέρ᾽ εἰπεῖν, τῷ ἀέρι.

167. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.** Ἡ βαρύτης τῶν σωμάτων ἐςὶν ἡ αὐτὴ ἀπὸ διαφόρων ὑψῶν ἰσοδιεςώτων τῦ ἐξισώτυ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςωσαν δύω χῶροι, ὧν ἅτερος θατέρυ εἴη ὑψηλότερος κατὰ τὸ χιλιαπλῦν, εἴτ᾽ ὖν ὀργυὰς 1000· λίθος ἓν ἄφετος ἀφ᾽ ἑκατέρων τῶν ὑψωμάτων διανύει, ἐν ἑνὶ τυχὸν λεπτῷ, τὸ αὐτὸ αἰσθητῶς διάςημα, δὸς εἰπεῖν πόδας 15· τῆς δὲ ἑκάςυ ἀτόμυ, ἐξ ὧν ὁ λίθος σύγκειται, βαρύτητος ἐμποιύσης αὐτῷ ταχυτῆτα αἰσθητῶς τὴν αὐτὴν ἐν τοῖς δυσὶ χώροις, ἡ βαρύτης τῦ λίθυ ἐκληφθήσεται αἰσθητῶς ἡ αὐτή.

Παρὰ ταῦτα δέ· ἐπεί περ, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀψό-μεθα, ἡ βαρύτης πάντων τῶν τε γηΐνων ἐ τῶν ὑρανίων σω-μάτων τῶν ἡμῖν γνωρίμων ἐν λόγῳ ἐςὶν ἀντιςρόφῳ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀποςημάτων, ἃ ἀπέχει τὸ σῶ-μα τῦ τῆς βαρύτητος κέντρυ, τυτέςι σῶμα τῦ κέντρυ ἀπέχον ὡς 2 βαρύτητα ἔχει ἐλαττυμένην ὡς 4, ἀπέχον δὲ ὡς 3, ὡς 9, ἐ ὕτως ἑξῆς· κέντρον δὲ τῶν βαρέων, ὡς ὀψόμεθα, ἐςὶν ἐπὶ τῆς γῆς, αὐτὸ τὸ τῆς γῆς κέντρον περίπυ· ὁ δὲ ταπεινότερος χῶρος, ὃν εἰρήκαμεν, ἀπέχει τῦ κέντρυ τῆς γῆς ἀκτῖνα μίαν γηΐνην, εἴτ᾽ ὖν λεύγας 1432 $\frac{1}{2}$· ἐπεὶ τοίνυν εἰσὶ χίλιαι ὀργυαὶ περίπυ ἴσαι ἡμιλευγίῳ, ὁ ὑψηλότερος χῶρος ἀπέχων ἔσαι τȣ̃ κέντρȣ τῆς γῆς λεύγας 1433· ἄρα ἡ βαρύτης τȣ̃ λίθȣ ἐν τῷ ὑψηλοτέρῳ χώρῳ πρὸς τὴν τȣ̃ αὐτȣ̃ ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ ἔσαι ὡς $\overline{1432\frac{1}{2}}^2 : \overline{1433}^2 :: 2052056\frac{1}{4} : 2053489$· ἐπεὶ δὲ ἡ μεταξὺ τȣ́των τῶν δύω ποσοτήτων διαφορὰ ἔσιν τȣ̃ $\frac{1}{1433}$, ἡ ἐν τῷ ὑψηλοτέρῳ χώρῳ βαρύτης τȣ̃ λίθȣ τῆς τȣ̃ ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ ἐλάττων ἔσαι τῷ $\frac{1}{1433}$, ἡ δὲ διαφορὰ αὕτη ἔτι βραχυτέρα ἔσαι, διενθυμηθεῖσιν, ὡς τȣ̃ ἀέρος πυκνοτέρȣ ὄντος ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ χώρῳ, ἐνταῦθα πλεῖον ἀπόλλυσι τῆς ἑαυτȣ̃ βαρύτητος ὁ λίθος, ἵνα ἰσόςαθμος ᾖ τῷ ἀέρι, ἐν δὲ τῷ ὑψηλοτέρῳ ἔλαττον διὰ τῶν ἐναντίων λόγων· ὁ ἄρα λίθος ἑκατέρως τῇ αὐτῇ πεσεῖται ταχυτῆτι. Ο. Ε. Δ.

168. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. *Ἐν δυσὶ χώροις τῆς γῆς, ὧν ἡ διαφορὰ τῆς ἀπὸ τȣ̃ ἰσωτȣ̃ ἀποςάσεως μὴ ᾖ λίαν μεγάλη, ἡ βαρύτης τȣ̃ σώματος ἔσαι ἡ αὐτή.*

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ γὰρ πείρας εἰ λίθος ἐν Παρισίοις διατρέχει πόδας 15 ἐφ' ἑνὸς λεπτȣ̃ δευτέρȣ, ὡσαύτως τὸ αὐτὸ διάςημα διανύσει αἰσθητῶς ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ λεύγας τινὰς ἄπο τῶν Παρισίων, εἴτε πρὸς τὸν ἰσωτὴν, εἴτε πρὸς τὸν πόλον· ἀνάγκη δὲ τὸ τοιȣ̃το ȣ̃τως ἔχειν· εἰ γὰρ σφαῖρα ἀκριβὴς εἴη ἡ γῆ, μηδὲ περιάγοιτο περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα, ἡ βαρύτης τῶν σωμάτων εἴη ἂν ἡ αὐτὴ ἐν ἅπαντι σημείῳ τῆς γῆς· ἀλλὰ ταῦτα ἀμφότερα ποικίλλȣσι τὴν βαρύτητα, ὡς ὀψόμεθα, καὶ κυρίως εἰπεῖν ἡ βαρύτης τȣ̃ αὐτȣ̃ σώματος ἐν διαφόροις ἀποςήμασι τȣ̃ ἐξισωτȣ̃ ȣ̓δέ ποτε ἔσιν ἡ αὐτή· ἐπεὶ ȣ̃ν ἥτε γῆ ἐλλείπει τι τȣ̃ εἶναι ἀκριβὴς σφαῖρα, καὶ δύω χῶροι προσεχεῖς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς περιςρέφονται περὶ τὸν τῆς σφαιρας ἄξονα, ταῦτ' ἄμφω ἐπὶ σωμάτων βραχύτι ἀπεχόντων τȣ̃ ἰσωτȣ̃ ȣ̓δ' αὔξȣσι ȣ̓δὲ σμικρύνȣσι τὴν βαρύτητα τῶν σωμάτων ποσότητος ὡρισμένης. Ο. Ε. Δ.

169. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐν ἄρα τῇ Μηχανικῇ ὑποθετέον ἀδεῶς σώματι, ἐν διαφόροις μέρεσιν ὂν τῆς μηχανῆς, τὴν αὐτὴν ἔχειν ἀεὶ βαρύτητα, καίτοι κείμενον ὑψηλότερον, ἢ ταπεινότερον, προσεχέστερον, ἢ ἀπέχον μᾶλλον τȣ̃ ἰσωτȣ̃.

170. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἡ βαρύτης τῶν γηΐνων σωμάτων πάντων κατεπείγει αὐτὰ μονονȣ̓ πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὰ γὰρ σώματα τῆς γῆς ἀεὶ διὰ τῆς ἑαυτῶν βαρύτητος φέρονται τὴν κάθετον τῷ ὁρίζοντι φοράν· εἴπερ ȣ̃ν ἀκριβὴς ἦν σφαῖρα ἡ γῆ, ἐπεὶ αἱ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτῆς κάθετοι εὐθεῖαι ἀκτῖνές εἰσιν αὐτῆς προεκβεβλημέναι, συνιȣ̃σαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ κέντρον, πάντα τὰ βαρέα ἐφέροντ' ἂν ἀκριβῶς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· ἀλλ' ἡ γῆ παρὰ βραχὺ ἐστι σφαῖρα, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δῆλον ἐσαι· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

171. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ φοραὶ τῶν βραχύτι ἀλλήλων ἀπεχόντων βαρέων, αἱ φοραὶ φέρε δύω σπαρτίων, ὧν ἑκατέρȣ τῷ πέρατι βάρη προσήρτηνται, ὀργυὰν ἀπεχόντων, ἢ δύω κιόνων οἰκοδομήματος, ὡς παράλληλοι εἰσὶν ἐκληπτέαι· τοιαῦτα γὰρ δύω σπαρτία ἐχέτωσαν μῆκος ὀργυᾶς μιᾶς· ἵν' ȣ̃ν ἀλλήλοις συμπέσωσιν, ἐξȣδενῶσαι δεῖ τὸ μεταξὺ ὀργυᾶς ἀπόσημα, προαχθέντων ἐς τὸ κέντρον τῆς γῆς, εἴτ' ȣ̃ν λεύγας $1432\frac{1}{2}$ = ὀργυ. 3268965· τῶν ȣ̃ν σπαρτίων, ἢ τῶν κιόνων, ὀργυιᾶς μῆκος ἐχόντων, τὰ δύω αὐτῶν κατωτέρω πέρατα ȣ̓κ ἔσονται προσεχέστερα τῶν ὑπερτέρων περάτων, ὅτι μὴ τῷ

3584587 ὀργυιᾶς· διὰ ταῦτ' ἄρα ἐν τῇ Μηχανικῇ ἐκληπτέον τὰς φορὰς τῶν δύω βαρέων ὡς παραλλήλȣς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς ταχυνομένης κινήσεως τῶν βαρέων.

172. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. *Τὰ βαρέα κατίασι διὰ κινήσεως ταχυνομένης.*

ΔΕΙΞΙΣ. Ὅσῳ ἀφ' ὑψηλοτέρων λίθος πίπτει, ϗ δὴ ὅσῳ πλείω χρόνον ἀναλίσκει κατιὼν, τοσȣ́τῳ ἰσχυρότερον πλήττει πεσών· ἀλλ' εἴπερ ἡ ταχύτης μὴ ηὔξανεν ἐν τῇ καθόδῳ, ȣ̓κ ἂν ἔπληττεν ὁ λίθος ἰσχυρότερον πίπτων ἀφ' ὕψȣς ὀργυιῶν 100, ἢ ὕψος μιᾶς· ϗ γὰρ, ἐπεὶ ἡ τȣ̃ λίθȣ βαρύτης ἡ αὐτή ἐςιν ἔντε τῷ 100 ὀργυιῶν ὕψει, καὶ ἐν τῷ μιᾶς (167), ἡ ταχυτὴς αὐτȣ̃ προαγομένη ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἡ αὐτή ἐςιν ἔντε τῇ ἀρχῇ τῶν 100, ϗ ἐν τῇ τῆς μιᾶς ὀργυιᾶς· εἰ ἄρα μὴ ηὔξανε κατιόντος, ἔμενεν ἂν ἔτι ἡ αὐτὴ ϗ ἐν τῇ πτώσει τȣ̃ λίθȣ ἀφ' ἑκατέρȣ ὕψȣς· ἀλλ' εἴπερ ὁ λίθος τὴν αὐτὴν ἔχων μάζαν, τὴν αὐτὴν ἔχει ϗ ἰσχὺν ϗ ταχύτητα, ἡ ποσότης τῆς αὐτȣ̃ κινήσεως ἦν ἂν ἡ αὐτὴ (115)· ϗ πλήττειν ἄρα ἔδει τῇ αὐτῇ ἰσχύϊ ἀπό τε τῶν μετεωροτάτων καταφερόμενον, ϗ τῶν ὅσον ȣ̓κ ἀπεχόντων τῆς ἐφανείας· ἀντίκειται δὲ τȣ̃το τῇ καθ' ἡμέραν πείρᾳ, ἀναγκαίως ἄρα συνάγειν δεῖ, ὅτι τὰ βαρέα κατιόντα αὔξȣσιν αὐτῶν τὴν ταχύτητα. Ο. Ε. Δ.

173. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. *Ἡ κίνησις τῶν διὰ τῆς ἑαυτῶν βαρύτητος κινȣμένων ἐςιν ἰσοταχής.*

