271. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν δῆλον α΄. ὅτι οἱ λογάριθμοι, οἱ ἐκ τοῦ λογισμοῦ ἀμέσως προκύπτοντες, ἐμφαίνουσι τὰ ὑπερβολικὰ χωρία, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς καμπύλης, καὶ ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κορυφῆς Θ· διὰ τοῦτο δὲ καὶ ὑπερβολικοὶ ἤκουσαν (47) οἱ τοιοῦται λογάριθμοι· β΄. ἐὰν τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\delta\chi}{\chi} = \chi^{-1}\delta\chi$, ληφθὲν κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, ᾖ ἄπειρον, ἐμφαίνει τὰ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀσυμπτώτων ἀρχόμενα χωρία· ὀψόμεθα δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὑποδείγματα ὁλοκληρώσεως, διὰ τῶν λογαρίθμων ἐπιτηδευομένης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἡ ἀπειροστοῦ δυωνύμου προκειμένου ὁλοκλήρωσις ἀνάγεται, ὅταν ἐξῇ, εἰς ὁλοκλήρωσιν ἀπειροστοῦ δυωνύμου ἐγνωσμένου.

272. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τὴν ὁλοκλήρωσιν ἀπειροστοῦ δυωνύμου εἰς τὴν δυωνύμου ἀπειροστοῦ γνωστοῦ ὁλοκλήρωσιν τρέψαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξετάσαντες τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν (207, 209) εἰ εἴη ὁλοκληρώσιμον, καὶ τοιοῦτο μὴ εὑρόντες, τὰς τῆς προσεγγίσεως μεθόδους, περὶ ὧν διείληπται (241, κ. τ. λ.), ἀφέντες, ἐρευνήσωμεν, εἰ τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν ἀναχθῆναι ἔχοι εἰς ἀπειροστὸν δυώνυμον ἁπλούστερον, ὅπερ ἤδη ἔγνωσται ἡ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκλήρωσις· τῆς δὲ τοιαύτης ἀναγωγῆς χαρακτῆρες, οἱ ἐφεξῆς.

Ἔςω $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$ τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν, ϗ $\varepsilon\chi^{\rho}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$ τὸ, ἐφ' ὃ ἀναγαγεῖν δεῖ τὸ προκείμενον· τῦτ' ἔςιν ἀλλήλων μηδενὶ διαφερέτωσαν, ὅτι μὴ τοῖς συνεργοῖς α, ε, ϗ τοῖς τῦ ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως χ δείκταις, ϗ ρ ἔςω ἔλαττον μὲν τῦ μ, ταυτοσύμβολον μέντοι· ἡ ῦν ζητυμένη ἀναγωγὴ δυνατῶς ἔχει, εἴπερ $\frac{\mu-\rho}{\nu}$ ἀριθμὸς εἴη ὁλοχερὴς ϗ ὑπαρκτικός· ἵνα δὲ τῦτο γένοιτο, ὑποτεθείσθω $\text{O}\,\alpha\chi^{\mu}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi} + (\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi+1}\,(\text{A}\chi^{\mu-\nu+1} + \text{B}\chi^{\mu-3\nu+1} + \Gamma\chi^{\mu-3\nu+1} + \kappa.\tau.\lambda.) + \Xi\,\text{O}\,\varepsilon\chi^{\rho}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$, προσλαμβάνυσι τόσυς ὅρυς σὺν ἑνὶ ἐν τῇ σειρᾷ $\text{A}\chi^{\mu-\nu+1} + \kappa\tau.$ ὅσαι ἐνυπάρχυσι μονάδες τῷ $\frac{\mu-\rho}{\nu}$· ἵνα δὲ διοριωθεῖεν οἱ συνεργοὶ Α, Β, Γ κτ. εἰλήφθω τὰ ἀπειροςὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ϗ διῃρήσθω διὰ $(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$, ϗ μετατεθείσθων ἐπὶ θάτερον μέλος πάντες οἱ ὅροι, ϗ ἐξισέσθων τῷ μηδενί· ῦκῦν τὸ ἄθροισμα τῶν τὸν αὐτὸν βαθμὸν τῆς χ πολλαπλασιαζόντων ὅρων τοσαύτας ἕξει ἐξισώσεις, ὅσαι εἰσὶν αἱ ἄγνωςοι Α, Β, Γ κτ.· ἐντεῦθεν δὲ αἱ ἄγνωςοι γνωςαὶ γενήσονται· προκείσθω γὰρ εἰς ὁλοκλήρωσιν το $\frac{\chi^{\rho}\delta\chi}{\alpha^{s}}(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$· ἐκ τοίνυν τῶν εἰρημένων (207, 209) τὸ ἀπειροςὸν τόδε ὁλοκληρώσεως ἐςὶν ἀνεπίδεκτον· ἀλλὰ τῦ σχήματος τῆς ἐν τῇ παρενθέσει ποσότητος ταυτιζομένυ τῷ τῆς ἐμπεριεχομένης τῷ τόξυ κυκλικῦ τύπῳ, ζητηθήτω, εἴπερ ἡ προτεθεῖσα ποσότης ἐξέχοιτο τῆς $\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἥτις ἐςὶ τύπος τόξυ κύκλυ, ῦ ἡ ἀκτίς ἐςιν α, ϗ χ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένη· κατὰ τοίνυν τὸν ἀποδοθέντα κανόνα ἐςὶ $\frac{\mu-\rho}{\nu}$, εἴτ' ἂν $\frac{6-0}{2}$, ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ϗ ὑπαρκτικὸς 3· συνάγεται ἄρα ἐντεῦθεν, ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῦ προκειμένυ ἀπειροςῦ ἐξέχεται πάντως τοιύτυ τόξυ κυκλικῦ, εἰς ὃ τὴν εὕρεσιν ὑποτεθείσθω Ο $\frac{\chi^6\delta\chi}{a^5}(aa-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = (aa-\chi\chi)^{\frac{1}{2}}(A\chi^5 + B\chi^3 + \Gamma\chi) + \Xi$ Ο $a\delta\chi\,(aa-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$· ϗ εἰλήφθωσαν αὐτῶν τὰ ἀπειροςὰ, ἃ ἔσονται.

