σότης τοιαύτη $\frac{M\psi^{\sigma\nu-1}\delta\psi + N\psi^{\sigma\nu-2}\delta\psi + \ldots T\delta\psi}{(\psi\psi + \xi\xi)^{\nu}}$,

ἥτις ὁλοκληρωθήσεται, ἀναγομένη εἰς $\frac{\delta\psi}{\psi\psi + \xi\xi}$, κατὰ τὴν ἀποδοθεῖσαν μέθοδον (272) ἐν τῷ ἀθροίσματι τῶν ὅρων, ἔνθα ψ ἔχει δείκτας ἀρτίους· οἱ δὲ ἔχοντες δείκτας περιττοὺς ὁλοκληρωθήσονται κατὰ τὰ εἰρημένα (205).

Ἅπαν ἄρα λογικὸν κλάσμα, ἤτοι ἀκριβῶς ὁλοκληροῦται, ἢ μόνον ἐξέχεται τόξων κυκλικῶν καὶ λογαρίθμων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περί τινων μεταμορφώσεων ῥᾳδιουργουσῶν τὰς ὁλοκληρώσεις.

290. Ἀμήχανον μέν ἐστιν ἐπὶ ταύτης τῆς ὕλης κανόνας γενικοὺς ἀποδοῦναι, ἡ δ' ἀνερεύνησις τῶν ποσοτήτων, ἥ τε συχνὴ χρῆσις, καὶ τοῦ μετιόντος ἡ δεξιότης, τὰ πρακτέα ἐφ' ἑκάστης περιπτώσεως ὑπαγορεύουσι· σκοπὸς δὲ τῶν, περὶ ὧν ὁ λόγος, μεταμορφώσεων, ἵνα λογικὰ τὰ προκείμενα ἀπειροστὰ γενόμενα ὁλοκληρώσεως τύχωσιν· εἰς δὲ τοῦτο ἐκθετέον τὰς ἐφεξῆς παρατηρήσεις.

291. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Α΄. Ἐὰν ὦσι ῥιζικὰ μονώνυμα, ἀνακτέον πρῶτον αὐτὰ εἰς δείκτας κλασματικούς, καὶ ἀνακτέον αὐτοὺς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· εἶτα, ἐὰν $\chi^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ ἐμφαίνῃ μίαν τῶν οὕτω προπαρασκευασθεισῶν ποσοτήτων, ὑποθετέον $\chi^{\frac{1}{\lambda}} = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi^{\lambda}$, καὶ $\delta\chi = \lambda\psi^{\lambda-1}\delta\psi$· ἀντικαταστάσει δέ, πορισθήσεται ποσότης ὅλως λο-

γική· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\frac{\delta\chi\sqrt{\chi}+\alpha\delta\chi}{\sqrt[3]{\chi^2}+\sqrt{\chi}}$, τραπήτω εἰς $\frac{\chi^{\frac{1}{2}}\delta\chi+\alpha\delta\chi}{\chi^{\frac{2}{3}}+\chi^{\frac{1}{2}}}$· τοῦτο δὲ εἰς $\frac{\chi^{\frac{3}{6}}\delta\chi+\alpha\delta\chi}{\chi^{\frac{4}{6}}+\chi^{\frac{3}{6}}}$· ἐὰν ἄρα γένηται $\chi^{\frac{1}{6}}=\psi$, ἔσται $\chi=\psi^6$, $\delta\chi=6\psi^5\delta\chi$, καὶ ἑπομένως $\frac{6\psi^8\delta\psi+6\alpha\psi^5\delta\psi}{\psi^4+\psi^3}=\frac{6\psi^5\delta\psi+6\alpha\psi^2\delta\psi}{\psi+1}$, ὅπερ εὐμαρῶς ὁλοκληροῦται διὰ τῶν εἰρημένων ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων.

292. **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Β΄.** Πᾶσα ποσότης, ἡ ἓν μόνον ῥιζικὸν πολυώνυμον ἐμφιλοχωρεῖ, τὸν δεύτερον μὴ ὑπερβαῖνον βαθμὸν, οὗ ἡ ὑπόρριζος μηδ' αὐτὴ ὑπερβαίνει τὸν δεύτερον βαθμὸν, ἀεὶ λογικὴ ἀποκαθίσταται διὰ θατέρου τῶν ἐφεξῆς κανόνων· α΄. ἀπηλλάχθω τὸ ὑπόρριζον τετράγωνον τῆς τρεπτῆς, καὶ ἐξισώσθω τῇ αὐτῇ τρεπτῇ σὺν ἢ πλὴν ἑτέρας τρεπτῆς· β΄. ἀναλυθήτω τὸ ῥιζικὸν εἰς δύω ποιητὰς, καὶ ἀναλυθὲν ἐξισώσθω θατέρῳ τῶν ποιητῶν, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ καινὴν ἄλλην τρεπτήν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}}$, γενέσθω $\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}=\chi-\psi$· ὅθεν $\chi=\frac{\psi\psi+\alpha\alpha}{2\psi}$· ἄρα $\delta\chi=\frac{(\psi\psi-\alpha\alpha)\delta\psi}{2\psi\psi}$, καὶ $\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}=\frac{\alpha\alpha-\psi\psi}{2\psi}=-\frac{(\psi\psi-\alpha\alpha)}{2\psi}$· ὅθεν $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}}=-\frac{\delta\psi}{\psi}$, ἥτις εὐχερῶς ὁλοκληροῦται.

Ἐπὶ δὲ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος δυνατὸν γενέσθαι τὸ $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, εἴτ' οὖν τὸ $\sqrt{(\chi - \alpha)(\chi + \alpha)} = (\chi - \alpha)\psi$· οὗ κοῦν τετραγωνισμῷ καὶ διαιρέσει διὰ $\chi - \alpha$, ἔσαι $\chi + \alpha = (\chi - \alpha)\psi\psi$· ὅθεν $\chi = \frac{\alpha + \alpha\psi\psi}{\psi\psi - 1}$, $\sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)} = \frac{2\alpha\psi}{\psi\psi - 1}$, $\delta\chi = \frac{-4\alpha\psi\delta\psi}{(\psi\psi - 1)^2}$· ἄρα $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)}} = \frac{-2\delta\psi}{\psi\psi - 1}$, ὅπερ ὁλοκληροῦται διὰ τῶν προαποδοθέντων ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων κανόνων.

293. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ χρήσασθαι ταύταις ταῖς μεθόδοις πρὸς εὔθυνσιν τῆς παραβολῆς, ἧς τὸ σοιχεῖον $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ ἔσι $\sqrt{(\delta\upsilon^2 + \frac{4\upsilon^2\delta\upsilon^2}{\pi^2})}$, εἴτ' οὖν $\delta\upsilon\sqrt{(1 + \frac{4\upsilon^2}{\pi^2})}$· ἀπηλλάχθω οὖν πρῶτον τὸ υ^2, γράφουσι $\frac{2\delta\upsilon}{\pi}\sqrt{(\frac{\pi^2}{4} + \upsilon^2)}$, καὶ γενέσθω $\sqrt{(\frac{\pi^2}{4} + \upsilon^2)} = \upsilon + \psi$.

294. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Γ'. Ὅταν μὴ παρῇ δεύτερος ὑπόῤῥιζος ὅρος, δυνατὸν ἐξισῶσαι τὸ ῥιζικὸν τῷ γινομένῳ ὑπὸ καινῆς μεταβλητῆς, καὶ αὐτῆς τῆς ὑποῤῥίζου· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}}$ δυνατὸν ποιῆσαι $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \chi\psi$· παρόντος δὲ καὶ δευτέρου, καὶ οὕτω δυνατὸν ταύτῃ χρήσασθαι τῇ μεταμορφώσει, ἐξαφανιζομένου πρῶτον τοῦ δευτέρου ὅρου.

295. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Δ'. Δυνατὸν τὴν μεταβλητὴν ἐξισῶσαι συνεκθέσει ὁποιαδήποτε τῆς τρεπτῆς,

ἢ καινῇ ἑτέρᾳ τρεπτῇ· ἢ συνεκθέσει καινῆς τρεπτῆς, ἐν ᾗ παραληφθείη καί τι ἀδιόριστον, συμβαλλόμενον τῇ ἀνὰ χεῖρας ὑποθέσει· ἵνα, φέρ' εἰπεῖν, μάθωμεν, ὅτε ἂν γένοιτο λογικὴ ἡ ποσότης $\chi^{\mu} \delta\chi\ (\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\pi}$, γενέσθω $(\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\pi} = \psi^{\kappa}$, τοῦ κ ἀδιορίστου ὄντος· τοιγαροῦν ἔσται

$$\alpha + \beta\chi^{\nu} = \psi^{\frac{\kappa}{\pi}},\ \chi^{\nu} = \frac{\psi^{\frac{\kappa}{\pi}} - \alpha}{\beta},\ \chi = \left(\frac{\psi^{\frac{\kappa}{\pi}} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

$$\chi^{\mu} = \left(\frac{\psi^{\frac{\kappa}{\pi}} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}},\quad \delta\chi = \frac{\kappa}{\nu\pi\beta}\ \psi^{\frac{\kappa}{\pi} - 1}\ \delta\psi$$

$$\left(\frac{\psi^{\frac{\kappa}{\pi}} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu} - 1}$$

· ἄρα $\chi^{\mu} \delta\chi\ (\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\pi} = \frac{\kappa}{\nu\pi\beta}$

$$\psi^{\frac{\kappa}{\pi} + \kappa - 1}\ \delta\chi \left(\frac{\psi^{\frac{\kappa}{\pi}} - \alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{\nu} - 1}$$

, ὅπερ ὁλοκληροῦται, ὁποῖον ἂν εἴη τὸ κ, ὅταν $\frac{\mu + 1}{\nu} - 1$ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ὑπαρκτικὸς, ἢ μηδέν· καὶ λογικὸν ἀποκαθίσταται, γενομένου $\kappa = \pi$, ὅταν $\frac{\mu + 1}{\nu} - 1$ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς λειπτικός· τοῦ δὲ π ἴσου ὄντος τῷ $\pm \frac{\xi}{2}$, τοῦ ξ ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν ὁλοχερῆ περιττὸν, ἀναγέσθω εἰς τὴν (292) παρατηρηθεῖσαν περίπτωσιν, γενομένου $\kappa = \xi$, εἴπερ $\frac{\mu + 1}{\nu}$ ἴσον εἴη τῷ $\pm \frac{\xi'}{2}$, τοῦ ξ' ἀριθμὸν ὁλοχερῆ περιττὸν ἐμφαίνοντος.

296. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὰς μὲν ὖν μεταμορφώσεις ταύτας περαιτέρω ἥκιςα προάξομεν· τυτὶ δὲ μόνον σημειώσομεν, ὅτι συχνάκις αἱ ὁλοκληρώσεις ἐξευμαρίζονται, τῆς τρεπτῆς κλάσματι τοιῷδε $\frac{1}{\psi}$ ἰσυμένης· ἐὰν ᾖ, φέρ' εἰπεῖν $\frac{\chi^{15}\delta\chi + \alpha\delta\chi}{\chi^{20} + \chi^{18}}$, γενέσθω $\chi = \frac{1}{\psi}$· καὶ δὴ ἔςαι $\frac{-\psi^3\delta\psi - \alpha\psi^{18}\delta\psi}{1 + \psi\psi}$, ὅπερ ἀναχυθήσεται διὰ διαιρέσεως εἰς σειρὰν μονωνύμων, ἢ εἰς ποσότητα τοιάνδε $\frac{A\delta\psi}{1+\psi\psi}$, ἧς γινώσκεται ἀκριβῶς τὸ ὁλόκληρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΕΤΑΡΤ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν δεικτικῶν ποσοτήτων.

297. Ἐπὶ τύτων τῶν ποσοτήτων ἕτος μόνος ὑπάρχει ὁλοκληρώσεως κανών· ἀναλυτέον αὐτὰς εἰς δύω ποιητάς, ὧν ἅτερος εἴη τὸ ἀπειροςὸν τῦ κατὰ τὸν ἕτερον λογαρίθμυ, ἢ μέρος αὐτῦ ἀμετάβλητον (50, 52), ἢ διαιρετέον διὰ τῦ ἀπειροςῦ τῦ κατὰ τὸν δεύτερον ποιητὴν λογαρίθμυ. Οὕτως εὐθὺς τὸ $\chi^{\upsilon}(\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi})$ ὁλοκληρώσιμον καταφαίνεται, εἴγε ὁ ποιητής· $\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}$ ἐςὶν ἀπειροςὸν τῦ $\upsilon\lambda\chi$, ὅς ἐςιν ὁ τῦ χ^{υ} λογάριθμος· τὸ

τοίνυν ὁλόκληρον ἔςαι $\dfrac{\chi^{\upsilon}(\delta\upsilon\lambda\chi+\dfrac{\upsilon\delta\chi}{\chi})}{\delta(\lambda\chi^{\upsilon})}+\Gamma$, τοῦτ' ἔςι

$\chi^{\upsilon}\dfrac{(\delta\upsilon\lambda\chi+\dfrac{\upsilon\delta\chi}{\chi})}{\delta\upsilon\lambda\chi+\dfrac{\upsilon\delta\chi}{\chi}}+\Gamma$, εἴτ' οὖν $\chi^{\upsilon}+\Gamma$· κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα τὸ $\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$ ἔςιν ὁλοκληρώσιμον, εἴγε δχ ἔςι τὸ ἀπειροςὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ $\varepsilon^{\alpha\chi}$, διαιρεθέντος δι' ἀτρέπτου ποσότητος· ἄρα $\mathrm{O}\,\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}=\dfrac{\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}}{\alpha\delta\chi\lambda\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon^{\alpha\chi}}{\alpha\lambda\varepsilon}$· ὅταν δὲ τὸ ε ἀριθμὸν ἐμφαίνῃ, οὗ λογάριθμός ἐςι 1, ὁ κανὼν ἀνάγεται εἰς τὸ διελεῖν τὸ προτεθὲν ἀπειροςὸν διὰ τοῦ ἀπειροςοῦ τοῦ κατὰ τὸ ε δείκτου.

