$$\frac{\upsilon^{\kappa-\rho+1}}{\kappa-\rho+1}\,\varepsilon^{O.(\kappa-\rho+1)} + O.Z\delta\chi\,\varepsilon^{O(\kappa-\rho+1)Z\delta\chi} + \Gamma = 0.$$

Οὐδὲν δὲ προςίθεται ὑπὲρ τῆς ἀμεταβλήτε ποσότητος ἐν τῇ ὁλοκληρώσει τῆς τὸ Π προβαλλέσης ἐξισώσεως· μὴ ἔχεσι γὰρ ἐδεμίαν θέσιν εἰς διορισμὸν αὐτῆς, ἐφ᾽ ἡμῖν κεῖται ὑποθεῖναι αὐτὴν ἴσην τῷ μηδενί.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω εἰς ὁλοκλήρωσιν ἡ ἐξίσωσις $\delta\upsilon + \frac{\alpha\upsilon\delta\chi}{\chi} + (\beta\chi^2 + \gamma\chi + \zeta)\,\delta\chi = 0$· πολλαπλασιασθεῖσα τοίνυν ἐπὶ τὸν ποιητὴν Π γενήσεται $\Pi\delta\upsilon + \frac{\alpha\upsilon\Pi\delta\chi}{\chi} + \Pi\,(\beta\chi^2 + \gamma\chi + \zeta)\,\delta\chi = 0$· δεῖ δὴ ὑπάρχειν $\frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = \delta\,\frac{\left(\frac{\alpha\upsilon\Pi}{\chi}\right)}{\delta\upsilon} = \frac{\alpha\Pi}{\chi}$· ἄρα $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\alpha\delta\chi}{\chi}$· ἄρα $\lambda\Pi = \alpha\lambda\chi$, ἢ $\Pi = \chi^{\alpha}$· ἐκεῖν ἡ ἐξίσωσις ἀποτελεῖται $\chi^{\alpha}\delta\upsilon + \alpha\chi^{\alpha-1}\upsilon\delta\chi + \beta\chi^{\alpha+2}\delta\chi + \gamma\chi^{\alpha+1}\delta\chi + \zeta\chi^{\alpha}\delta\chi$, ἧς ὁλοκληρόν ἐστι τὸ $\chi^{\alpha}\upsilon + \frac{\beta\chi^{\alpha+3}}{\alpha+3} + \frac{\gamma\chi^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{\zeta\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \Gamma = 0.$

313. Τῇ ἤδη ὁλοκληρωθείσῃ γενικῇ ἐξισώσει ἐντυγχάνομεν συχνότερον, ἡ δὲ μέθοδος, ᾗ ἐχρησάμεθα, πολλαῖς καὶ ἄλλαις περιπτώσεσιν ἐφαρμοσθῆναι δύναται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθων δύω ἐξισώσεις $\delta\chi + \alpha\delta\upsilon + (\beta\chi + \gamma\upsilon)\,T\delta\tau = 0$, $\kappa\delta\chi + \alpha'.\delta\upsilon + (\beta'\chi + \gamma'\upsilon)\,T\delta\tau = 0$ τῶν μὲν χ, υ, τ τριῶν ὄντων ἀςάτων ποσῶν, μονίμων δὲ τῶν α, β, γ, ά. κτ., ϗ τῦ Τ συνέκθεσιν ἡντιναῦν ἐμφαίνοντος τῆς τ ποσότητος· ἀναχθήσεται ὖν τὸ τέτων τῶν δυεῖν ἐξισώσεων ὁλόκληρον εἰς τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον ὕτω· πεπολλαπλασιάσθω ἡ ἑτέρα τῶν δυεῖν, ἡ πρώτη φέρ' εἰπεῖν, ἐπὶ συνεργὸν ἀδιόριστον ϗ ἀμετάτρεπτον τὸν ϑ, ϗ προςεθείσης τῇ δευτέρᾳ, πολλαπλασιασθήτω τὸ ὅλον ἐπὶ ποιητὴν τὸν Π, ὃς ὑποτίθεται ὧν συνέκθεσις τῦ τ· ὖκῦν ἔςαι $(\vartheta\Pi + \kappa\Pi)\,\delta\chi + (\vartheta\alpha\Pi + \acute{\alpha}.\Pi)\,\delta\upsilon + [(\vartheta\beta\Pi + \beta'.\Pi)\chi + (\vartheta\gamma\Pi + \gamma'.\Pi)\upsilon]\,\mathrm{T}\delta\tau = 0$· ἔςω ὖν καθ' ὑπόθεσιν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀπειροςὸν ἀκριβές· ἔςαι ἄρα (304) ά. $\frac{\delta(\vartheta\Pi + \kappa\Pi)}{\delta\tau} =$

$$\frac{\delta[(\vartheta\beta\Pi + \beta'.\Pi)\chi + (\vartheta\gamma\Pi + \gamma'.\Pi)\upsilon]}{\delta\tau}\ \mathrm{T}\cdot\ \beta'.$$

$$\frac{\delta(\vartheta\alpha\Pi + \acute{\alpha}.\Pi)}{\delta\chi} =$$

$$\frac{\delta[(\vartheta\beta\Pi + \beta'.\Pi)\chi + (\vartheta\gamma\Pi + \gamma'.\Pi)\upsilon]}{\delta\upsilon}\ \mathrm{T}\cdot\ \gamma'.$$

$\frac{\delta(\vartheta\Pi + \kappa\Pi)}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(\vartheta\alpha\Pi + \acute{\alpha}.\Pi)}{\delta\chi}$· ἀλλ' ἐὰν Π ὑποτεθῇ συνέκθεσις τῦ τ, ἐπικρατεῖ ἡ τελευταία ἐξίσωσις, ἐπείπερ ἀνάγεται εἰς $0 = 0$· αἱ δὲ λοιπαὶ δύω διδόασι $(\vartheta\gamma + \kappa)\frac{\delta\Pi}{\delta\tau} = (\vartheta\beta + \beta'.)\,\Pi\mathrm{T}$, ϗ $(\vartheta\alpha + \acute{\alpha}.)\frac{\delta\Pi}{\delta\tau} =$ $(\vartheta\gamma + \gamma'.)\,\Pi\mathrm{T}$· ὅθεν ἀποφέρεται $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\vartheta\beta + \beta'.}{\vartheta + \kappa}\mathrm{T}\delta\tau$, ϗ $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\vartheta\gamma + \gamma'.}{\vartheta\alpha + \acute{\alpha}.}\mathrm{T}\delta\tau$· ἑκατέρας ἄρα τῶν δυεῖν τέτων δυνάμεων ἐξισεμένης τῷ $\frac{\delta\Pi}{\Pi}$, ἔςαι $\frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\kappa}=\frac{\vartheta\gamma+\gamma'}{\vartheta\alpha+\alpha'}$, ἐν ᾗ ἄνεισιν εἰς δεύτερον βαθμὸν τὸ ϑ· ταύτης ὖν τῆς ἐξισώσεως ἐπιλυθείσης, προκύψεσι δυνάμεις δύω τῦ ϑ.