ΔΕΙΞΙΣ. Ὁ Γαλιλαῖος τὸ πρῶτον ἀπεκάλυψε διὰ πολλῶν πειραμάτων, ὅτι τὰ βαρέα διανύεσι διὰ πολλῶν ἑξῆς δευτέρων λεπτῶν διασήματατα κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1 . 3 . 5 . 7 κτ, ϗ δὴ τὰ διανυόμενα διασήματα ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως μέχρι τέλες αὐτῆς εἶεν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων· τὰ αὐτὰ πειράματα εἶτα ϗ ὑπ' ἄλλων Φυσικῶν ἐπαναληφθέντα τὰ αὐτὰ ἀεὶ ἀπετέλεσαν· ἀλλ' ἐν τῷ 92 σχήματι τὰ ἑκάςε χρόνε διασήματα ἐ δύνανται αὔξειν κατὰ τὲς περιττὲς ἀριθμὲς 1, 3, 5 κτ., ϗ τὰ ἀθροίσματα τῶν διασημάτων ἐ δύνανται πρὸς ἄλληλα ἔχειν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων διασήματα, εἰμὴ τὰ ςοιχεῖα τῦ ὅλε τριγώνε ΑΒζ, ἃ παρισῶσι τὰς προσγινομένας ταχυτῆτας, αὔξωσιν ἰσοταχῶς· εἰ μὴ γὰρ αἱ ἰσοδιεςῶσαι κάθετοι 1α, 2β, 3γ, αὔξωσιν ἅπασαι ἐπίσης, ἐ δύνανται ὁριωθῆναι ὑπὸ τῆς Αζ εὐθείας ἀκριβῶς, καλύψαντα τὸ τριγωνικὸν διάςημα ΑΒζ· ἄρα αἱ ταχύτητες τῶν βαρέων αὔξεσιν ἰσοταχῶς. Ο. Ε. Δ.

174. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πάνθ', ἃ γενικῶς δέδεικται περὶ τῆς ἰσοταχῦς ϗ ἰσοβραδῦς τῶν κινήσεων, λοιπὸν ἂν εἴη δεῖξαι περὶ τῆς κινήσεως τῶν βαρέων σωμάτων, ἀνιόντων, ἢ κατιόντων.

175. α'. Αἱ ταχύτητες, ἀρθέντος παντὸς κωλύματος, ἃς κτᾶται τὸ κινέμενον μεθ' ἕκαςον ἑξῆς λεπτὸν, αὔξεσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 1 . 2 . 3 . 4 κτ. (149).

176. β'. Τὸ ὁλικὸν διάςημα, ὃ διανύει σῶμα κατιὸν, τελευτῶντος τινὸς χρόνε, ἥμισύ ἐςι τῦ διανυομένε διὰ κινήσεως ἰσομερῦς, ϗ ἴσης τῇ προσγινομένῃ τελευτῶντος τῦδε τῦ χρόνε (155).

Τοιάδε γάρ ἐςιν ἡ ταχύτης βαρέος τινὸς, λίθε φέρ' εἰπεῖν, διανύοντος πόδας περίπε 15 ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ· ἀλλ' ἐν τέτῳ ἐκτήσατο ταχύτητα, δι' ἧς ἂν διανύσειε 2 × 15 πόδας = 30 ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, εἰ ἐκινεῖτο ἰσομερῶς κατὰ ταύτην τὴν ταχύτητα· ἐὰν ἦν καλέσωμεν 1 τὴν ταχύτητα, δι' ἧς διανύει πόδας 30 ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, αὕτη γενήσεται 2 τελευτῶντος τῦ δευτέρυ, 3 τῦ τρίτυ, κ̀ ὕτως ἐφεξῆς· ὕτως ἡ ταχύτης, ἣν ἐκτήσατο τὸ σῶμα τελευτῶντος τῦ δευτέρυ λεπτῦ, ἐςὶ τοιαύτη, δι' ἧς ἂν διανύσειεν ἰσομερῶς ἐν δευτέρῳ κινύμενον 2 × 30 = 60 πόδας, κ̀ ἐν γένει, ἵν' εὕρωμεν τὴν προσγενομένην ταχύτητα τελευτῶντος τινὸς χρόνυ, τυτέςι τὸν ἀριθμὸν τῶν ποδῶν, ὓς διανύει τὸ σῶμα κινύμενον ἰσομερῶς κατὰ ταύτην τὴν ταχύτητα ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ, πολλαπλασιαςέον 30 ἐπὶ τῦτον τὸν χρόνον· τῆς ἦν προσγενομένης ταχυτῆτος τελευτῶντος δεκάτυ λεπτῦ ὕσης 10, τὸ διάςημα τὸ διανυόμενον ὑπὸ τῦ κινητῦ κατὰ τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἔςαι ποδῶν 30 × 10 = 300.