Ἐὰν δὲ πρόκειται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^{\mu}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, τοῦ ε ἀριθμοῦ ὄντος, οὗ λογάριθμός ἐςι 1, καὶ τοῦ μ ἀριθμοῦ ὁλοχεροῦς ὑπαρκτικοῦ, δυνατὸν ποιῆσαι $\mathrm{O}\chi^{\mu}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}=\varepsilon^{\alpha\chi}(\mathrm{A}\chi^{\mu}+\mathrm{B}\chi^{\mu-1}+\mathrm{E}\chi^{\mu-2}+\kappa\tau\lambda+\kappa)$· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ᾖ $\chi^{2}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, δυνατὸν ὑποθεῖναι $\mathrm{O}\chi^{2}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}=\varepsilon^{\alpha\chi}(\mathrm{A}\chi^{2}+\mathrm{B}\chi+\mathrm{E})$· τῶν δὲ ἀπειροςῶν ληφθέντων (50), διαιρέσει διὰ $\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, πορισθήσεται

$$\chi^{2}=\left\{\begin{array}{r}\mathrm{A}\alpha\chi^{2}+\alpha\mathrm{B}\chi+\alpha\mathrm{E}\\ +2\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\end{array}\right\}$$

ἄρα $\mathrm{A}\alpha=1$, $\alpha\mathrm{B}+2\mathrm{A}=0$, $\alpha\mathrm{E}+\mathrm{B}=0$, τοῦτ' ἔςιν $\mathrm{A}=\dfrac{1}{\alpha}$ καὶ $\mathrm{B}=\dfrac{-2}{\alpha\alpha}$, καὶ $\mathrm{E}=\dfrac{2}{\alpha^{3}}$· τὸ ἄρα ὁλόκληρον τῆς $\chi^{2}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$ ἔςιν $\varepsilon^{\alpha\chi}\left(\dfrac{\chi^{2}}{\alpha}-\dfrac{2\chi}{\alpha^{2}}+\dfrac{2}{\alpha^{3}}\right)+\Gamma$.

Δυνατὸν δὲ εὐεπιβόλως χρήσασθαι τῷ ἀριθμῷ ε, οὗ ὁ λογάριθμός ἐστι 1 εἰς ὁλοκλήρωσιν, πολλῶν μὲν καὶ ἄλλων ποσῶν, μάλιστα δὲ τῶν λογαρίθμους περιεχόντων· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^{\nu}\delta\chi(\lambda\chi)^{\mu}$, γενέσθω $\lambda\chi = \psi = \psi\lambda\varepsilon$· ἄρα $\chi = \varepsilon^{\psi}$, $\delta\chi = \delta\psi\varepsilon^{\psi}$, καὶ ἑπομένως $\chi^{\nu}\delta\chi\,(\lambda\chi)^{\mu} = \psi^{\mu}\delta\psi\varepsilon^{(\nu-1)\psi}$, ὅπερ ὁλοκληροῦται ἐν τῇ αὐτῇ περιπτώσει, ὡς πρότερον, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως ποσοτήτων δύω, ἢ πλείους μεταβλητὰς περιεχουσῶν.

298. Ἐὰν ἀναμνησθῶμεν τοῦ πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀπειροστῶν ποσοτήτων, πολλὰς περιεχουσῶν μεταβλητὰς, ἀποδοθέντος κανόνος, ὀψόμεθα, ὅτι πρὸς ὁλοκλήρωσιν τῶν πολλὰς μεταβλητὰς περιεχόντων ἀπειροστῶν, συναπτέον ἐστὶ πάντας τοὺς ὅρους, οἷς τὸ ἀπειροστὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος ἐμπεριπέπλεκται, καὶ ὁλοκληρωτέον αὐτοὺς, ὡς εἰ μηδεμία παρὰ ταύτην εἴη τρεπτὴ, τοῦτ' ἔστιν, ὡς εἰ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ εἴησαν ἀμετάτρεπτοι· τηνικαῦτα δὲ, ἐὰν τοῦ ὁλοκλήρου τούτου ληφθῶσι τὰ ἀπειροστὰ, τρεπομένων ἄλλης μετ' ἄλλην πασῶν τῶν μεταβλητῶν, καὶ ἀφαιρεθῶσι τοῦ προτεθέντος ἀπειροστοῦ, εἰ μηδὲν λειφθείη, τὸ εὑρεθὲν ὁλόκληρον (προστιθεμένου καὶ ποσοῦ ἀμετατρέπτου) ἔσται τὸ ἀληθές· ἐὰν δὲ ᾖ λείψανον, τοῦτο οὐ μὴ περιέξει τρεπτὴν ἔχουσάν πως πρὸς τὴν ὁλοκληρωθεῖσαν· χρηστέον οὖν καὶ ἐπὶ

τέτε τε καταλοίπε τῇ αὐτῇ μεθόδῳ, καὶ ἐφεξῆς ὅτως ἐφ᾽ ἁπάσης μεταβλητῆς.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔςω $3\chi^2 \upsilon \delta\chi + \chi^3 \delta\upsilon + 5\chi\upsilon^4 \delta\upsilon + \upsilon^5 \delta\chi$· εἰλήφθωσαν ἐν ὅροι δύω οἱ $3\chi^2 \upsilon \delta\chi + \upsilon^5 \delta\chi$, οἷς ἀμέλει ἐμπεριπέπλεκται $\delta\chi$, καὶ ὡλοκληρώσθων ὡς εἴπερ υ εἴη ἀμετάτρεπτος· τὸ τοίνυν ὁλόκληρον ὑπάρχει $\chi^3 \upsilon + \upsilon^5 \chi$· ἀλλὰ ταύτης τῆς ποσότητος ληφθέντων τῶν ἀπειροςῶν, τρεπτῶν τιθεμένων τῆς τε χ καὶ τῆς υ, καὶ ἀφαιρεμένων ἀπὸ τε προτεθέντος ἀπειροςε, λείπεται μηδέν· ἄρα τὸ ὁλόκληρον ἐςι $\chi^3 \upsilon + \upsilon^5 \chi + \Gamma$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἔςω αὖθις $\chi^3 \delta\upsilon + 3\chi^2 \upsilon \delta\chi + \chi^2 \delta\psi + 2\chi\psi\delta\chi + \chi\delta\chi + \upsilon^2 \delta\upsilon$· συναφθέντων ἐν ἁπάντων τῶν ὅρων, οἷς ἐνυπάρχει τὸ $\delta\chi$, καὶ ὁλοκληρωθέντων, τῶν υ, ψ ἀμετατρέπτων τηρηθέντων, προκύψει $\chi^3 \upsilon + \chi^2 \psi + \frac{\chi^2}{2}$· τῶν δ᾽ ἀπειροςῶν ταύτης τῆς ποσότητος ἀφαιρεθέντων, τρεπτῶν ἐκληφθέντων τῶν χ, υ, ψ, καταλειφθήσεται $\upsilon^2 \delta\upsilon$· εἰλήφθω τοίνυν τὸ ὁλόκληρον τε $\upsilon^2 \delta\upsilon$, ὅπερ ἐςὶν $\frac{\upsilon^3}{3}$, καὶ προςεθείσθω τῷ προευρημένῳ· τὸ δὲ ὅλον ὁλόκληρον ἔςαι $\chi^3 \upsilon + \chi^2 \psi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\upsilon^3}{3} + \Gamma$.

299. Ἐπεὶ μέντοι ἀμήχανόν ἐςιν ὁλοκληρεν ἀεὶ ἅπαν ἀπειροςὸν, πλειόνων τρεπτῶν περιεκτικὸν, καλῶς ἔχον ἔςαι ἐκδηλῶσαι, ὅπως ἂν αἱ δυναταὶ τῶν ἀδυνάτων διαςέλλοιντο.