Ὑποτεθέντος ὖν γνωςῦ τῦ ϑ, εὐχερῶς πορισθήσεται τὸ Π· εἴγε ἡ ἐξίσωσις $\frac{\delta\Pi}{\Pi}=\frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\kappa}$ Τδτ δίδωσι Π $=\varepsilon^{o\,\frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\kappa}}$ Τδτ. Ἀλλὰ τῆς ἐξισώσεως $(\vartheta\Pi+\kappa\Pi)\delta\chi+$ κ.τ.λ. ἀπειροςῦ ἀκριβῦς πράγματι ἔσης, ἐὰν ταύτην ὁλοκληρώσωμεν, ἕξομεν $(\vartheta\Pi+\kappa\Pi)\chi+(\vartheta\alpha\Pi+\alpha'.\Pi)\upsilon+\Gamma=o$· ἐὰν ἄρα, τῦ ϑ ἐμφαίνοντος τὴν πρώτην τῦ ϑ δύναμιν, δεδομένην ὑπὸ τῆς δευτεροβαθμίυ ἐξισώσεως, τὸ ϑ' ἐμφαίνῃ τὴν δευτέραν τῦ ϑ δύναμιν, ϗ διὰ τῦ Π', ὅπερ γίνεται Π, τεθέντος τῦ ϑ' ὑπὲρ τῦ ϑ', πορισθήσεται $(\vartheta'\Pi'+\kappa\Pi')\chi+(\vartheta'\alpha\Pi'+\alpha'\Pi')\upsilon+\Gamma'=o$, τῦ Γ' ποσότητα καινὴν ἀμετάτρεπτον ἐμφαίνοντος· ὐδεὶς γάρ ἐςι λόγος, δι' ὃν ἄντις θατέρᾳ μᾶλλον, ἢ θατέρᾳ χρήσαιτο τῶν τῦ ϑ δυνάμεων· ἐκ τύτων δὲ τῶν δισσῶν ἐξισώσεων πορίζονται εὐμαρῶς αἱ τῦ χ, ϗ υ δυνάμεις, παριςάμεναι διὰ τ ϗ ἀμετατρέπτων ποσοτήτων.

314. Ὅταν ἡ προκειμένη ἀπειροςὴ ἐξίσωσις μὴ ἐμπεριέχηται ταῖς εἰς δεῦρο ἐκτεθείσαις περιπτώσεσι, σκεπτέον εἰ δυνατὸν διακρίναι τὰς ἀδιορίςυς· ἐνίοτε τοίνυν μόνων τῶν κοινῶν κανόνων τῦ συμβολικῦ λογισμῦ τύτῳ δεῖ· ἐνίοτε δὲ, μεταμορφώσεων· εἰσὶ μέντοι ἐξισώσεις, ἐφ' αἷς ἄγνωςον, ἥτις ἂν εἴη ἡ κατάλληλος μεταμόρφωσις· ἡ μὲν γὰρ ἐξίσωσις $\alpha\chi^{\nu}\delta\chi+\beta\upsilon^{\kappa}\chi^{\nu}\delta\chi=$

$\upsilon^{\eta}\delta\upsilon\ (\varepsilon + \zeta\chi^{\eta})^{\rho}$ ἀμέσως διακρίνεται διὰ διαιρέσεως, εἴγε ταυτίζεται τῇ $(\alpha + \beta\upsilon^{\kappa})\,\chi^{\nu}\delta\chi = \upsilon^{\eta}\delta\upsilon\ (\varepsilon + \zeta\chi^{\eta})^{\rho}$, ἥτις γίνεται $\dfrac{\chi^{\nu}\delta\chi}{(\varepsilon + \zeta\chi^{\eta})^{\rho}} = \dfrac{\upsilon^{\eta}\delta\upsilon}{\alpha + \beta\upsilon^{\kappa}}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἐξέχεται τοῦ τῶν δυωνύμων ποσῶν τῶν μιᾶς μόνης τρεπτῆς περιεκτικῶν· ἡ δέ γε $\vartheta\chi\delta\chi = \alpha\chi^{4}\upsilon\delta\upsilon + 2\alpha\beta\chi^{2}\upsilon^{3}\delta\upsilon + \alpha\beta\beta\upsilon^{5}\delta\upsilon$ πρῶτον μὲν, ἡ παντὶ δῆλον εὐθέως καθίσαται, γραφήσεται $\vartheta\chi\delta\chi = (\chi^{4} + 2\beta\chi^{2}\upsilon^{2} + \beta\beta\upsilon^{4})\,\alpha\upsilon\delta\upsilon$· ἑξῆς δὲ μεταμορφωθήσεται εἰς $\vartheta\chi\delta\chi = (\chi^{2} + \beta\upsilon^{2})^{2} \times \alpha\upsilon\delta\upsilon$· βραχὺ οὖν ἐπισησαμένοις δῆλον εὐθύς, ὅτι εὐτυχῶς πραχθήσεται ἡ διάκρισις, εἰ γένοιτο $\chi^{2} + \beta\upsilon^{2} = \psi$· καὶ γὰρ ἔσται $\chi^{2} = \psi - \beta\upsilon^{2}$, καὶ $\chi\delta\chi = \frac{1}{2}\delta\psi - \beta\upsilon\delta\upsilon$· ἀντικαταστάσει ἄρα ποριςθήσεται $\frac{1}{2}\vartheta\delta\psi - \beta\vartheta\upsilon\delta\upsilon = \alpha\psi\psi\upsilon\delta\upsilon$, ὅθεν ἀποφέρεται $\dfrac{\frac{1}{2}\vartheta\delta\psi}{\beta\vartheta + \alpha\psi\psi} = \upsilon\delta\upsilon$, ἥτις ἐστὶ ῥᾴστη πρὸς ὁλοκλήρωσιν.

315. Ἐπείπερ ἀμήχανόν ἐστιν ἀποδοῦναι κανόνας γενικοὺς τῶν μεταμορφώσεων, ἐκθησόμεθα ἐν γένει, ὅτε γνωστὸν καθίσαται εὐτυχῶς ἐκτελεῖσθαι τὰ τῆς διακρίσεως.

Δυνατὸν οὖν ἐν γένει τὰ τῆς διακρίσεως ἐκτελεῖσθαι ἐν ἁπάσαις ταῖς ἐξισώσεσι ταῖς δυεῖν τρεπτῶν περιεκτικαῖς· ἔστω γὰρ ἡ $A\delta\chi + B\delta\upsilon = 0$ ἐξίσωσις ὁμογενής, καὶ διῃρήσθω ὅλη διὰ βαθμοῦ τῆς χ, οὗ ὁ δείκτης ἐμφαίνει τὸν βαθμὸν τῆς ἐξισώσεως· τοῖς οὖν Α, Β μόνοι οἱ βαθμοὶ τοῦ $\dfrac{\upsilon}{\chi}$ ἐνέσονται καὶ ποσότητες ἀμετάτρεπτοι· ὥστε ἡ ἐξίσωσις γενήσεται $Z\delta\chi + Z^{1}\delta\upsilon = 0$, τῶν Z, Z^{1} συνεκθέσεις ἐμφαινόντων τοῦ $\dfrac{\upsilon}{\chi}$, καὶ τῶν ἀμετατρέπτων· τούτȣ τεθέντος, ἐπεὶ $\delta(\frac{\upsilon}{\chi}) = \frac{\chi\delta\upsilon - \upsilon\delta\chi}{\chi\chi}$, ἔςαι $\delta\chi = \frac{-\chi\chi}{\upsilon}\delta(\frac{\upsilon}{\chi}) + \frac{\chi}{\upsilon}\delta\upsilon$· ἐὰν ἄρα γένηται $\frac{\upsilon}{\chi} = \psi$, πορισθήσεται $\delta\chi = -\frac{\upsilon\delta\psi}{\psi\psi} + \frac{\delta\upsilon}{\psi}$· ἀντὶ ἄρα $\frac{\upsilon}{\chi}$, ϗ $\delta\chi$ ἀντικατασαθεισῶν τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, πορισθήσεται $-\frac{Z\upsilon\delta\psi}{\psi\psi} + \frac{Z\delta\psi}{\psi} + Z'\delta\upsilon = o$, τῶν Z, Z' ἐμφαινόντων ἀληθῶς τὰς συνεκθέσεις τȣ ψ ϗ τῶν ἀμετατρέπτων, αὕτη τοίνυν ἡ ἐξίσωσις δίδωσι $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{Z\delta\psi}{Z\psi + Z'\psi\psi}$ ἐξίσωσιν ὅλην διακεκριμένην, ἐπεὶ Z ϗ Z' μόνην τὴν ψ τρεπτὴν περιέχȣσιν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ᾖ $\upsilon^3\delta\chi + \upsilon^2\chi\delta\upsilon + \beta\chi^3\delta\upsilon = o$· ἥτις ἐξίσωσίς ἐςιν ὁμογενὴς, ἧς τὸν βαθμὸν ἐμφαίνει ὁ ἀριθμὸς 3, διῃρήσθω διὰ χ^3· ὅκȣν ἔςαι $\frac{\upsilon^3}{\chi^3}\delta\chi + \frac{\upsilon^2}{\chi^2}\delta\upsilon + \beta\delta\upsilon = o$· γενέσθω ȣ̃ν $\frac{\upsilon}{\chi} = \psi$, ἢ $\chi = \frac{\upsilon}{\psi}$· ἔςαι τοίνυν $\delta\chi = \frac{\psi\delta\upsilon - \upsilon\delta\psi}{\psi\psi}$· ἀντικατασάσει ἄρα ἐν τῇ προτεθείσει ἐξισώσει, πρόεισι $\psi^2\delta\upsilon - \upsilon\psi\delta\psi + \psi^2\delta\upsilon + \beta\delta\upsilon = o$, ὅθεν $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\psi\delta\psi}{2\psi^2 + \beta}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἐςὶ $\lambda\upsilon = \frac{1}{4}\lambda\ (2\psi^2 + \beta) + \lambda\Gamma$, ἥτις δίδωσιν $\upsilon = \Gamma\ (2\psi^2 + \beta)^{\frac{1}{4}}$, εἶτ' ȣ̃ν $\upsilon^4 = \Gamma^4\ (2\psi^2 + \beta)$, εἶτ' ȣ̃ν τελευταῖον $\upsilon^4 = \Gamma^4\ (\frac{2\upsilon^2}{\alpha^2} + \beta)$, ἀντικαθισαμένης ἀντὶ ψ τῆς αὐτȣ̃ δυνάμεως.