177. γ'. Τὰ διανυόμενα διαςήματα ἐν ἑκάςῳ ἀλληλοδιαδόχῳ πεπερασμένῳ χρόνῳ αὔξυσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . κτ. (150)· σῶμα γὰρ διανύον ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ πόδας 15, διανύσει ἐν τῷ δευτέρῳ 3 × 15 = 45· κ̀ γὰρ διὰ τῆς ταχύτητος, ἧς ἐκτήσατο τὸ σῶμα τελευτῶντος τῦ πρώτυ λεπτῦ, διανύσει ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ πόδας 30 (176)· ἐπεὶ δὲ συνεχῶς ἡ βαρύτης ἐπενεργεῖ τῷ σώματι ἐπὶ τῦ δευτέρυ λεπτῦ, ἐμποιῦσα αὐτῷ ταχύτητα, δι' ἧς διανύσει καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ λεπτῷ, ὃ διήνυσε διάςημα ἐν τῷ πρώτῳ, εἴτ' ἦν πόδας 15, συναπτομένων τῶν 15 τοῖς 30, ἀποτελῦνται 45· ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῦ τρίτυ λεπτῦ· ἐπείπερ ἰσοταχῶς κινύμενον τὸ σῶμα ἐκτήσατο ἐν δυσὶ τοῖς προτέροις λεπτοῖς ταχύτητα ὡς δύω

εἶτ' ὖν ποδῶν 60, τύτοις προςιθεμένων τῶν 15 διὰ τὴν ἐν τῷ τρίτῳ λεπτῷ ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος, ἔσονται πόδες 75· κ̀ ὕτως ἐφεξῆς.

178. δ'. Ἐν τῇ καθόδῳ τῶν σωμάτων τὰ διανυόμενα διαςήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τετράγωνα (151)· γνωσθέντος ὖν ἅπαξ τῦ διανυσθέντος διαςήματος ἐν τῷ πρώτῳ χρόνῳ, δυνατὸν, ἤτοι, χρόνυ ἄλλυ δοθέντος, εὑρεῖν τὸ ἐν αὐτῷ διανυθησόμενον διάςημα, ἢ, διαςήματος δοθέντος, εὑρεῖν τὸν ἀπαιτύμενον χρόνον εἰς διάνυσιν αὐτῦ, ἢ τέλος, χρόνυ ὡρισμένυ δοθέντος, εὑρεῖν τὸ ἰδιαίτερον διάςημα, τὸ ἐν ἑκάςῳ μέρει τῦ χρόνυ διανυθέν.

179. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Α'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Πόσον διάςημα διανύσει ἐν τέσσαρσι λεπτοῖς δευτέροις λίθος ἄφετος; φημὶ δή· τὸ ἀπὸ 1 δευτέρυ λεπτῦ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ 4, ὡς 15 ποδῶν διάςημα διανυόμενον ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ πρὸς χ, εἶτ' ὖν 1 : 16 :: 15 : χ = 240· εἰς εὕρεσιν ἄρα τῶν τῦ διαςήματος ποδῶν πολλαπλασιαςέον 15 ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῦ χρόνυ τετράγωνον.

180. Ἐντεῦθεν ἀρύεται ἡ λύσις τῦ ἐφεξῆς προβλήματος· σφαῖρα μολυβδίνη ἀφ' ὕψυς πύργου κατηνέχθη πρὸς τὴν γῆν ἐν τρισὶ λεπτοῖς δευτέροις· πόσον ἀρ. ἐςὶ τὸ τῦ πύργυ ὕψος; ἢ 15 = 3^2 (= 9) = 135 ποσί.

181. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Β'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Λίθος ἀφ' ὕψυς ποδῶν 375 καταφερόμενος τῷ ὁρίζοντι πρὸς ὀρθὰς, πόσον διαπανήσει χρόνον, ἐς τ' ἂν ἐπ' αὐτῦ τῦ ὁρίζοντος γένηται; ἐπεὶ ὖν 15 : 375 :: 1^2 : χ^2 = 5· λίθος ἐν τῷ κατιέναι διαπανήσει 5 λεπτά.

182. ΕΤΕΡΟΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Νεύτων ἔδειξεν, ὡς ἡ τῆς σελήνης βαρύτης, ἣν φέρεται ἐπὶ τὴν γῆν, τοσαύτη ἐςὶν, ὡς ἀφεθεῖσαν ἐν λεπτῷ τῷ πρώτῳ κατελ.