300. Εἴς δέ γε τὴν διάκρισιν ταύτην προληπτέον, ὡς εἰ ἐν ποσότητι τῇ Π συγκειμένῃ ἐκ δυεῖν ἄλλων ποσοτήτων χ, υ, ἀντικαταςαθῇ, πρῶτον μὲν ἀντὶ χ ποσότης τις

ἄλλη ἡ π, ἐν δὲ τῷ ἐσχάτῳ ἀποτελέσματι ἀντὶ υ εἰσαχθῇ ἡ κ, ταυτὸν ἔσαι, ὡς εἴπερ ἀντικατασαίη, πρῶτον μὲν ἀντὶ υ ἡ κ, ἑξῆς δὲ ἀντὶ χ ἡ π· ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

301. Ἐντεῦθεν ἄρα, εἰ ποσότητος τῆς Π, συγκειμένης ἐκ χ, υ ϗ ἀμετατρέπτων ποσῶν, ληφθεῖεν τὰ ἀπειροσὰ, γενομένης τρεπτῆς πρῶτον τῆς χ, τῦ δ' ἀποτελέσματος αὖθις ληφθεῖεν τὰ ἀπειροσὰ, τιθεμένης τρεπτῆς μόνης τῆς υ, ταὐτὸν ἔσαι ὡς εἰ πρῶτον ληφθεῖεν τὰ ἀπειροσὰ, θεωρυμένης μόνης τῆς υ τρεπτῆς, ἑξῆς δὲ λειφθεῖεν τὰ τῦ ἀποτελέσματος, ἐκληφθείσης ὡς μόνης μεταβλητῆς τῆς χ· κείσθω γὰρ, τεθέντος πρῶτον ἀντὶ χ τῦ $\chi+\delta\chi$, τὸ Π γενέσθαι Π'· ἔσαι ἓν τὸ ἀπειροσὸν Π — Π· κείσθω αὖ ἀντὶ υ, τεθέντος τῦ $\upsilon+\delta\upsilon$, τὸ Π' γενέσθαι Π'', τὸ δὲ Π, Π''', ὥσε τὸ Π' — Π τραπέσθαι εἰς Π'' — Π'''· ἔσαι τοίνυν δεύτερον ἀπειροσὸν τὸ Π'' — Π''' — Π' + Π.

Γενέσθωσαν ἤδη ἐναντίως αἱ ἀντικαταςάσεις, ϗ ἐπεὶ, ἀντικατασαθέντος τῦ $\upsilon+\delta\upsilon$ ἀντὶ υ ἐν τῷ Π, τὸ Π γίνεται Π''', ἔσαι Π''' — Π ὡς πρῶτον ἀπειροσὸν, ὑποτεθέντος τῦ υ μεταβλητῦ· ἐὰν ἓν ἤδη ἀντικατασαθῇ $\chi+\delta\chi$ ἀντὶ χ ἐνταύτῃ τῇ ποσότητι, τὸ μὲν Π γίνεται Π', ὥσπερ ἀνωτέρω, τὸ δὲ Π''' (300), Π''· ὥσε τὸ Π'' — Π''' γίνεσθαι Π'' — Π'· τὸ ἄρα δεύτερον ἀπειροσὸν ἔσεται Π'' — Π' — Π''' + Π τ' αὐτὸν ἀκριβῶς, ὥσπερ καὶ πρότερον.

Τύτυ τεθέντος, ἐπινοήσωμεν ὡς εἴπερ Α παρεμφαίνοι ποσότητα, συγκειμένην ἐκ χ ϗ υ, τὸ $\frac{\delta A}{\delta\upsilon}\,\delta\upsilon$ ἐμφαίνει τὸ τῆς Α ἀπειροσὸν, λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης μεταβλητῆς τῆς υ, τὸ δὲ $\frac{\delta A}{\delta \chi}\delta\chi$, τὸ τῦ αὐτῦ A ἀπειροςὸν, ὑποτιθεμένης τρεπτῆς τῆς υ· ὡσαύτως τὸ $\frac{\delta\delta A}{\alpha\chi\delta\upsilon}$, $\delta\chi\delta\upsilon$ ἐμφανεῖ, ὅτι ληφθήσεται πρῶτον τὰ ἀπειροςὰ τῦ A, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, εἶτα ληφθήσεται τὰ τῦ ἀποτελέσματος ἀπειροςὰ, γενομένης μόνης τρεπτῆς τῆς υ.

302. Τέτων τεθέντων, ἔςω $A\delta\chi + B\delta\upsilon$ ἀπειροςὸν ἀκριβὲς, ϗ M τὸ αὐτῦ ὁλόκληρον· ἔςαι ἄρα $\frac{\delta M}{\delta\chi}\delta\chi + \frac{\delta M}{\delta\upsilon}\delta\upsilon = A\delta\chi + B\delta\upsilon$· ἄρα $\frac{\delta M}{\delta\chi} = A$, ϗ $\frac{\delta M}{\delta\upsilon} = B$· ἄρα ὕτω $\frac{\delta\delta M}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta A}{\delta\upsilon}$, ϗ $\frac{\delta\delta M}{\delta\upsilon\delta\chi} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$· ἀλλὰ προδέδεικται (301), ὅτι $\frac{\delta\delta M\delta\chi\delta\upsilon}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta\delta M\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon\delta\chi}$· ἄρα $\frac{\delta\delta M}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta\delta M}{\delta\upsilon\delta\chi}$, ϗ $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$, τῦτ᾽ ἔςιν, ἐὰν ᾖ $A\delta\chi + B\delta\chi$ ἀπειροςὸν πλῆρες, τὸ τῦ A ἀπειροςὸν λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς υ, ϗ διαιρυμένης διὰ δυ, ἴσον ἔςαι τῷ τῆς B ἀπειροςῷ, λαμβανομένῳ, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, ϗ διαιρυμένης διὰ δχ· ὕτως $\frac{1}{3}\upsilon^3\delta\chi + \chi\upsilon^2\delta\upsilon$ ἔςιν ἀπειροςὸν ἐντελὲς, εἴγε $\frac{\delta(\frac{1}{3}\upsilon^3)}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(\chi\upsilon^2)}{\delta\chi}$. τὸ μὲν γὰρ πρῶτον μέλος ἀνάγεται εἰς $\frac{\upsilon^2\delta\upsilon}{\delta\upsilon}$, θάτερον δὲ εἰς $\frac{\upsilon^2\delta\chi}{\delta\chi}$· τὐναντίον δὲ τὸ $\chi\upsilon\delta\chi + \alpha\chi\delta\upsilon$ ὐκ ἔςιν ὁλο-

κληρώσιμοι, ἐπεὶ τὸ $\frac{\delta(\chi\upsilon)}{\delta\upsilon}$ ἐκ ἔςιν ἴσον τῷ $\frac{\delta(2\chi)}{\delta\chi}$.

303. Εἰ δ' ἐνείειν πλείω τῶν δυεῖν τρεπτῶν τῷ προκειμένῳ ἀπειροςῷ, τῦτ' ἔςιν εἴπερ εἴη τοιῦδε σχήματος $A\delta\chi + B\delta\upsilon + \Gamma\delta\psi$, ἵν' ὁλοκληρωθῇ, δεῖ εἶναι $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$, $\frac{\delta A}{\delta\psi} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi}$, $\frac{\delta B}{\delta\psi} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\upsilon}$· δυνατὸν γὰρ ἄλλην μετ' ἄλλην ἐκδέξαϑαι τὰς ψ, υ, χ, ὥσπερ ἀμετατρέπτυς· ἐ) δὴ τὸ ἀπειροςὸν, ὅπερ ἕξει μόνον δύω ὅρυς (ἐκ γὰρ ταύτης τῆς ὑποθέσεως ἔςιν ἤτοι $\delta\psi = 0$, ἢ $\delta\upsilon = 0$, ἢ $\delta\chi = 0$) ἔςαι ἐ) αὐτὸ ἀπειροςὸν ἐντελὲς, εἴπερ εἴη τοιῦτο τὸ προτεθέν· ἕξει ἄρα ἐφ' ἑκάςης τέτων τῶν περιπτώσεων τὰς ἰδιότητας τῶν ἐντελῶν ἀπειροςῶν, τῶν δύω τρεπτὰς περιεχόντων· ἐντεῦθεν εὐχερῶς πάνυ εὑρεθήσονται αἱ θέσεις ὑπὲρ ἀπειροςῦ, πλείυς τρεπτὰς περιέχοντος.

304. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἔςω Π ποσότης ἄγνωςος, συγκειμένη ἐκ χ, υ, ἐ) ποσῶν ἀμετατρέπτων, ἐ) ἔςω γνωςὸν αὐτῆς τὸ ἀπειροςὸν $A\delta\chi$, λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης τρεπτῆς τῆς υ· βυλομένοις δ' εὑρεῖν τὸ ὅλον τῆς Π ἀπειροςὸν ὑποτεθήσεται τῦτο ὂν $A\delta\chi + B\delta\upsilon$· τηνικαῦτα ἐν ἔςαι τὸ B τοιῦτον, ὥςε ὑπάρχειν $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$· ἄρα $\delta B = \frac{\delta A}{\delta\upsilon}\delta\chi$· γενέϑω τοίνυν ὁλοκλήρωσις, τηρυμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, εἴγε μόνη ἡ χ ὑποτέθειται τρεπτὴ ἐν τῷ B· ἔςαι ἄρα $B = O\frac{\delta A}{\delta\upsilon}\delta\chi$· ἄρα $B\delta\upsilon = \delta\upsilon . O . \frac{\delta A}{\delta\upsilon}\delta\chi$· ἀλλ' ἐπείπερ $A\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀπειροςὸν τῆς Π, λαμ-

βανόμενον, ὑποτιθεμένης τῆς x μόνης ὡς τρεπτῆς, ἔςαι $\Pi = \text{O}A\delta x$, τῆς ὁλοκληρώσεως γινομένης ἐκ τῦ ὑποτεθῆναι μόνην τρεπτὴν τὴν x· τὸ ἄρα πλῆρες ἀπειροςὸν τῆς Π, εἴτ' οὖν τὸ $\text{O}.A\delta x$ ἔςιν $= A\delta x + \delta\upsilon \cdot \text{O}.\frac{\delta A}{\delta\upsilon} \cdot \delta x$, ἔνθα ἡ τῦ $\text{O}.\frac{\delta A}{\delta\upsilon}$ ὁλοκλήρωσις γενήσεται, τηρυμένης ὡς ἀμετατρέπτυ τῆς υ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Ἀπειροςῶν Ἐξισώσεων.

305. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** Ἐξίσωσιν ἀπειροςὴν, δύω τρεπτὰς (x, υ) περιέχυσαν, ἐν ἑκατέρῳ μέλει μίαν μετὰ τῦ ἰδίυ αὐτῆς ἀπειροςῦ, ὁλοκληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ὡλοκληρώσθω ἑκάτερον μέλος διὰ τῶν ἀποδοθέντων κανόνων εἰς ὁλοκλήρωσιν τῶν μιᾶς μόνης τρεπτῆς περιεκτικῶν ἀπειροςῶν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\alpha x^{\mu}\upsilon^{\nu}\delta x = \beta\upsilon^{\kappa}x^{\rho}\delta\upsilon$, παριςῶσα πάσας τὰς ἀπειροςὰς ἐξισώσεις, τὰς δυοῖν ὅρων περιεκτικάς· ἀποκεκρίσθων αἱ ἀδιόριςοι, διαιρυμένης τῆς ἐξισώσεως διὰ υ^{ν}, καὶ x^{ρ}· ὅθεν ἔςαι $\alpha x^{\mu-\rho}\delta x = \beta\upsilon^{\kappa-\nu}\delta\upsilon$, ἧς ὁλόκληρον προφανῶς ἐςὶ τὸ

$$\frac{\alpha x^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1} = \frac{\beta\upsilon^{\kappa-\nu+1}}{\kappa-\nu+1} + \Gamma.$$

306. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** Θατέρυ, ἢ ἑκατέρυ, μέλυς τῶν τῆς ἐξισώσεως γεωμετρικῶς μὴ ὁλοκληρυμένυ, τῆς δὲ ἐξισώσεως γεωμετρικῆς ὑπάρχειν δυναμένης, ἢ γῦν ἀναχθῆναι εἰς σχῆμα γεωμετρικῆς, εὑρεῖν ὁπότε τῦτο δυνατῶς ἔχει.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν ἐν τῇ προεκτεθείσῃ ἐξισώσει ᾖ $\mu - \rho = -1$, ϗ $\kappa - \nu = -1$, ἡ ἀπειροςὴ ἐξίσωσις τρέψεται εἰς $\frac{\alpha\delta\chi}{\chi} = \frac{\beta\delta\upsilon}{\upsilon}$, ἧς ἑκάτερον μέλος διὰ μόνων τῶν λογαρίθμων ὁλοκληρωθῆναι δύναται· ὡς εἶναι $\alpha\lambda\chi = \beta\lambda\upsilon + \lambda\Gamma$ (*)· ἡ ὖν ἐξίσωσις αὕτη δυνατῶς ἔχει γενέσθαι γεωμετρικὴ, γραφομένη ὕτω $\lambda\chi^{\alpha} = \lambda\upsilon^{\beta} + \lambda\Gamma$, εἴτ' ὖν $\lambda\chi^{\alpha} = \lambda\Gamma\upsilon^{\beta}$· ἐὰν ὖν ὗτοι οἱ δύω λογάριθμοι ἴσοι ὦσιν· αἱ, αἷς ἐπανήκυσι ποσότητες, ϗ αὗται ἐξ ἀνάγκης ἴσαι ἔσονται· ἄρα $\chi^{\alpha} = \Gamma\upsilon^{\beta}$, ἐξίσωσις γεωμετρική.

Ἐὰν δὲ ᾖ μόνον $\kappa - \nu = -1$, ἡ ἀπειροςὴ ἐξίσωσις ἔςαι $\alpha\chi^{\mu-\rho}\delta\chi = \frac{\beta\delta\upsilon}{\upsilon}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἔςιν $\frac{\alpha\chi^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1} = \beta\lambda\upsilon + \lambda\Gamma$· δυνατὸν μέντοι ἀπονεμηθῆναι ταύτῃ τῇ ἐξισώσει σχῆμα γεωμετρικὸν, πολλαπλασιαζομένου μὲν τοῦ πρώτου μέλους ἐπὶ $\lambda\epsilon$, τῦ δὲ ϵ ἀριθμὸν δηλῦντος, ὗ ὁ λογάριθμος ἔςιν $= 1$· τηνικαῦτα γὰρ ἥκιςα μεταβαλεῖ ἡ ἐξίσωσις· ἔςαι ἄρα $\frac{\alpha\chi^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1}\lambda\epsilon = \beta\lambda\upsilon + \lambda\Gamma$, ἢ (γενομένυ $\mu - \rho + 1 = \pi$) $\lambda\epsilon\frac{\alpha\chi^{\pi}}{\pi} = \lambda\Gamma\upsilon^{\beta}$, καὶ ἐπομένως $\epsilon^{\frac{\alpha\chi^{\pi}}{\pi}} = \Gamma\upsilon^{\beta}$· τῦ λοιπῦ τοίνυν διὰ ϵ δηλωθήσεται ἀριθμὸς, ὗ ὁ λογάριθμός ἐςι 1.

(*) *Παντὶ ἐφεῖται ὑποθεῖναι τὴν ἀμετάτρεπτον ποσότητα ὡς ὖσαν λογάριθμον.*

Κείσθω αὖθις ἐξίσωσις $\nu\delta\chi = \frac{\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$, ἧς τὸ δεύτερον μέλος ἐμφαίνει ςοιχεῖον τόξȣ κύκλȣ, ȣ̔ ψ μὲν ἐςὶ τὸ ἡμίτονον, 1 δὲ ἡ ἀκτίς· ψ ἄρα ἐςὶ τὸ ἡμίτονον τȣ̃ Ο $\frac{\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$, τȣ̃τ' ἐςι τȣ̃ Ο$.\nu\delta\chi$, εἴτ' ȣ̃ν τȣ̃ $\nu\chi + \Gamma$· ἔςιν ἄρα ὁλόκληρον τὸ $\psi = \text{ημ}.(\nu\chi + \Gamma)$· ὡσαύτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\nu\delta\chi = \frac{-\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$ συναχθήσεται $\psi = \text{συνημ}.(\nu\chi + \Gamma)$.