316. Συμφορώτατον ἄρα ὑπάρχει ὁμογενεῖς, εἰ ἐξείη, ἀπεργάζεσθαι τὰς ἐξισώσεις· ἀλλὰ μέθοδος γενικὴ ὑπὲρ τούτου ὑπάρχει οὐδεμία· προσφευκτέον οὖν ἐστι ταῖς μεταμορφώσεσιν· αἱ δέ τι καὶ ἀποτελεῖν ἔχουσαι ἐν τούτῳ κεῖνται, ἐξισῶσαι ἀμέλει μίαν τῶν τρεπτῶν, ἢ συνέκθεσιν αὐτῆς, ἢ γοῦν συνέκθεσιν ἑκατέρας, συνεκθέσει καινῆς τρεπτῆς μετὰ δεικτῶν ἀδιορίστων, οἳ διορίζονται διὰ τῆς θέσεως, ὅτι ἐστὶν ὁμογενὴς ἡ μεταμορφωθεῖσα ἐξίσωσις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐάν, φέρε, ἐξισώσεως προτεθείσης τῆς $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi + \beta\upsilon^{\nu}\chi^{\kappa}\delta\upsilon + \gamma\upsilon^{\pi}\delta\upsilon = 0$, εἰς ἣν ἀναχθῆναι ἔχει πᾶσα ἐξίσωσις τριῶν ὅρων περιεκτική, ζητηθῶσιν αἱ περιπτώσεις, καθ' ἃς αὕτη γίνεται ὁμογενής, γενέσθω $\chi = \psi^{\eta}$· καὶ δὴ ἔσται $\alpha\eta\psi^{\mu\eta+\eta-1}\delta\psi + \beta\upsilon^{\nu}\psi^{\kappa\eta}\delta\upsilon + \gamma\upsilon^{\pi}\delta\upsilon = 0$· ἵν' ἄρα γένηται αὕτη ὁμογενής, δεῖ εἶναι $\pi = \kappa\eta + \nu$, καὶ $\pi = \mu\eta + \eta - 1$, ὅθεν ἀποφέρεται

$$\eta = \frac{\nu + 1}{\mu - \kappa + 1}, \text{ καὶ } \pi = \frac{\mu\nu + \kappa + \nu}{\mu - \kappa + 1}\cdot$$

οὐκοῦν, ἐὰν οἱ δεῖκται π, κ, μ, ν, τοιοίδε ὦσιν, ὡς ἐπικρατεῖν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν, δυνατὸν ἀποτελέσαι ὁμογενῆ, καὶ ἑπομένως διακρῖναι τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ἐξισώσεων καὶ ποσοτήτων ἀπειροστῶν δευτέρας, τρίτης κτλ. τάξεως.

317. Ἡ ἄδεια τοῦ ἐν τῇ λήψει τῶν ἀπειροστῶν (32, 33) ὑποτιθέναι ὡς ἀμετάτρεπτον μίαν τινὰ ποσότητα ἐν πολ-

λοῖς τὴν ὁλοκλήρωσιν ῥᾳδιυργεῖ· ἐπεὶ μέντοι συμβαίνει ἐν τῇ λήψει τῶν ἀπειροςῶν ἀμετάτρεπτον γίνεσθαι ἀπειροςὸν, μὴ ῥᾳδιυργεῖν τὴν ὁλοκλήρωσιν· ῥητέον πρῶτον ὅπως ἐξίσωσις ἀπειροςὴ, ἐν ᾗ ὑποτέθειται μία τις ἀπειροςὴ ποσότης ἀμετάτρεπτος, τραπείη εἰς ἑτέραν, μηδὲν ἔχυσαν ποσὸν ἀμετάτρεπτον· ἐφ' ἡμῖν δὲ ἔςαι τῦ λοιπῦ ὑποθεῖναι, ἣν ἂν βυλώμεθα, ἀμετάτρεπτον· ἔςω ὖν $A\delta\chi^2 + B\delta\chi\delta\upsilon + \Gamma\delta\upsilon^2 + \Delta\delta\delta\upsilon = 0$, ἐξίσωσις δυεῖν τρεπτῶν, καὶ ἀπειροςῶν δευτέρων, περιεκτικὴ, ἐν ᾗ τὸ πρῶτον ἀπειροςὸν $\delta\chi$ τῆς ἑτέρας τῶν τρεπτῶν ὑποτέθεται ἀμετάτρεπτον· διαιρεθεῖσα τοίνυν αὕτη ἡ ἐξίσωσις διὰ $\delta\chi$, γεγράφθω ὕτως, $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \dfrac{\Gamma\delta\upsilon^2}{\delta\chi} + \Delta\delta\left(\dfrac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right) = 0$, ἥτις ἐπιεικῶς ἐςὶν ἡ αὐτὴ, εἴγε, κἂν ὑποτεθείη μόνιμον τὸ $\delta\chi$, $\delta\left(\dfrac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)$ ἐςὶν ἴσον τῷ $\dfrac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi}$· μὴ βυλομένοις δὲ εἶναι ἀμετάτρεπτον τὸ $\delta\chi$, ἔςαι $\delta\left(\dfrac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right) = \dfrac{\delta\chi\delta\delta\upsilon - \delta\upsilon\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}$. ἡ ἄρα ἐξίσωσις μεταβάλει εἰς $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \dfrac{\Gamma\delta\upsilon^2}{\delta\chi} + \Delta\left(\dfrac{\delta\chi\delta\delta\upsilon - \delta\upsilon\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}\right) = 0$, ἐν ᾗ ὐδέν ἐςιν ἀπειροςὸν ἀμετάτρεπτον.