$$\frac{\chi^6\delta\chi}{a^5}(aa-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = \left\{\begin{array}{l}(A\chi^5+B\chi^3+\Gamma\chi)\left(-\chi\delta\chi(aa-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}\right)\\ +(aa-\chi\chi)^{\frac{1}{2}}(5A\chi^4+3B\chi^2+\Gamma)\delta\chi\\ +\Xi a\delta\chi(aa-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right.$$

διαιρεθέντων δὲ διὰ $\delta\chi\,(aa-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἀποφέρεται $\frac{\chi^6}{a^5} = -A\chi^6 - B\chi^4 - \Gamma\chi^2 + (aa-\chi\chi)(5A\chi^4 + 3B\chi^2 + \Gamma) + \Xi a$· τῦ δὲ σεσημειωμένυ πολλαπλασιασμῦ πραχθέντος, ϗ μεταθέσεως γενομένης, πρόεισιν

$$\left.\begin{array}{llll}\frac{1}{a^5}\chi^6 & + B\chi^4 & + \Gamma\chi^2 & - \Xi a\\ + A\chi^6 & + 3B\chi^4 & + \Gamma\chi^2 & \\ + 5A\chi^6 & - 5Aa^2\chi^4 & - 3Ba^2\chi^2 & - \Gamma a^2\end{array}\right\} = 0$$

ἐπεὶ τοίνυν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπικρατεῖ, ὁποῖον ἂν εἴη τὸ χ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἕκαςον τῦ χ βαθμὸν πολλαπλασιαζόντων ὅρων χρεὼν ὑπάρχειν μηδέν· ἔςιν ἄρα $6A + \frac{1}{a^5} = 0$, ϗ $-5Aa^2 + 4B = 0$, ϗ $2\Gamma - 3Ba^2 = 0$, ϗ $-\Xi a - \Gamma a^2 = 0$· ἐκ δὲ τύτων τῶν ἐξισώσεων πορίζεται $A = -\frac{1}{6\alpha^5}$, ἢ $B = -\frac{5}{24\alpha^3}$, καὶ $\Gamma = -\frac{5}{16\alpha}$, ἢ $\Xi = \frac{5}{16}$· οὐκοῦν τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\chi^6\delta\chi}{\alpha^5}(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἐστιν $(\alpha\alpha - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\chi^5}{6\alpha^5} - \frac{5\chi^3}{24\alpha^3} - \frac{5\chi}{16\alpha}\right) + \frac{5}{16}O.\,\alpha\delta\chi(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}} + \Gamma$· τὸ δὲ $O.\,\alpha\delta\chi(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, τόξον ὂν κύκλου, οὗ ἡ μὲν ἀκτίς ἐστιν α, ἡ δ' ἀποτετμημένη χ, εὐπετῶς εὑρίσκεται.

278. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἐὰν δὲ ἡ διαφορὰ $\mu - \rho$ τῶν δυοῖν ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως δεικτῶν, διαιρεθεῖσα διὰ τοῦ ἐν τῇ παρενθέσει δείκτου ν, μὴ προβάλῃ ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν, οὐ παρὰ τοῦτο συμπερανθήσεται ἀδύνατος ἡ ἀπειροστοῦ ἐφ' ἕτερον ἀναγωγή· δεῖ γὰρ ἔτι ἀπεργάσασθαι τὸν ἐν τῇ παρενθέσει δείκτην λειπτικὸν ἐφ' ἑκάστου ἀπειροστοῦ· ἢ ἣν διαφορὰ τῶν δύω νέων ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως δεικτῶν, διαιρεθεῖσα διὰ τοῦ ἐν τῇ παρενθέσει δείκτου, προβάλῃ ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν, δυνατῶς ἔχουσά ἐστιν ἡ ἀναγωγή· ἐὰν γὰρ, φέρε, ζητηθῇ, εἴπερ ἡ ποσότης $\chi^{-8}\delta\chi(\alpha^4 - \chi^4)^{-\frac{1}{2}}$ ἐξέχοιτο τῆς $\delta\chi(\alpha^4 - \chi^4)^{-\frac{1}{2}}$, δῆλον ὅτι $\frac{\mu - \rho}{\nu} = \frac{-8 - 0}{4}$ οὐ δίδωσιν ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· πρὶν οὖν συναγαγεῖν ὅτι τὰ δύω ἀπειροστὰ ἀλλήλων εἰσὶν ἀνεξάρτητα, τρεπτέον εἰς $\chi^{-10}\delta\chi(\alpha^4\chi^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ ἢ $\chi^{-2}\delta\chi(\alpha^4\chi^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$· ἐνταῦθα μέντοι καταφανὲς, ὅτι $\frac{\mu - \rho}{\nu}$, εἴτ' οὖν $\frac{-10 + 2}{-4}$ προβάλλει ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· τὰ δύω ἄρα ἀπειροστὰ ἀλλήλων ἐξέχονται· ἵν' οὖν τὸ προτεθὲν ὁλοκλη-

ρωθῇ ἐπὶ τῆς δευτέρας περιπτώσεως, μετιτέον, ὡς προείρηται, οὐκ αὐτὰ τὰ δύο ἀπειροστὰ, ἀλλὰ τὰ προκύψαντα μετὰ τὸ γενέσθαι λειπτικὸν τὸν δείκτην· ἐν οὖν τῷ προτεθέντι ὑποδείγματι γενέσθω $O.\chi^{-10}\delta\chi(\alpha^4\chi^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}} = (\alpha^4\chi^{-4}-1)^{\frac{1}{2}}(A\chi^{-5}+B\chi^{-1}) + \Xi O.\chi^{-2}\delta\chi(\alpha^4\chi^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$, καὶ διορίσθωσαν ὡς ἀνωτέρω οἱ συνεργοὶ Α, Β, Ξ.

274. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ξυμβαίνει πολλάκις τὸ προκείμενον ἀπειροστὸν ὑπάρχειν ὁλοκληρώσιμον, καίπερ ἐξέχεσθαι δοκοῦν τοῦ δοθέντος ἀπειροστοῦ διὰ θατέρου τῶν δυοῖν κανόνων· ἀλλὰ παρὰ τοὺς ἀποδοθέντας ἐξεταστικοὺς κανόνας (207, 209), εἰ ἄρα τὸ προκείμενον ἀπειροστὸν ὑπάρχοι ὁλοκληρώσιμον, ἀείποτε συμβαίνει κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν τὸν συνεργὸν Ξ, ὃς ἀφοσιοῦται τῷ ἀπειροστῷ, εἰς ὃ ζητεῖται ἀναγαγεῖν τὸ προκείμενον, ὑπάρχειν ο· ἐὰν, φέρε, ζητηθῇ, εἰ τὸ $\chi^{-4}\delta\chi(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἐξέχοιτο τοῦ $\delta\chi(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἀδύνατον μὲν εὑρεθήσεται ἐν τῇ πρώτῃ τῶν δυεῖν περιπτώσεων· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, τοῦτ' ἔστι μεταβαλόντων τῶν ἀπειροστῶν εἰς $\chi^{-5}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, καὶ $\chi^{-1}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, εὑρεθήσεται $\frac{\mu-\rho}{\nu}$, εἴτ' οὖν $\frac{-5+1}{-2}$, ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς καὶ ὑπαρκτικὸς, ὃ δείκνυσι τὸ πρῶτον ἀπειροστὸν ἐξεχόμενον τοῦ δευτέρου· ἀλλ' ἔμπης τὸ ἀπειροστὸν $\chi^{-5}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$ ἐστὶν ὁλοκληρώσιμον (207), ἡ δ' ἀντίφασις φαινομένη μόνον ὑπάρχει· ἐὰν γὰρ ἐπιστηριζόμενοι τῇ ποσότητι $\frac{\mu-\rho}{\nu}$, ἥτις ἐστὶν ἴση ἀριθμῷ ὁλοσχερεῖ, ζητήσωμεν

ἀναγαγεῖν τὴν $\chi^{-5}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ εἰς $\chi^{-1}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, ποιήσομεν $\mathrm{O}\chi^{-5}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}} = (\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{A}\chi^{-2}+\mathrm{B}) + \Xi\mathrm{O}\cdot\chi^{-1}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, καὶ διορίζοντες τοὺς συνεργοὺς Α, Β, Ξ, ὥσπερ ἀνωτέρω, εὑρήσομεν $\Xi = 0$· ὅθεν πρόεισιν $\mathrm{O}\chi^{-5}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ ἴση ποσότητι καθαρῶς γεωμετρικῇ.

275. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄. Ὑποτεθείσθων ἤδη τὰ δύω διώνυμα, τὰ εἰσιόντα ἐν τοῖς, περὶ ὧν ἐνταῦθα ὁ λόγος, ἀπειροστοῖς, ἔχοντα δείκτας διαφόρους· ὡς τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν ὑπάρχειν $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho}$· τὸ δὲ, εἰς ὃ γενήσεται ἡ ἀναγωγὴ, $\chi^{\mu}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, τοῦ π ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ἐλάττω τοῦ, ὃν ἐμφαίνει τὸ ρ· ἐὰν οὖν ρ ᾖ ὑπαρκτικὸν, μεταβεβλήσθω τὸ ἀπειροστὸν $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho}$ εἰς $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho-\pi}\times(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$· τηνικαῦτα δὲ, εἴπερ $\varrho-\pi$ εἴη ἀριθμὸς ὁλοχερὴς, ὑπαρκτικὸς, ἀναχθῆναι δύναται τὸ $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho-\pi}(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$ εἰς ὅρων σειρὰν τοιαύτην $(\mathrm{A}'\chi^{\sigma}+\mathrm{B}'\chi^{\sigma+\nu}+\Gamma'\chi^{\sigma+2\nu}+$ κ.τ.λ.$)\,\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, ὧν ἕκαστος ἀναχθῆναι δύναται εἰς $\chi^{\mu}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$ διὰ τῆς προεκτεθείσης μεθόδου, εἰ $\sigma-\mu$ διαιρεθῆναι ἔχοι διὰ ν· ἵνα δὲ ὁλοχερῶς γένοιτο ἡ ἀναγωγὴ, ἐφηρμόσθω κατὰ λέξιν τὰ προειρημένα ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδου, λαμβάνουσιν ὑπὲρ τοῦ κληθέντος ἐκεῖθι σ τὸν μείζω δείκτην τῆς ἐν τῇ ἀνεπτυγμένῃ δυνάμει τοῦ $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho-\pi}$· ἐὰν, φέρε, προκέηται τὸ $\mathrm{O}\chi^{2}\delta\chi(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{3}{2}}$ ἀναγαγεῖν εἰς $\mathrm{O}\delta\chi(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{1}{2}}$, μεταβεβλήσθω τὸ $\mathrm{O}\chi^{2}\chi(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{3}{2}}$ εἰς $\mathrm{O}\chi^{2}\delta\chi(\beta\beta-\chi\chi)$

$(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{3}{2}}$, ἢ .Ο $(\beta\beta\chi^2\delta\chi - \chi^4\delta\chi)(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$ τηνικαῦτα δὲ, ὃ χρὴ λαβεῖν ὑπὲρ τοῦ σ, ἐστὶ 4· ὑποτεθείσθω ἄρα κατὰ τὴν μέθοδον, Ο $(\beta\beta\chi^2\delta\chi - \chi^4\delta\chi)$ $(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}} = (\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{3}{2}}(A\chi + B\chi^3) + O\,P\delta\chi(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$.

276. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ΄.** Ἐὰν δὲ τοὐναντίον, ὑπάρχῃ τὸ ρ λειπτικὸν, τὸ ἀπειροστὸν, εἰς ὃ ἀναγαγεῖν βουλόμεθα τὸ προκείμενον, προπαρασκευάσθω οὕτω· $\chi^{\mu}\delta\chi$ $(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi-\rho}\times(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\rho}$· τηνικαῦτα δὲ, ἐὰν π — ρ ἀριθμὸς ᾖ ὁλοσχερὴς, ἐπεὶ ἀναγκαίως ἔσται ὑπαρκτικὸς (ὑποτίθεται γὰρ λειπτικὸν τὸ ρ καὶ μεῖζον τοῦ π, ὁποιονδήποτ' ἂν εἴη τὸ π) δυνατὸν ἀναγαγεῖν τὸ $\chi^{\mu}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi-\rho}(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\rho}$ εἰς πεπερασμένων ὅρων σειρὰν τοιαύτην $(A'\chi^{\mu} + B'\chi^{\mu+\nu} + \Gamma'\chi^{\mu+2\nu} + \text{κ.τ.λ.})(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\rho}$· τηνικαῦτα δὲ πραχθήσεται, ὡς εἰ ἐζητεῖτο ἀναγαγεῖν ταύτην τὴν ἐσχάτην σειρὰν εἰς τὸ σχῆμα $\chi^{\sigma}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\rho}$, τοῦτ' ἔστιν ἐπιτηδευθήσεται τὰ αὐτὰ, ἃ προδιώρισται, ἡνίκα ἐστὶν ὑπαρκτικὸν τὸ ρ· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ζητῆται ἀναγαγεῖν τὸ $\vartheta\chi^{-2}\delta\chi(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-2}$ εἰς $\delta\chi(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-1}$, εἴτ' οὖν $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$, ὅπερ (243) ὁλοκληροῦται διὰ τόξου κύκλου, οὗ ἡ μὲν χ ἐστὶν ἁπτομένη, ἡ δὲ α ἀκτίς· μεταβεβλήσθω τοίνυν τὸ $\delta\chi(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-1}$ εἰς $(\alpha\alpha+\chi\chi)\delta\chi(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-2}$. καὶ ἐπείπερ ὁ ἐκτὸς τοῦ προτεθέντος δυωνύμου δείκτης ἐστὶ -2, ὑποτεθείσθω $O.P(\alpha\alpha+\chi\chi)\delta\chi(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-2} = (\alpha\alpha+\chi\chi)^{-1}(A\chi^{-1}+B\chi) + O.\vartheta\chi^{-2}\delta\chi(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-2}$· διηνύσθω δὲ τὰ λοιπὰ, ὡς ἀνωτέρω, πρὸς διορισμὸν τῶν συνεργῶν Α, Β, Ρ· τηνικαῦτα δὲ διὰ μετα-

θέσεως πορισθήσεται ἡ δύναμις τῦ $O.\,\vartheta\chi^{-2}\delta\chi\,(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-1}$, ἐφ' ἧς ἀνήχθω εἶτα ἡ $P\,(\alpha\alpha+\chi\chi)\,\delta\chi\,(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-2}\,P\,\delta\chi\,(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-1}$.

Ἐὰν δὲ $\pi - \rho$ μὴ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς, ἡ ἀπειροςῦ ἐφ' ἕτερον ἀναγωγὴ ἔςαι ἀδύνατος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ λογικῶν κλασμάτων.

277. Πᾶσα ποσότης ἀπειροςὴ λογικὴ ἀείποτε ὁλοκληρώσεώς ἐςιν ἐπιδεκτικὴ, ἤτοι γεωμετρικῶς, ἢ διὰ κυκλικῶν τόξων, ἢ διὰ λογαρίθμων, ἢ διὰ τῶν τριῶν ἅμα, ἢ μόνον διὰ δυοῖν.