Ὁμοίως, ἐπεὶ $\frac{\delta\psi}{1+\psi\psi}$ ἐμφαίνει ςοιχεῖον τόξȣ κύκλȣ, ȣ̔ 1 μέν ἐςιν ἡ ἀκτίς, ψ δὲ ἡ ἀπτομένη, ἐὰν ὑπάρχῃ $\nu\delta\chi = \frac{\delta\psi}{1+\psi\psi}$, συνάγεται $\psi = \text{απ}.(\nu\chi + \Gamma)$· ἐὰν δὲ ᾖ $\nu\delta\chi = \frac{\beta\delta\psi}{\alpha + \zeta\psi\psi}$, ἵν' ἀναχθείη εἰς τὸ πρότερον σχῆμα, γενέσθω $\psi = \mu\upsilon$, τȣ̃ μ συνεργȣ̃ ἀμετατρέπτȣ ὄντος· καὶ δὴ ἔςαι $\nu\delta\chi = \frac{\beta\mu\delta\upsilon}{\alpha+\zeta\mu^2\upsilon^2}$· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ $\zeta\mu^2 = \alpha$, ἔςαι $\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}$· ὅθεν πρόεισι $\nu\delta\chi = \beta \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}\delta\upsilon}{\alpha + \alpha\upsilon\upsilon}$· ὅθεν $\frac{\delta\upsilon}{1+\upsilon\upsilon} = \frac{\nu}{\beta}\delta\chi\sqrt{\alpha\zeta}$· ἄρα υ, ἢ $\frac{\zeta}{\mu}$, ἢ $\psi\sqrt{\frac{\zeta}{\alpha}} = \text{απ}.(\frac{\nu}{\beta}\chi\sqrt{\alpha\zeta} + \Gamma)$· ἄρα $\psi = \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}\cdot \text{απ}(\frac{\nu}{\beta}\chi\sqrt{\alpha\zeta} + \Gamma)$.

307. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τοῖς τύποις ημ. $(\nu\chi + \Gamma)$, απ. $(\nu\chi + \Gamma)$, τοῖς ἀρτίως εὑρημένοις, τὸ $\nu\chi + \Gamma$ ἐμφαίνει ἀπολύτως μῆκος τοῦ τόξου, διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος, 1 παριςαμένου· ἀλλ' ἐπείπερ εὐπετέςερόν ἐςι χρήσασθαι τοῖς τῶν μοιρῶν ἀριθμοῖς, ἢ αὐταῖς τοῖς μήκεσιν, ὁπηνίκ' ἂν ὑπαντῶσι τοιάδε τόξα, ἐκτιμητέον αὐτὰ εἰς μοίρας· ὅπερ εὐμαρῶς ἀποτελεῖται, διαιρουμένων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τῆς ἀκτῖνος μερῶν, ἃ περιέχει μοῖρα μία, τοῦτ' ἔςι διὰ 0,0174533, ἢ (ὃ ταὐτὸν) πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 57,2974166. Τὸ γὰρ ἡμίτονον τόξου, ἔχοντος μῆκος β, ἢ τὸ ἡμίτονον τόξου, ἔχοντος ἀριθμὸν μοιρῶν, ἐμφαινόμενον διὰ $\beta \times 57,2974166$, ταὐτὸν δήπου πέφυκε.

308. Ἐὰν ᾖ $\frac{\nu\delta\chi}{\sqrt{(1-\chi\chi)}} = \frac{\delta\upsilon}{(1-\upsilon\upsilon)}$, ἧς ἑκάτερον μέλος ἐμφαίνει ςοιχεῖα δυοῖν τόξων, ἐχόντων πρὸς ἄλληλα :: 1 : ν, κ̀ ὧν τὰ ἡμίτονά εἰσι χ, υ· τηνικαῦτα τοίνυν εἰς ὁλοκλήρωσιν γενέσθω ἑκάτερον μέλος λογικὸν, ὑποτιθεμένου, ὑπὲρ μὲν τοῦ πρώτου, $\sqrt{(1-\chi\chi)} = \chi\sqrt{(-1)} - \psi$, ὑπὲρ δὲ θατέρου, $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = \upsilon\sqrt{(-1)} - \tau$· ἡ δ' ἐξίσωσις μεταβάλλει εἰς $\frac{\nu\delta\psi}{\psi} = \frac{\delta\tau}{\tau}$, ἧς ὁλόκληρόν ἐςι $\nu\lambda\psi + \lambda\tau + \lambda\Gamma$, ὅθεν ἀποφέρεται $\Gamma\tau + \psi^{\nu}$· ἀντικαθιςαμένων δὲ ἀντὶ ψ κ̀ τ τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, $\Gamma[\upsilon\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}] + [\chi\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\chi\chi)}]^{\nu}$, ἥτις ἐν γένει ἐμφαίνει τὸν λόγον δύω ἡμιτόνων χ, υ δυοῖν τόξων πολλαπλῶν ἀλλήλων.

Ἵνα δὲ χρησώμεθα ταύτῃ τῇ ἐξισώσει, διοριςέον πρῶτον τὴν μόνιμον Γ· ὑποτεθείσθων οὖν (ὥσπερ κ̀ δυνατὸν ὑπάρχει) ἑκάτερα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχόμενα· τηνικαῦτα τοίνυν τό,τε χ καὶ τὸ υ ἅμα ἐξουδενωθῆναι ὀφείλουσιν· ἐν ταύτῃ μέντοι τῇ περιπτώσει, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $-\Gamma\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^{\nu}$, εἴτ' οὖν $-\Gamma = (-1)^{\nu}$· ἀλλὰ $(-1)^{\nu}$ ἐστι $+1$, ἢ -1, ὡς ἂν ἔχον τύχοι λείψεως ἢ ὑπάρξεως τὸ ν· ἄρα $-\Gamma = \pm 1$, καὶ $\Gamma = \mp 1$, τοῦ μὲν $-$ κρατοῦντος, ἡνίκα τὸ ν ἐστιν ἄρτιος, τοῦ δὲ $+$, ἡνίκα περιττὸς ἀριθμός· ἄρα τελευταῖον $\mp[\upsilon\sqrt{(-1)}-\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}] = [\chi\sqrt{(-1)}-\sqrt{(1-\chi\chi)}]^{\nu}$.