Ἔςω $A\delta\chi^3 + B\delta\chi^2\delta\upsilon + \Gamma\delta\upsilon^2\delta\chi + \Delta\delta\upsilon^3 + E\delta\chi\delta\delta\upsilon + Z\delta\upsilon\delta\delta\upsilon + H\delta^3\upsilon = 0$, ἐξίσωσις ἐξ ἀπειροςῶν τριυσταγῶν, τῦ $\delta\chi$ ἀεὶ ἀμετατρέπτυ ὄντος· διαιρεθεῖσα ὖν αὕτη ἡ ἐξίσωσις διὰ $\delta\chi^2$ γενήσεται $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \dfrac{\Gamma\delta\upsilon^2}{\delta\chi} + \Delta\dfrac{\delta\upsilon^3}{\delta\chi^2} + E\dfrac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi} + Z\dfrac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\dfrac{\delta\delta\upsilon}{\delta\chi} + H\dfrac{\delta^3\upsilon}{\delta\chi^2} =$

ο, ἥτις ἔχει γραφῆναι ἕτως, $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \frac{\Gamma\delta\upsilon^2}{\delta\chi} +$ $\frac{\Delta\delta\upsilon^3}{\delta\chi^2} + E\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right) + Z\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\,\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right) + H\delta\left[\left(\frac{1}{\delta\chi}\right)\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)\right] = o$· πάντων δὲ τρεπτῶν γενομένων ἐν ταῖς σεσημειωμέναις ταῖς δε τῶν ἀπειροςῶν λήψεσι, πορισθήσεται ἐξίσωσις μηδὲν ἔχυσα ἀπειροςὸν ἀμετάτρεπτον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω $\delta\chi^2\delta\upsilon - \delta\upsilon^3 = \alpha\delta\chi\delta\delta\upsilon + \chi\delta\chi\delta\delta\upsilon$, ἔνθα τὸ $\delta\chi$ ἀμετάτρεπτον ὑποτίθεται· τὴν ἀρχὴν ἓν ὑδόλως καταφαίνεται, ὅπως ἂν εἴη αὕτη ἡ ἐξίσωσις ὁλοκληρώσιμος· ἀλλ' ἐὰν γένηται τρεπτὸν τὸ $\delta\chi$, γραφομένης τῆς ἐξισώσεως ὅτω, $\delta\chi\delta\upsilon - \frac{\delta\upsilon^3}{\delta\chi} = (\alpha\delta\chi + \chi\delta\chi)\,\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}\right)$, ἐξέςαι ἐν ταύτῃ τῇ σεσημειωμένῃ λήψει τῶν ἀπειροςῶν λαβεῖν ὡς ἀμετάτρεπτον τὸ $\delta\upsilon$· ὅκὅν ἔςαι $\delta\chi\delta\upsilon - \frac{\delta\upsilon^3}{\delta\chi} = -(\alpha\delta\chi + \chi\delta\chi)\frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}$, ἥτις ἀναγωγῇ γίνεται $\delta\chi^2 + \chi\delta\delta\chi + \alpha\delta\delta\chi - \delta\upsilon^2 = o$, ἧς ὁλόκληρον, ὡς εὐμαρῶς κατανοεῖται, ἔςι τὸ $\chi\delta\chi + \alpha\delta\chi - \upsilon\delta\upsilon + \Gamma\delta\upsilon = o$, προςιθεμένυ ἀμετατρέπτυ τῷ $\Gamma\delta\upsilon$ τῷ ὁλοκλήρῳ ὁμοταγῦς· ἐπανολοκληρωθεῖσα δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, γίνεται $\frac{1}{2}\chi^2 + \alpha\chi - \frac{1}{2}\upsilon^2 + \Gamma\upsilon + \Gamma' = o$.

318. Ὁ ἀποδοθεὶς ἡμῖν κανὼν (298) εἰς ὁλοκλήρωσιν ποσῶν ἀπειροςῶν, πολλὰς περιεχόντων τρεπτὰς, ἐφαρμόζεται ταῖς ἁπάσης τάξεως ἀπειροςαῖς ποσότησιν, ἐκλαμβανομένων τῶν ἀπειροςῶν $\delta\delta\chi$, $\delta\delta\upsilon$, $\delta^3\chi$, $\delta^3\upsilon$,

κτλ., ὡς τρεπτῶν παντοίων· προκείσθω γὰρ εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^3\upsilon^2\delta\delta\upsilon + 2\chi^3\upsilon\delta\upsilon^2 + (2\chi^2\upsilon + 3\upsilon^2\chi^2)\delta\chi\delta\upsilon + 2\upsilon^2\chi\delta\chi^2$, ἐν ᾗ τὸ δχ ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον· γενέσθω ἓν πρῶτον ὁλοκλήρωσις, ἐκλαμβανομένου τοῦ δδυ ὡς μόνου τρεπτοῦ· καὶ δὴ ἔσται $\chi^3\upsilon^2\delta\upsilon$· εἰλήφθω ἓν τούτου τὰ ἀπειροστά, ἅπερ ἐστὶ $3\chi^2\upsilon^2\delta\chi\delta\upsilon + 2\chi^3\upsilon\delta\upsilon^2 + \chi^3\upsilon^2\delta\delta\upsilon$, καὶ τοῦ προτεθέντος ἀφαιρεθέντα, λείπουσι $2\chi^2\upsilon\delta\chi\delta\upsilon + 2\upsilon^2\chi\delta\chi^2$· εἰλήφθω ἓν καὶ ταύτης τῆς ποσότητος τὰ ἀπειροστά, καὶ ἀφῃρήσθω τοῦ πρώτου καταλοίπου τὸ ἀπειροστὸν $2\chi^2\upsilon\delta\upsilon\delta\chi + 2\chi^2\upsilon^2\delta\chi$, καὶ ἐπεὶ μηδὲν λείπεται, συνάγεται τὸ τῆς προτεθείσης ποσότητος ὁλόκληρον εἶναι τὸ $\chi^3\upsilon^2\delta\upsilon + \chi^2\upsilon^2\delta\chi + \Gamma\delta\chi$, προστιθεμένης ἀμετατρέπτου ποσότητος τῆς $\Gamma\delta\chi$, ὁμοταγοῦς τῷ ὁλοκλήρῳ.

319. Αἱ δὲ ἀπειροσταὶ ἐξισώσεις ὁλοκληροῦνται ὡσαύτως, ὅταν, ὡς προτίθενται, ὦσιν ὁλοκληρώσιμοι· ὅπερ γνωσθήσεται, εἰ τῆς ὁλοκληρώσεως προχωρούσης, ὡς προείρηται, τὸ ἔσχατον κατάλοιπον εἴη μηδέν.

Τοῦ δ' ἐσχάτου καταλοίπου μὴ ὄντος μηδέν, οὐ παρὰ τοῦτο συναγαγεῖν δεῖ μὴ εἶναι ὁλοκληρωσίμους τὰς προτεθείσας ἐξισώσεις· ἐπεὶ γὰρ ἡ ἰσότης ἥκιστα μετατρέπεται, ἑκατέρου μέλους εἴτε πολλαπλασιαζομένου, εἴτε διαιρουμένου διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, δυνατὸν εὑρεθῆναι ποσότητα, ἥτις, πολλαπλασιάσασα τὴν ἐξίσωσιν, ποιεῖ αὐτὴν ὁλοκληρώσιμον.

Ὃ δ' ἐν γένει ὁ ποιητὴς οὗτος ἀπαιτεῖ, ἡμῖν ἐπὶ τοῦ παρόντος παραιτηθήσεται, ἀποδοθήσεται δὲ μερικώτερόν τι, ὡς νύξιν τινὰ ἐμποιῆσαι τῆς τούτου μετελεύσεως, ἄλλως λυσιτελοῦν ἐν οὐκ ὀλίγαις περιπτώσεσι τῶν μαθηματικωτέρων φυσικῶν προβλημάτων· κείσθωσαν ἓν ἐξισώσεις τοιαίδε $\delta\delta\upsilon + \alpha\delta\upsilon\delta\chi + \beta\upsilon\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, ἢ

$\delta^3\upsilon + \alpha\delta\delta\upsilon\delta\chi + \beta\delta\upsilon\delta\chi^2 + \gamma\upsilon\delta\chi^3 + X\delta\chi^3 = 0$, ἢ ἐν γένει, $\delta^n\upsilon + \alpha\delta^{n-1}\upsilon\delta\chi + \beta\delta^{n-2}\upsilon\delta\chi + \ldots \mu\upsilon\delta\chi^n + X\delta\chi^n = 0$, ἐν αἷς τὸ μὲν $\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον· αἱ δὲ α, β, γ, κτλ. εἰσὶ συνεργοὶ ἀμετάτρεπτοι, τὸ δὲ X συνέκθεσις ἡτισοῦν τοῦ X· πᾶσαι αὗται αἱ ἐξισώσεις ὁλοκληρώσιμοι γίνονται πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ ποιητὴν συγκείμενον ἐκ χ, καὶ ἀμετατρέπτων ποσῶν· ὁ δὲ ποιητὴς εὑρίσκεται οὕτω.