Καὶ γεωμετρικῶς μὲν ὁλοκληρῦται ἀεὶ, ἡνίκα μὴ περιέχει παρονομαςὴν τρεπτὸν, εἰ μὴ εἴη μονώνυμος· ϗ ὕτω μέντοι ἐξαιρεῖται, ἐὰν ᾖ ὑψωμένος εἰς βαθμὸν ὐδένα ἄλλον, ὅτι μὴ τὴν μονάδα.

Λείπεται δὲ ἰδεῖν τὴν ἀλήθειαν τῦ προκειμένυ ἐν ταῖς ἄλλαις περιπτώσεσι, τῦτ' ἔςιν, ὅταν τὸ προκείμενον ἀπειροςὸν ἔχῃ παρονομαςὴν λογικὸν συμπεπλεγμένον.

Ὑποτεθείσθω δὲ, ὅτι ἐν τῷ ἀριθμητῇ τῦ προτεθέντος ἀπειροςῦ κλάσματος ἡ τρεπτὴ ὑπάρχει βαθμῦ ἥττονος, ἢ ἐν τῷ παρονομαςῇ· ἐὰν δὲ μὴ ὕτως ἔχυσα ᾖ, ἤχθω εἰς τῦτο, διαιρῦσι τὸν ἀριθμητὴν διὰ τῦ παρονομαςῦ, μέχρις ἂν ὁ κατάλοιπος βαθμὸς γένοιτο ἐλάττων τῦ ἐν τῷ παρονομαςῇ· ἐὰν γὰρ, φέρε, πρόκειται εἰς ὁλοκλήρωσιν $\frac{\chi^3\delta\chi}{\alpha\alpha+3\alpha\chi+\chi\chi}$, διῃρήσθω $\chi^3\delta\chi$ διὰ $\chi\chi +$

3αχ + αα· οὐκοῦν ἔσται χδχ πηλίκον καὶ — 3αχ'δχ — ααχδ κατάλοιπον· διῃρήσθω εἶτα τόδε τὸ κατάλοιπον διὰ τοῦ αὐτοῦ, παρονομαστοῦ· καὶ ἔσται, πηλίκον μὲν — 3αδχ, κατάλοιπον δὲ + $8\alpha^2\chi\delta\chi$ + $3\alpha^3\delta\chi$· τοιγαροῦν ἀντὶ

$$\frac{\chi^3\delta\chi}{\alpha\alpha+3\alpha\chi+\chi\chi},$$ εἰλήφθω $$\chi\delta\chi - 3\alpha\delta\chi + \frac{8\alpha^2\chi\delta\chi+3\alpha^3\delta\chi}{\alpha\alpha+3\alpha\chi+\chi\chi}.$$

Ἵνα δὲ γνοίημεν, ὅπως ἂν ὁλοκληρωθείη κλάσματα ἀπειροστὰ λογικὰ, ἀναμνησθέντες, ὅτι τὸ ἀπειροστὸν λογαρίθμου πάσης ποσότητος ἐστι τὸ ἀπειροστὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος, διῃρημένον διὰ τῆς αὐτῆς, τοῦτ' ἐστιν ἀεί ποτε ὑπάρχει κλάσμα, οὐκ ἀπεικότως ἂν συναγάγοιμεν, ὅτι ἡ τῶν λογικῶν κλασμάτων ὁλοκλήρωσις τῶν λογαρίθμων ἐνδέχεται ἐξέχεσθαι· εἰλήφθω, φέρ' εἰπεῖν, τὸ 2αλ (α + χ) — 2αλ (2α + χ), οὗ τὰ ἀπειροστά εἰσι $\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha+\chi} - \frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$, ἤ, ἀναγωγῇ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα,

$$\frac{2\alpha\alpha\delta\chi}{2\alpha\alpha+3\alpha\chi+\chi\chi}$$ · δῆλον οὖν, ὅτι εἰς ὁλοκλήρωσιν τοῦδε τοῦ κλάσματος, διαιρετέον ἐστὶν αὐτὸ εἰς δύω κλάσματα, ὧν τὸ μὲν ἂν ἔχοι παρονομαστὴν α + χ, θάτερον δὲ, 2α + χ· οἱ δὲ ἑκατέρων ἀριθμηταὶ εἶεν ἀριθμοὶ ἀμετάτρεπτοι, πεπολλαπλασιασμένοι ἐπὶ δχ· ταῦτα δὲ τὰ δύω κλάσματα ὁλοκληροῦνται τότε διὰ τῶν λογαρίθμων.