Ἐν ἑκάστῃ μερικωτέρᾳ περιπτώσει δυνατὸν ἀεὶ ἐξαφανίζειν τὰς ἐπιπλάστους ποσότητας· ὁ δὲ ἀπλούστερος τρόπος ἐξισῶσαί ἐστι τῷ μηδενὶ (μετὰ τὸ μεταθεῖναι πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ θάτερον μέλος) τὸ ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων· τηνικαῦτα οὖν ἡ κατάλοιπος ἐξίσωσις φανήσεται διαιρέσεως οὖσα ἐπιδεκτικὴ διὰ $\sqrt{(-1)}$, καὶ ἔσεται ἡ αὐτὴ τῇ συγκροτηθείσῃ, ἰσωθέντος τῷ μηδενὶ τοῦ τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων ἀθροίσματος· ἐὰν, φέρε, γένηται $\nu = 2$, ἔσται $-\upsilon\sqrt{(-1)}+\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = -\chi\chi - 2\chi\sqrt{(-1)}.\sqrt{(1-\chi\chi)} + 1 - \chi\chi$, εἴτ' οὖν $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} + 2\chi\chi - 1 + 2\chi\sqrt{-1}.\sqrt{(1-\chi\chi)} - \upsilon\sqrt{(-1)} = 0$· ἰσουμένου ἄρα τῷ μηδενὶ τοῦ τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων ἀθροίσματος, ἔσται $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} + 2\chi\chi - 1 = 0$· ἡ δὲ ὅλη ἐξίσωσις ἀναχθήσεται εἰς $2\chi\sqrt{(-1)}.\sqrt{(1-\chi\chi)} - \upsilon\sqrt{(-1)} = 0$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ $\sqrt{(-1)}$, δίδωσι $2\chi\sqrt{(1-\chi\chi)} - \upsilon = 0$, εἴτ' οὖν $\upsilon = 2\chi\sqrt{(1-\chi\chi)}$· ἐὰν οὖν τετραγωνισθῇ αὕτη τε ἡ ἐξίσωσις, καὶ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} + 2\chi\chi - 1 = 0$, ἢ γοῦν ἡ $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = 1 - 2\chi\chi$, τὸ αὐτὸ ἀποτελεσθήσεται.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δυνατὸν εὑρεῖν τὰ συνημίτονα ϗ τὰς ἀπτομένας τῶν πολλαπλῶν τόξων· ὑπὲρ ἓν τῶν ἀπτομένων ὁλοκληρωθήσεται τὸ $\frac{\nu\delta\chi}{1+\chi\chi} = \frac{\delta\upsilon}{1+\upsilon\upsilon}$, ἀναλυομένȣ τȣ̃ $1+\chi\chi$ εἰς $(1+\chi\sqrt{(-1)})\,(1-\chi\sqrt{(-1)})$, ϗ τȣ̃ $1+\upsilon\upsilon$ εἰς $(1+\upsilon\sqrt{(-1)})\,(1-\upsilon\sqrt{(-1)})$, ϗ τῶν ἄλλων διανυσθέντων, ὡς εἴρηται ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων.

309. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ἐνταῦθα δὲ ἐνδιατρίβȣσιν ἐκθετέον, ἧς ποτ᾽ ἂν εἴη χρήσεως τό,τε ἡμίτονον ϗ τὸ συνημίτονον τόξȣ τινός· ἔςω ȣ̃ν $\delta\chi = \frac{\delta\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}}$ ἐξίσωσις παριςῶσα τὸν τȣ̃ χ τόξον πρὸς τὸ αὐτȣ̃ ἡμίτονον υ λόγον· ἐὰν τοίνυν γένηται $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = \upsilon\sqrt{(-1)} - \psi$, ποριθήσεται $\delta\chi = \frac{-\delta\psi}{\psi\sqrt{(-1)}}$, ἢ $\frac{\delta\psi}{\psi} = -\delta\chi\sqrt{(-1)}$, ἧς τὸ ὁλόκληρόν ἐςι $\lambda\psi = -\chi\sqrt{(-1)} + \lambda\Gamma$, ἢ $\lambda\psi = -\chi\sqrt{(-1)}\,\lambda\varepsilon + \lambda\Gamma$, ὅθεν $\psi = \Gamma\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$, ϗ τεθείσης ἀντὶ ψ τῆς αὐτȣ̃ δυνάμεως, ποριθήσεται $\upsilon\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = \Gamma\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$· ἡ δὲ μόνιμος Γ προσδιοριωθήσεται, εἰ παρατηρηθείη, ὅτι τό,τε τόξον χ, ϗ τὸ αὐτȣ̃ ἡμίτονον ἅμα ἐξȣδενωθήσονται· ἔςαι ἄρα $-\sqrt{1} = \Gamma$· ἄρα $\upsilon\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = -\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$, ϗ ἑπομένως $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = \upsilon\sqrt{(-1)} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$· τετραγωνισμῷ τοίνυν ϗ ἀναγωγῇ ποριθήσεται $\upsilon = \frac{1-\varepsilon^{-2\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}\,.\,\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}} =$

$\frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$· ἐπεὶ ἄρα υ ἐςὶν ἡμίτονον τοῦ χ, ἔςαι ημ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$. ἐὰν δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{(1 - \upsilon\upsilon)} = \upsilon\sqrt{(-1)} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$ τεθῇ ἀντὶ υ ἡ αὐτοῦ ἤδη εὑρημένη δύναμις, πορισθήσεται $\sqrt{(1 - \upsilon\upsilon)}$ τοῦτ' ἔςι συν. ημ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}} = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2}$· ἄρα συνημ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2}$· ἐπανίωμεν οὖν ἐπὶ τὴν τῶν ἐξισώσεων ὁλοκλήρωσιν.

310. Ὅταν αἱ ἀδιόριςοι μὴ ὦσι διακεκριμέναι ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως, πρὶν ἢ διακρίνειν αὐτὰς ἐπιχειρῆσαι, σκεπτέον μὴ ἡ ἐξίσωσις, ὡς ἔχουσά ἐςι, τύχῃ ὁλοκληρώσεως οὖσα ἀνεπίδεκτος· τουτὶ δὲ γνωσθήσεται (302) ἐξετάσασιν, εἴπερ $\frac{\delta A}{\delta \chi} = \frac{\delta B}{\delta \upsilon}$, ταύτην τὴν ἐξίσωσιν παρισώσης καθ' ὑπόθεσιν τῆς $A\delta\chi + B\delta\upsilon = 0$· ταύτης δὲ ἐπικρατέσης τῆς θέσεως, γενήσεται ἡ ὁλοκλήρωσις, ὥσπερ εἴρηται (298).

311. Ἀλλὰ γὰρ δυνατὸν, τὴν μὲν θέσιν ταύτην μὴ ἐπικρατεῖν, τὴν δ' ἐξίσωσιν οὐδὲν ἧττον εἶναι ὁλοκληρώσιμον· δεῖ μέντοι πολλαπλασιάζειν αὐτὴν ἐπὶ ποιητήν τι-

να κατάλληλον σύνθετον ἐκ χ ϗ υ ϗ ἀμετατρέπτων ποσοτήτων· ἔςω Π ὗτος ὁ ποιητής· τηνικαῦτα ὖν ΑΠδχ + ΒΠδυ = ο ἔςαι ἀπειροςὸν τέλειον· δεῖ δὴ ὑπάρχειν $\frac{\delta(A\Pi)}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(B\Pi)}{\delta\chi}$· τὸ ἄρα ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν ὑπὲρ τῆς Π συνέκθεσιν ἐκ χ, ϗ υ ϗ ἀμετακοιήτων ποσῶν· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ζήτημα τόδε μακρᾶς ἐςὶν ἐρεύνης δεόμενον, ζητητέον τὴν Π περιέχουσαν μόνον χ ϗ ἀμετατρέπτους, ἢ γοῦν μόνον υ ϗ ἀμετατρέπτους ποσότητας· ὑποτεθείσθω ὖν ἡ Π περιέχουσα μόνον χ· πορισθήσεται ἄρα ἁπλῶς $\Pi\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \Pi\frac{\delta B}{\delta\chi}$· ὅθεν $\frac{\delta\Pi}{\Pi} =$

$$\frac{\left(\frac{\delta A}{\delta\upsilon} - \frac{\delta B}{\delta\chi}\right)}{B}\delta\chi$$

· ῥαδίως ἄρα εὑρεθήσεται τὸ Π, ἐὰν τὸ

$$\frac{\left(\frac{\delta A}{\delta\upsilon} - \frac{\delta B}{\delta\chi}\right)}{B}$$

ἀναχθῇ εἰς μίαν μόνην τοῦ χ συνέκθεσιν, ὥσπερ ἐπάναγκες τὸ Π, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὑπάρχειν μίαν μόνην τοῦ χ συνέκθεσιν.