Κείσθω ἐξίσωσις ἡ $\delta\delta\upsilon + \alpha\delta\upsilon\delta\chi + \beta\upsilon\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, καὶ ἀναλυθήτω ὁ ὅρος $\alpha\delta\upsilon\delta\chi$ εἰς δύω τοὺς $\kappa\delta\upsilon\delta\chi$, $(\alpha - \kappa)\,\delta\upsilon\delta\chi$· οὕτω πορισθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\delta\delta\upsilon + \kappa\delta\upsilon\delta\chi + (\alpha - \kappa)\,\delta\upsilon\delta\chi + \beta\upsilon\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$· τὸ δὲ κ ὑποτίθεται ποσὸν ἀμετάτρεπτον ἀδιόριστον· τῇ δὲ ἐξισώσει οὐδενὸς ἐνδεῖ, ὡς εἶναι ὁλοκληρώσιμον, ἢ πολλαπλασιασθῆναι ἐπὶ ποιητὴν τὸν Π, ὃς ἂν εἴη συνέκθεσις τοῦ χ, καὶ ἀμετατρέπτων ποσῶν.

Τούτου τεθέντος, ἡ ἐξίσωσις $\Pi\delta\delta\upsilon + \Pi\kappa\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\,(\alpha - \kappa)\,\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\beta\upsilon\delta\chi^2 + \Pi X\delta\chi^2 = 0$, ἔσται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁλοκληρώσιμος· γεγράφθω οὖν αὐτὴ οὕτω, $\Pi\delta\delta\upsilon + \Pi\kappa\delta\chi\delta\upsilon + [\Pi\,(\alpha - \kappa)\,\delta\upsilon + \Pi\beta\upsilon\delta\chi + \Pi X\delta\chi]\,\delta\chi = 0$.

Ἀλλ' ἵν' εἴη ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁλοκληρώσιμος, ἀπαιτεῖται (303) ἐπικρατεῖν τὰς τρεῖς ἐφεξῆς ἐξισώσεις

$$\alpha'.\ \frac{\delta\Pi}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(\Pi\kappa\delta\chi)}{\delta\delta\upsilon}$$

$$\beta'.\ \frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = \frac{\delta[\Pi\,(\alpha - \kappa)\,\delta\upsilon + \Pi\beta\upsilon\delta\chi + \Pi X\delta\chi]}{\delta\delta\upsilon}$$

$$\gamma'.\ \frac{\delta(\Pi\kappa\delta\chi)}{\delta\chi} = \frac{\delta[\Pi\,(\alpha - \kappa)\,\delta\upsilon + \Pi\beta\upsilon\delta\chi + \Pi X\delta\chi)}{\delta\upsilon}$$

ἐκ τοίνυν τῆς πρώτης ἐξισώσεως πρόεισι $o = o$, ἐπεὶ καθ' ὑπόθεσιν Π ϗ κ ὀ περιέχουσιν ὔτε υ ὔτε δυ· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας κατὰ τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν, $\frac{\delta \Pi}{\delta \chi} = \Pi(\alpha - \varkappa)$·

ἐκ δὲ τῆς τρίτης $\frac{\Pi \delta \varkappa + \varkappa \delta \Pi}{\delta \chi} = \Pi \beta$, ἢ μόνον $\frac{\varkappa \delta \Pi}{\delta \chi} = \Pi \beta$, ἐπεὶ τὸ κ ὑποτίθεται ποσὸν ἀμετάτρεπτον· ἐξαρυομένης δὲ ἀφ' ἑκάστης τῶνδε τῶν ἐξισώσεων τῆς δυνάμεως τοῦ $\frac{\delta \Pi}{\Pi}$, ἔσται $\frac{\delta \Pi}{\Pi} = (\alpha - \varkappa)\, \delta \chi$, ϗ $\frac{\delta \Pi}{\Pi} = \frac{\beta \delta \chi}{\varkappa}$·

ἰσουμένων δὲ τούτων τῶν δυνάμεων, ἔσται $\alpha - \varkappa = \frac{\beta}{\varkappa}$, ἢ

$\varkappa\varkappa - \alpha\varkappa + \beta = o$· δισσαὶ ἄρα δυνάμεις τοῦ κ προκύψουσιν ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως· παρασταθεισῶν δὲ τῶνδε τῶν δυνάμεων διὰ μ, μ' ποριωθήσεται

$\frac{\delta \Pi}{\Pi} = \frac{\beta \delta \chi}{\mu}$, ϗ ἐπομένως· λογ. $\Pi = \frac{\delta \chi}{\mu}$, ἢ $\Pi\, \varepsilon^{\frac{\beta \chi}{\mu}}$·

ἡ ἄρα ἐξίσωσις Πδδυ + κτλ. γενήσεται $\delta\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \mu\delta\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + (\alpha - \mu)\, \delta\iota\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \beta\upsilon\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + X\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} = o$· εἰς δὲ τὴν ταύτης ὁλοκλήρωσιν, ὡλοκληρώσθω πρῶτον (318) ὁ ὅρος $\delta\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$, ἐκλαμβανομένου ὡς τρεπτοῦ μόνου τοῦ δδυ· ἐκοῦν ἔσται $\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$· τούτου δὲ τῶν ἀπειροστῶν ληφθέντων, ϗ ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως ἀφαιρεθέντων, καταλείπεται $(\mu + \alpha - \frac{\beta}{\mu} - \mu)$ $\delta\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \beta\upsilon\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$

$+ X\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$ · ἡ δὲ ἐξίσωσις $\kappa\kappa - \alpha\kappa + \beta = 0$, ἥτις ἐδέν ἐςιν ἀλλ' ἡ $\mu\mu - \alpha\mu + \beta = 0$, δίδωσιν $\alpha - \frac{\beta}{\mu} - \mu = 0$· λείπεται ἄρα πρὸς ὁλοκλήρωσιν ἡ ποσότης $\mu\delta\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \beta\upsilon\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + X\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$ · εἰλήφθω ἂν ταύτης τὸ ὁλόκληρον, ἐκλαμβανομένε μόνε τῦ υ ὡς τρεπτῦ· καὶ δὴ ἔςαι δεύτερος τῦ ὁλοκλήρε ποσῦ ὅρος ὁ $\mu\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$ · λαμβανομένων οὖν τέτε τῶν ἀπειροςῶν, καὶ ἀφαιρεμένων ἀπὸ τῦ πρώτε καταλοίπε, λείπεται $X\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον ἐμφαινέσθω ἐν γένει διὰ τῦ $\delta\chi O . X\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$, ὅπερ, μόνον μίαν τρεπτὴν περιέχον, ἐξέχεται τῶν κανόνων τῆς τῶν μιᾶς τρεπτῆς περιεκτικῶν ἀπειροςῶν ὁλοκληρώσεως· ἐκῦν τὸ ὁλόκληρον ἐςι $\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \mu\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \delta\chi O . X\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} = \Gamma$, ἢ $\delta\upsilon + \mu\upsilon\delta\chi + \delta\chi\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} O . X\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} = \Gamma\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}}$ · ἐπεὶ μέντοι ἐδεὶς πάρεςι λόγος, δι' ὃν ἄντις χρήσαιτο θατέρα δυνάμει τῦ κ μᾶλλον, ἢ θατέρα, ἐὰν χρησώμεθα τῇ δευτέρα, ἣν ἐδηλώσαμεν διὰ μ', ἕξομεν ἐδὲν ἧττον $\delta\upsilon +$