278. Εἰς ἄρα ὁλοκλήρωσιν τῶν τοιούτων κλασμάτων, ἀναλυτέον αὐτὰ εἰς τοσάδε κλάσματα ἁπλᾶ, ὅσους ποιητὰς ἔχει ὁ παρονομαστὴς, ὧν ἕκαστον ἔχει παρονομαστὴν ἕνα τούτων τῶν ποιητῶν· ταύτῃ οὖν τῇ μεθόδῳ χρή-

ςέον, ὅταν πάντες οἱ ποιηταὶ, ἀφ' ὧν συνίςαται ὁ παρονομαςὴς, ὦσιν ἄνισοι.

279. Ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν τοῦ παρονομαςοῦ ποιητῶν ἀπαντῶσι καὶ ἰσάλληλοι, ἄχρηςος τηνικαῦτα ἡ μέθοδος, εἴγε ἡ ὁλοκλήρωσις ὁλοσχερῶς τῶν λογαρίθμων οὐκ ἔχεται· ἐὰν γὰρ, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται τὸ $\frac{\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}$, οὗ ὁ παρονομαςὴς ἔχει δύω ἰσαλλήλους ποιητὰς $\alpha+\chi$, $\alpha+\chi$ εὑρεθήσεται (203) ταύτης τῆς ποσότητος τὸ ὁλόκληρον, ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης $\delta\chi\,(\alpha+\chi)^{-2}$, ὑπάρχον $-(\alpha+\chi)^{-2}+\Gamma$· ὅπερ οὐδεμίαν ὅλως ἔχει σχέσιν πρὸς τοὺς λογαρίθμους· ἀλλὰ κατάδηλον ἅμα, ὡς εἰ ληφθεῖεν τὰ ἀπειροςὰ ποσότητος, οἷα ἡ $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi}+2\alpha\lambda\,(\alpha+\chi)+2\alpha\lambda\,(2\alpha+\chi)$, ἔςαι $-\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}+\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha+\chi}+\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}=\frac{(\alpha\alpha+2\alpha\chi)\,\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}+\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$, εἴτ' οὖν (ἀναχθέντων ἁπάντων τῶν ὅρων εἰς κοινὸν παρονομαςὴν) $\frac{4\alpha\chi^2\delta\chi+9\alpha^2\chi\delta\chi+4\alpha^3\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2\,(2\alpha+\chi)}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον προδήλως περιέχει μίαν γεωμετρικὴν καὶ λογαριθμικὰς ποσότητας· ὁ τρόπος οὖν τοῦ εὑρεῖν τοῦτο τὸ ὁλόκληρον, ὑπαγαγεῖν ἐςὶ τὸ ἀπειροςὸν τῷ προτέρῳ σχήματι $\frac{\alpha\alpha+2\alpha\chi}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi+\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha+\chi}$, τοῦτ' ἔςιν, ἀναλῦσαι εἰς δύω κλάσματα, ὧν τὸ μὲν ἔχοι, παρονομαςὴν μὲν πάντας τοὺς ἴσους ποιητὰς, ἐν δὲ τῷ ἀριθμητῇ πάντας τοὺς τῆς χ βαθμοὺς πλὴν

τοῦ ἐν τῷ παρωνομαστῇ καθυπερτέρου βαθμοῦ· τῶν δ' ἄλλων κλασμάτων ἔχοιεν ἕκαστον, παρονομαστὴν μὲν ἕνα τῶν ἀνίσων ποιητῶν, ἐν δὲ τῷ ἀριθμητῇ οὐδένα βαθμὸν τῆς χ· τηνικαῦτα γὰρ ὁ μὲν ὅρος $\frac{\alpha\alpha+2\alpha\chi}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi$ εὐμαρῶς ὁλοκληροῦται διὰ τῶν προαποδοθέντων κανόνων, ὁ δὲ $\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$ διὰ τῶν λογαρίθμων· δυνατὸν οὖν διατέμνειν οὕτως ἅπαν λογικὸν κλάσμα· καὶ τοῦτο ἀεὶ ἐπιτηδεύσαιμεν ἄν, εἰ μὴ εἶεν ποιηταὶ ἐπίπλασοι ἐπὶ τοῦ παρονομαστοῦ.