Δυνατὸν ἔτι εὑρεῖν τὸν ποιητὴν, εἴπερ ὗτος συγκέοιτο ἐκ συνεκθέσεως τοῦ χ, πολλαπλασιαζομένης, ἢ διαιρουμένης διὰ γνωςῆς τοῦ υ συνεκθέσεως.

312. Διὰ ταύτης ὖν τῆς μεθόδου δυνατὸν ὁλοκληρῶσαι ἅπασαν ἐν γένει ἐξίσωσιν τοιουτώδη $X\upsilon^{\kappa}\delta\upsilon + X'\upsilon^{\kappa+1}\delta\chi + X''\upsilon^{\rho}\delta\chi = o$, τῶν μὲν Χ, Χ', Χ'' οἱασοῦν συνεκθέσεις τοῦ χ, τῶν δὲ κ, ρ δείκτας ὁςτινασοῦν ἐμφαινόντων: δυνατὸν ὖν ζητεῖν, εἰ μὴ γίνοιτο ὁλοκληρῶσι-

μος, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ποιητὴν τοιῦτον $\Pi\upsilon^{\nu}$, τῦ Π συνεκθέσεως ὄντος τῆς χ, ἐ τῦ ν δείκτυ ἀδιορίςυ· ἐ εὑρεθήσεται ὁλοκληρυμένη, εἴπερ ὑποτεθείη $\nu = -\rho$· ἁπλύςερον μέντοι ὑπάρχει ἀναγαγεῖν ἅπασαν ἐξῆς τὴν ἐξίσωσιν εἰς τῦτο τὸ σχῆμα $\upsilon^{\kappa-\rho}\delta\upsilon + Z\upsilon^{\kappa-\rho+1}\delta\chi + Z'\delta\chi = 0$, διαιρῦντας αὐτὴν διὰ X ἐ υ^{ρ}, ἐ παριςῶντας διὰ Z, Z' τὰ πηλίκα $\frac{X'}{X}, \frac{X''}{X}$· ἵνα δὲ αὕτη ὁλοκληρωθείη, ὑποτεθείσθω τὸ Π ποιητὴς, συνέκθεσις ὢν τῆς χ· ἔςαι ἄρα $\Pi\upsilon^{\kappa-\rho}\delta\upsilon + Z\Pi\upsilon^{\kappa-\rho+1}\delta\chi + Z\Pi\delta\chi = 0$· ἐὰν ἦν τὸ Π συνέκθεσις ὑπάρχη τῦ χ, ἔςαι ἐ τὸ ZΠ· τὸ ἄρα $O.Z\Pi\delta\chi$ ἀναχθήσεται εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν ἐκ μιᾶς μόνης τρεπτῆς ποσοτήτων· ζητεῖται ἄρα μόνον, ἵνα γένηται $\Pi\upsilon^{\kappa-\rho}\delta\upsilon + Z\Pi\upsilon^{\kappa-\rho+1}\delta\chi$ ἀπειροςὸν τέλειον, τῦτ᾽ ἔςιν ἵνα γένηται $\frac{\delta(\Pi\upsilon^{\kappa-\rho})}{\delta\chi} = \frac{\delta(Z\Pi\upsilon^{\kappa-\rho+1})}{\delta\upsilon}$, εἴτ᾽ ἦν $\upsilon^{\kappa-\rho}\frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = (\kappa-\rho+1)\upsilon^{\kappa-\rho}$ ZΠ· ὅθεν ἀποφέρεται $\frac{\delta\Pi}{\Pi} + (\kappa-\rho+1)Z\delta\chi$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἔςι $\lambda\Pi + O.(\kappa-\rho+1)Z\delta\chi + O.(\kappa-\rho+1)Z\delta\chi.\lambda\varepsilon$· ἄρα $\Pi + \varepsilon^{O(\kappa-\rho+1)Z\delta\chi}$. ἀντικαταςάσει ἄρα ταύτης τῆς τῦ Π δυνάμεως ἐν τῇ ἐξισώσει $\Pi\upsilon^{\kappa-\rho}\delta\upsilon +$ κ.τ.λ., καὶ ὁλοκληρώσει ποριωθήσεται

$\frac{\upsilon^{\varkappa-\rho+1}}{\varkappa-\rho+1} \varepsilon^{O.(\varkappa-\rho+1)} + O.Z\delta\chi\, \varepsilon^{O(\varkappa-\rho+1)Z\delta\chi} +$
$\Gamma = o.$

Οὐδὲν δὲ προςίθεται ὑπὲρ τῆς ἀμεταβλήτε ποσότητος ἐν τῇ ὁλοκληρώσει τῆς τὸ Π προβαλλέσης ἐξισώσεως· μὴ ἔχεσι γὰρ ὐδεμίαν θέσιν εἰς διορισμὸν αὐτῆς, ἐφ' ἡμῖν κεῖται ὑποθεῖναι αὐτὴν ἴσην τῷ μηδενί.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω εἰς ὁλοκλήρωσιν ἡ ἐξίσωσις $\delta\upsilon + \frac{\alpha\upsilon\delta\chi}{\chi} + (\beta\chi^2 + \gamma\chi + \zeta)\,\delta\chi = o$· πολλαπλασιασθεῖσα τοίνυν ἐπὶ τὸν ποιητὴν Π γενήσεται $\Pi\delta\upsilon + \frac{\alpha\upsilon\Pi\delta\chi}{\chi} + \Pi\,(\beta\chi^2 + \gamma\chi + \zeta)\,\delta\chi = o$· δεῖ δὴ ὑπάρχειν $\frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = \delta\,\frac{\left(\frac{\alpha\upsilon\Pi}{\chi}\right)}{\delta\upsilon} = \frac{\alpha\Pi}{\chi}$· ἄρα $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\alpha\delta\chi}{\chi}$· ἄρα $\lambda\Pi = \alpha\lambda\chi$, ἢ $\Pi = \chi^{\alpha}$· ὐκῦν ἡ ἐξίσωσις ἀποτελεῖται $\chi^{\alpha}\delta\upsilon + \alpha\chi^{\alpha-1}\upsilon\delta\chi + \beta\chi^{\alpha+2}\delta\chi + \gamma\chi^{\alpha+1}\delta\chi + \zeta\chi^{\alpha}\delta\chi$, ἧ ὁλοκληρόν ἐςι τὸ $\chi^{\alpha}\upsilon + \frac{\beta\chi^{\alpha+3}}{\alpha+3} + \frac{\gamma\chi^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{\zeta\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \Gamma = o.$

313. Τῇ ἤδη ὁλοκληρωθείσῃ γενικῇ ἐξισώσει ἐντυγχάνομεν συχνότερον, ἡ δὲ μέθοδος, ᾗ ἐχρησάμεθα, πολλαῖς ϗ ἄλλαις περιπτώσεσιν ἐφαρμοσθῆναι δύναται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθων δύω ἐξισώσεις $\delta\chi + \alpha\delta\upsilon + (\beta\chi + \gamma\upsilon)\,T\delta\tau = o$, $\varkappa\delta\chi + \alpha'.\delta\upsilon + (\beta'\chi + \gamma'\upsilon)\,T\delta\tau = o$ τῶν μὲν χ, υ, τ τριῶν ὄντων ἀςάτων ποσῶν,