$\mu^{\prime}\upsilon\delta\chi + \delta\chi\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} \int \varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} \mathrm{X}\delta\chi = \Gamma^{\prime}\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}}$, ἐμφαινομένης διὰ τῦ Γ' τῆς ἐπανηκέσης τῇ ὁλοκληρώσει, καθ' ἣν ὑποτίθεται ἡ καινὴ τῦ κ δύναμις μ', ἀμετατρέπτυ ποσότητος· ἰσυμένων δὲ τῶν δυεῖν τῦ δυ δυνάμεων τῶν ἐκ τῶν δυεῖν ἐξισώσεων προκυπτυσῶν, συναχθήσεται τελευταῖον

$$\upsilon = \frac{\Gamma\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} - \Gamma\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu'}} + \varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} \int \mathrm{X}\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}}{\mu - \mu'}$$

$$- \frac{\varepsilon^{\frac{-\beta\chi}{\mu}} \int \mathrm{X}\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}}{\mu - \mu'}.$$

320. Εἰδ' εἴη ἡ ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, κατὰ τὸν αὐτὸν αὖθις ἐκτελεσθήσεται ἡ ὁλοκλήρωσις τρόπον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν ἡ $\delta^3\upsilon + \alpha\delta\delta\upsilon\delta\chi + \beta\delta\upsilon\delta\chi^2 + \gamma\upsilon\delta\chi^3 + \mathrm{X}\delta\chi^3 = 0$, γραφήσεται $\delta^3\upsilon + \kappa\delta\delta\upsilon\delta\chi + (\alpha - \kappa)\,\delta\delta\upsilon\delta\chi + \kappa^1\delta\upsilon\delta\chi^2 + (\beta - \kappa^1)\,\delta\upsilon\delta\chi^2 + \gamma\upsilon\delta\chi^3 + \mathrm{X}\delta\chi^3 = 0$, κ καὶ κ' ἀγνώςων μὲν ὄντων, ἀμετατρέπτων μέντοι· ὑποτεθείσθω ὖν, ἵν' ἡ ἐξίσωσις γένοιτο ὁλοκληρώσιμος, δεῖν πολλαπλασιασθῆναι ἐπὶ τὸν ποιητὴν Π, ὃς περιέχει χ καὶ ποσὰ ἀμετάτρεπτα, εἶτ' ὖν ὑποτεθείσθω ἡ ἐξίσωσις $\Pi\delta^3\upsilon + \Pi\kappa\delta\delta\upsilon\delta\chi + \Pi(\alpha - \kappa)\,\delta\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\kappa^1\delta\upsilon\delta\chi^2 + \Pi(\beta - \kappa^1)\,\delta\upsilon\delta\chi^2 + \Pi\gamma\upsilon\delta\chi^3 + \Pi\mathrm{X}\delta\chi^3 = 0$ ὁλοκληρώσιμος· μεταμορφωθείσης ὖν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἰς τὴν ἐφεξῆς $\Pi\delta^3\upsilon + \Pi\kappa\delta\chi\delta\delta\upsilon + [\Pi(\alpha - \kappa)\,\delta\delta\upsilon + \Pi\kappa^1\delta\upsilon\delta\chi] \times \delta\chi + [\Pi(\beta - \kappa^1)\,\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\gamma\upsilon\delta\chi^2 + \Pi\mathrm{X}\delta\chi^2]\,\delta\chi = 0$, ἡ θέσις, δι' ἣν γίνεται ὁλοκληρώσιμος, δίδωσι (303) ἓξ ἐξισώσεις, αἵτινες διὰ τὰ ὑποτεθέντα ἐπὶ τῶν κ, κ', Π ἀνάγονται εἰς τρεῖς· ἡ δὲ τελευταία ἐξίσωσις, τρεῖς μὲν προβάλει δυνάμεις τῦ κ, τρεῖς δὲ συςοίχυς τῦ κ', ϗ Π· ἐντεῦθεν δὲ, ὡς ϗ πρότερον, προκύψυσιν ἐξισώσεις τρεῖς διὰ υ, χ, δχ, δυ, ϗ δδυ· ἀποβαλλομένων ἄρα τῶν δδυ, δυ, περιαιρεθήσεται ἡ ἐσχάτη τῦ υ δύναμις, περιέχυσα χ καὶ ποσὰ μόνιμα.

321. Ἐντεῦθεν καταφανὲς, ὅ,τι χρὴ ποιεῖν ὑπὲρ τῶν ἀνωτέρων τάξεων.

Ἡ αὐτὴ δὲ μέθοδος ἐφαρμοσθείη, κἂν εἴη μείζων ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων, μὴ ὑπερβαινυσῶν τὸν πρῶτον βαθμὸν, ϗ μὴ πολλαπλασιαζομένων μήτ' ἐπ' ἀλλήλας μήτ' ἐπὶ μηδὲν ἀπειροςὸν τῶν τρεπτῶν τῶνδε, εἰ μὴ εἴη τὸ ὑποτιθέμενον ἀμετάτρεπτον ἀπειροςόν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν ὦσι δύω ἐξισώσεις $\alpha\delta\delta\upsilon + \beta\delta\delta\psi + \gamma\delta\upsilon\delta\chi + \varepsilon\delta\psi\delta\chi + \zeta\upsilon\delta\chi^2 + \vartheta\psi\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, ϗ $\alpha'\delta\delta\upsilon + \beta'\delta\delta\psi + \gamma'\delta\upsilon\delta\chi + \varepsilon'\delta\psi\delta\chi + \zeta'\upsilon\delta\chi^2 + \vartheta'\psi\delta\chi^2 + X'\delta\chi^2 = 0$· ἀναγέσθων ἓν εἰς μίαν μόνην, συναπτομένης τῆς πρώτης τῇ δευτέρᾳ, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ συνεργὸν ἀδιόριςον ϗ ἀμετάτρεπον κ· ἐν δὲ τῇ ὅλῃ ἐξισώσει διατετμήσθων ὅ,τε τῦ δυ περιεκτικὸς ὅρος ϗ ὁ τῦ δψ εἰς δύω μέρη, ὥσπερ ἀνωτέρω ἐγένετο· τέλος δὲ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ ποιητὴν ὑποτιθέμενον συνέκθεσιν τῦ χ, ϗ ποσῶν μονίμων.

322. Ὅταν ἐξίσωσις δυεῖν τρεπτῶν περιεκτικὴ ἐλλειπὴς ᾖ τῆς ἑτέρας τῶν δυεῖν πεπερασμένων μεταβλητῶν, δυνατὸν αὐτὴν ἀναγαγεῖν εἰς ἀπειροςὰ τῆς ἀμέσως ὑπερκειμένης τάξεως, ἰσυμένυ τῦ πρώτυ ἀπειροςῦ τῆς ἑτέρας τῶν τρεπτῶν τῷ τῆς δευτέρας ἀπειροςῷ, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ καινὸν ποσὸν ἄςατον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω πρὸς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\delta\delta\upsilon}{\delta\upsilon}$ $\surd(1 + \frac{\delta\upsilon^2}{\delta\chi^2}) = (\alpha\upsilon + \beta)\, \delta\chi$, ἔνθα τὸ $\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον, ἤτε μεταβλητὴ χ ἄπεισι· γενέσθω τοίνυν $\delta\upsilon = \pi\delta\chi$· ὅθεν ἔσαι $\delta\delta\upsilon = \delta\pi\delta\chi$, ἢ ἑπομένως $\frac{\delta\pi}{\pi}\surd(1 + \pi\pi) = (\alpha\upsilon + \beta) \cdot \frac{\delta\upsilon}{\pi}$, ἢ $\delta\pi \surd(1 + \pi\pi) = (\alpha\upsilon + \beta)\, \delta\upsilon$, ἧς τὸ μὲν πρῶτον μέλος ὁλοκληροῦται γεωμετρικῶς, τὸ δὲ δεύτερον, πῆ μὲν γεωμετρικῶς, πῆ δὲ λογαριθμικῶς, λογικοῦ ἀποκαθισαμένου τοῦ $\surd(1 + \pi\pi)$ κατὰ τὰ προειρημένα (291).

Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ εἰς σοιχείωσιν τῶν ἡμετέρων νεανίσκων, συνερανισθέντα ἔκ τε τῶν τοῦ Σαυρίου, ἢ Βεζουτίου, ἢ δὴ ἢ τοῦ Λακροῖου συγγραμμάτων· ὁ δὲ θέλων ἑαυτὸν ἀπαρτίσαι ἔντε τῷ τῶν ἀπειροσῶν, ἢ τῷ τῶν ὁλοκλήρων λογισμῷ, μετιέτω τούς τε εἰρημένους, καὶ τὸν Εὔλερον, τὸν Ἀλέμβερτον, ἢ ἄλλους.

ΣΕΙΡΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

ΤΗΣ ΕΝ ΓΕΝΕΙ ΦΥΣΙΚΗΣ.

Εἰσαγωγή.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ Φυσικὴ, ὡς τὸ ἔτυμον τῦ ὀνόματος δηλοῖ, γνῶσις ἂν εἴη τῆς Φύσεως· ἐπεὶ δὲ ἡ φωνὴ Φύσις τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν ἐν τῷ παντὶ ὄντων, ἃ ταῖς ἡμετέραις ὑποπίπτει αἰσθήσεσιν, ἐμφαίνει· αἱ δ' αἰσθήσεις ἡμῶν μόνων ἐξικνῦνται ἀντιλαβέσθαι τῶν ὑλικῶν· ὁρισθείη ἂν καταλληλότερον ἡ Φυσικὴ, Ἐπιςήμη τῶν κατὰ τὰ σώματα, εἴτ' ὖν τὴν ὕλην, ἰδιοτήτων. (*)

2. Κοινῆ δὲ διαιρεῖται εἴς τε τὴν ἐν γένει, ϗ εἰς τὴν κατ' εἶδος· κἀκείνη μὲν ἐςὶν ἡ γνῶσις τῶν ἐπίσης παντὶ σώματι ἐπανηκυσῶν ἰδιοτήτων· ταύτης δὲ ἔργον ἡ τῶν εἴδει διαφερόντων σωμάτων ἔρευνα· περὶ τῆς πρώτης ὖν ἡμεῖς ἐνταῦθα, ὅσα ἀποχρῶντα κρίνομεν, προανα-

(*) Ὅρα περὶ τύτων Εὐγενίυ τὰ Ἀρέσκοντα τοῖς Φιλοσόφοις, Σελ. 1 — 7.

κρύσαντες, καὶ τὰς ταύτῃ συννάυς ἐπιςήμας ὑποσυνάψαντες, τὰ τῇ κατ' εἶδος προσανήκοντα ἐν τῷ ἐσχάτῳ τόμῳ ἐκθέσθαι ἀποταμιεύσομεν.

Διακριτέον δὲ τὴν Φυσικὴν ἐπιςήμην τῆς καλυμένης Φυσικῆς Ἱςορίας· αὕτη μὲν γὰρ ἱςορικῶς περὶ τὰ φυσικὰ ὄντα ἀσχολεῖται, τὺς κυριωτέρυς αὐτῶν χαρακτῆρας ἀποδιδῦσα, δι' ὧν ἀπ' ἀλλήλων διαςέλλονται· ἐκείνη δὲ τὰς αἰτίας ἐν γένει πολυπραγμονεῖ τῶν κατὰ τὰ σώματα ἰδιοτήτων καὶ ἀλλοιώσεων· ταύταις δέ τινες καὶ τρίτην προστιθέασι τὴν καλυμένην Ἱςορίαν τῆς Φύσεως, ἥτις καθόλυ περὶ τῶν ἐν τῷ αἰσθητῷ κόσμῳ γενομένων ἀλλοιώσεων πραγματεύεται.

3. Αἱ μὲν ὖν κατὰ τὰ σώματα συμβαίνυσαι ἀλλοιώσεις Φαινόμενα λέγονται, αἱ δὲ ταῦτα προάγυσαι αἰτίαι, Δυνάμεις· ὅθεν ἡ Φυσικὴ ἀναπτύσσειν λέγεται τὰ φαινόμενα ταῦτα, ἐπειδὰν τὰς, ἐξ ὧν γεγόνασιν, ἀποδῷ δυνάμεις, εἴτ' ὖν αἰτίας· ἐπεὶ δὲ, τὰς αἰτίας καταλέγοντες τῶν φαινομένων, ἐπίτινα τέλος ἀφικνύμεθα, ἧς ὐχ οἷόν τε ἄλλην αἰτίαν ἀνευρεῖν, ἐκείνην τηνικαῦτα ἐσχάτην αἰτίαν ὀνομάζομεν· ὕτως ἐπὶ τῆς ἀντλίας, τῆς μὲν ἐν τῷ σωλῆνι ἀνόδυ τῦ ὕδατος αἰτία ἐςὶν ἡ τῦ ἐπικεχυμένυ τῷ ὕδατι ἀέρος θλίψις, ταύτης δ' αἰτία ἡ τῦ ἀέρος βαρύτης, εἴτ' ὖν ἡ ἐπὶ τὸ τῆς γῆς κέντρον αὐτῦ φορά, ἧς ὐκ ἔχομεν ἄλλην αἰτίαν ἀποδῦναι· ἐκτὸς γὰρ τυτὶ τῶν ὁρίων τῆς ἀνθρωπείυ γνώσεως· ἡ βαρύτης τοίνυν, καὶ ὅσαι τοιαῦται τῶν δυνάμεων, ἔσχαται λέγονται τῶν φαινομένων αἰτίαι.

4. Ἐπεὶ δὲ τὰ ἐν τῷ αἰσθητῷ κόσμῳ φαινόμενα κατά τινας ὡρισμένυς καὶ ἀπαρατρέπτυς κανόνας συμβαίνειν φιλῦσιν, ὡς ἐξ ὁμοίων αἰτιῶν ἐν ὁμοίαις περιπτώσεσιν ἀεὶ ὅμοια γεννᾶσθαι καὶ τὰ ἀποτελέσματα, τὺς κανόνας

τούτους *Νόμους φυσικοὺς* ἐκάλεσαν οἱ Φιλόσοφοι, ὧν οὐκ ἔστιν εἰπεῖν ὅσον ἀναγκαία ϗ χρήσιμος τοῖς φυσιολογοῦσιν ἡ γνῶσις.

5. Διττῶς δὲ ἐν τῇ Φυσικῇ (3) αἱ τῶν φαινομένων αἰτίαι ἀναπτύσσονται, ἀμέλει ἤτοι διὰ *πείρας* ἢ διὰ *λόγου*. Πεῖρα μὲν οὖν λέγεται τὸ ταῖς αἰσθήσεσιν ἀνακαλύπτειν τὰς ἐν τοῖς φυσικοῖς σώμασιν ἐπισυμβαινούσας ἀλλοιώσεις· τοῦτο δὲ ποιοῦμεν, ἤτοι ἄνευ τινὸς μεταβολῆς, ὡς ἔχουσι καταστάσεως, ἐῶντες τά, περὶ ἃ ἡμῶν ἡ θεωρία, ἢ ἑκόντες μεταβάλλομεν αὐτὰ ἐν διαφόροις περιπτώσεσιν ἐπὶ διαφόρους ἐνεργείας ἐνωθοῦντες, ἃς οὐκ ἂν ὑπῆλθον καθ' ἑαυτὰ ἄνευ τῆς παρ' ἡμῶν συνδρομῆς· καλεῖται δ' ἐκεῖνο μὲν *παρατήρησις*, τοῦτο δὲ *πείραμα*· ὧν γὰρ τὴν κατανόησιν μόνῃ παρατηρήσει οὐκ ἔστι λαβεῖν, ταῦτα πειράμασιν ἀναπτύσσομεν· οἷς δὲ χρώμεθα εἰς ἐκτέλεσίν τινος πειράματος, ταῦτα *ὄργανα* λέγονται. Ἀλλὰ μόνῃ τῇ πείρᾳ οὐδὲν ἄντις διανύσειεν, εἰμὴ συλλογισμοὶ ἐντεῦθεν συνάγοιντο περὶ τῆς φύσεως ϗ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ διὰ τῆς πείρας ἐξετασθέντος σώματος· ὅθεν ὁ φυσιολογεῖν ὀρθῶς βουλόμενος, ἐξ ὧν ἐπειράθη τε ϗ παρατετήρηκε, δι' ὀρθοῦ λόγου τὰς τῶν σωμάτων ἰδιότητας ὁρίζειν ϗ τὰς τῶν φαινομένων αἰτίας ἀνιχνεύειν ὀφείλει.

6. Ἐπειδὴ δὲ πολλάκις ἡμῖν οὐκ ἐφικτὸν πείρᾳ, οὔτε μὴν λόγῳ, φαινομένων τινῶν τὰς αἰτίας ἀποδοῦναι, ἀνάγκη τηνικαῦτα αἰτίαν τινὰ προϋποθεῖναι, ἐξ ἧς ἂν ἔχοιμεν τὰ παρατηρηθέντα συναγαγεῖν ἀποτελέσματα· καλεῖται δὲ τοῦτο *ὑπόθεσις*, ἀντὶ τῆς ἀληθοῦς αἰτίας ἡμῖν συμβάλλουσα· προσήκει δὲ τὰς ὑποθέσεις ταύτας πειράμασι τισὶν ἢ παρατηρήσεσιν ἐστηριγμένας εἶναι ϗ ἀκαταναγκάστους, ϗ οὐδενὶ τῶν γενικῶν τῆς Φύσεως νόμων ἀντιβαι-

νίσας. Ἔστωσαν οὖν ὑπ' ὄψιν οἱ ἐφεξῆς Νευτώνειοι καλούμενοι κανόνες.

7. Α΄. Ἐκείνας μόνον ὡς ἀληθεῖς αἰτίας παραδεκτέον, ὅσαι εἰσὶν ἱκαναὶ καὶ ἀπαραίτητοι εἰς ἀκατανάγκαστον, ἁπλουστάτην, καὶ εὐληπτοτάτην, φαινομένου τινὸς ἀνάπτυξιν.

Αἱ αἰτίαι δὲ ἀληθεῖς εἰσι, α΄. ἐπειδὰν αἰσθητῶς ἐν τῇ Φύσει ἀποδεικνύωνται, καὶ κατάδηλον ᾖ, ὅτι ἐν τῷ παρατηρηθέντι φαινομένῳ αὗται παροῦσαν, τῶν ἄλλων ἁπασῶν αἰτιῶν σαφῶς ἐντεῦθεν ἀποκλειομένων· β΄. ἐπειδὰν τὸ φαινόμενον μὴ μόνον κατὰ δυνατὸν τρόπον· ἀλλ' ἀριδήλως ἐντεῦθεν συνάγηται· γ΄. ἐπειδὰν ἐν διαφόροις περιπτώσεσιν αἱ αὐταὶ αἰτίαι τ' αὐτὰ παράγουσι φαινόμενα, καὶ δ΄. τέλος, ἐὰν, αἰρομένης τῆς αἰτίας, αἴρηται σὺν αὐτῇ καὶ τὸ φαινόμενον.

8. Β΄. Τοῖς ὁμογενέσιν ἀποτελέσμασι τὰς αὐτὰς ἀποδοτέον αἰτίας.

Ἐνταῦθα μέντοι προσέχειν δεῖ, μὴ, ταῖς ὁμοίαις διαφόρων φαινομένων περιπτώσεσι πλανηθέντες, τὰς αὐτὰς αὐτοῖς ἀποδῶμεν αἰτίας· οὐ ῥᾴδιον γὰρ πολλάκις τοῦ οὐσιώδους τὸ κατὰ συμβεβηκὸς διακρίνειν, τὸ τὴν ὁμοιότητα τοῖς ἑτεροειδέσι φαινομένοις παρέχον.

9. Γ΄. Τὰς τῶν σωμάτων ἰδιότητας, τὰς μηδεμιᾶς μὲν ἐπιδεκτικὰς μεταβολῆς, ἀεὶ δὲ τὰς αὐτὰς πᾶσι τοῖς παρ' ἡμῶν βασανιζομένοις σώμασι προσούσας, ὡς κοινὰς πᾶσι τοῖς σώμασιν ἰδιότητας ἐκληπτέον.

10. Δ΄. Τὰς ἐκ τῶν φαινομένων συναχθείσας θέσεις, καίτοι τινῶν ὑποθέσεων αὐταῖς ἀντιβαινουσῶν, παραδεκτέον μέντοι ὡς

ἀληθεῖς, ἢ ὡς τοῦ ἀληθοῦς ἔγγιςα ἔσας, μέχρις ἂ ἑτέροις ἐντύχωμεν φαινομένοις, ἤτοι πρὸς ἐμπέδωσιν αὐτῶν, ἢ πρὸς ἀναίρεσιν, ἐπιτηδείοις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ διαφορᾶς διαςήματος, σώματος, ϗ ὕλης.

11. Ἔκτασις, σῶμα, ϗ ὕλη, τρία ταῦτα ἀλλήλων εἰσὶ διαφέροντα.

12. Α΄. Διάςημα ἄνευ σώματος, ἢ ἄνευ ὕλης, οἷον ἄντις ἐννοήσειε τὸ πρὸ τῆς δημιȣργίας μέρος τȣ̃ ἀπείρȣ διαςήματος, ᾧ ἐντετόπιςαι, ὃν οἰκȣ̃μεν, ὁ κόσμος· ȣ̓κ ἔςιν, ȣ̓́τε σῶμα, ȣ̓́τε ὕλη.

13. Β΄. Παρὰ ταῦτα, τάτε σώματα, ϗ ἡ ὕλη, εἰσὶ κινητὰ, δυνάμενα μεταβῆναι ἀφ᾽ ἑνὸς μέρȣς τȣ̃ διαςήματος ἐφ᾽ ἕτερον· τὰ μέντοι μέρη τῆς ἐκτάσεως, ἣ καλεῖται τόπος, ἢ διάςημα, εἰσὶν ὥσπερ ἀκίνητα· κίνησις δὲ πραγματικὴ τῶν σωμάτων, ἢ τῆς ὕλης, λέγεται, ἐπειδὰν ταῦτα μέρος τȣ̃ τόπȣ, ἢ τȣ̃ διαςήματος, διατρέχωσι, τῶν τȣ̃ τόπȣ μερῶν ἀναλλοιώτων ἐν τῇ αὐτῇ αὐτῶν σχετικῇ θέσει μενόντων.

14. Γ΄. Τὰ τȣ̃ τόπȣ μέρη εἰσὶ διαχωρητὰ, ἀκωλύτως δι᾽ αὐτῶν διϊόντων τῶν σωμάτων, ἢ τῆς ὕλης· τὰ δὲ σώματα ἀδιαχώρητά εἰσιν, ἀποκλείοντα ἄλληλα τȣ̃ αὐτȣ̃ χώρȣ.

15. Δ΄. Ἡ ὕλη, ἢ τὸ σῶμα, σύνθετον ὂν, διαιρέσεώς ἐςιν ἐπιδεκτικόν· ὅτι τὰ αὐτȣ̃ μέρη εἰσὶ κινητὰ, ϗ