Τοιγαροῦν
$$\frac{(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\dots\dots\kappa\chi^{\nu-1})\,\delta\chi}{(M+N\chi+\Pi\chi^2+\dots\dots T\chi^{\nu})}$$
ἐμφαινέτω ἐν γένει ἅπαν κλάσμα λογικόν· καὶ ὑποτεθείσθω ὁ παρονομαστὴς ἔχων ἀριθμὸν μ ποιητῶν ἴσων τῷ $\chi+\vartheta$, καὶ ἀριθμὸν π ποιητῶν ἴσων ἑκάστου τῷ $\chi+\eta$, κτλ. καὶ ἀριθμὸν ὁντιναοῦν ποιητῶν ἀνίσων καὶ ἐμφαινομένων διὰ $\chi+\iota$, $\chi+\xi$, $\chi+\rho$, κτλ.· οὐκοῦν τὸ προτεθὲν κλάσμα ἔσται
$$\frac{(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\dots\dots\kappa\chi^{\nu-1})\,\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\mu}(\chi+\eta)^{\pi}\times\kappa\tau\lambda.\,(\chi+\iota)(\chi+\xi)(\chi+\rho)}$$
κτλ.· εἰς δὲ τὴν τούτου ὁλοκλήρωσιν ἐπάναγκες ὑποθεῖναι αὐτὸ ἴσον τῷ
$$\frac{A\chi^{\mu-1}\delta\chi+B\chi^{\mu-2}\delta\chi\dots\dots+P\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\pi}}+\frac{A'\chi^{\pi-1}\delta\chi+B'\chi^{\pi-2}+\dots\dots P'\delta\chi}{(\chi+\eta)^{\pi}}\ \kappa\tau\lambda.+\frac{\Lambda\delta\chi}{\chi+\iota}+\frac{M\delta\chi}{\chi+\xi}+\frac{N\delta\chi}{\chi+\rho}+\kappa\tau\lambda.,$$
τῶν Α, Β, Γ, κτλ. συνεργῶν ὄντων ἀμετατρέπτων καὶ ἀδιορίστων· ἐὰν δὲ τηνικαῦτα διορισθῶσι τρόπῳ τινὶ οἱ συνεργοί, εὐχερῶς πορισθήσεται τὸ ὁλόκληρον· καὶ τοῦτο πρόδηλον μέν ἐστιν ὑπὲρ

τῶν ἁπλῶν κλασμάτων $\frac{\Lambda\delta\chi}{\chi+\iota}$, $\frac{M\delta\chi}{\chi+\xi}$, $\frac{N\delta\chi}{\chi+\varrho}$, κτλ., ὧν ὁλόκληρά εἰσι τὰ $\Lambda\lambda(\chi+\iota)$, $M\lambda(\chi+\xi)$, $N\lambda(\chi+\varrho)$, κτλ· ὑπὲρ δὲ τῶν κλασμάτων $\frac{A\chi^{\mu-1}\delta\chi+}{(\chi+\vartheta)^{\mu}}$ $\frac{B\chi^{\mu-2}\delta\chi+\ldots P\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\mu}}$, γενέσθω, διὰ τὸ ἁπλούστερον, $\chi+\vartheta=\psi$· ὅθεν $\chi=\psi-\vartheta$, καὶ $\delta\chi=\delta\psi$· ἀντικατασταθεισῶν δὲ τούτων τῶν δυνάμεων, ἀναχθήσεται τὸ ὅλον εἰς σειρὰν μονωνύμων ῥαδίως ὁλοκληρουμένων, ὧν ἓν μόνον ἕξει τὸ σχῆμα $\frac{\delta\psi}{\psi}$, εἴτ' οὖν ὁλοκληρωθήσεται διὰ τῶν λογαρίθμων· ὡσαύτως ὑπὲρ τῶν ὅρων $\frac{A'\chi^{\pi-1}\delta\chi+}{(\chi+\eta)^{\pi}}$ $\frac{B'\chi^{\pi-2}\delta\chi+\ldots P'\delta\chi}{(\chi+\eta)^{\pi}}$ γενέσθω $\chi+\eta=\psi'$.

Οὐδὲν οὖν ἔτι λοιπὸν, ὅτι μὴ δύω τινὰ ἐξετάσαι· ὅπως εὑρίσκονται οἱ ποιηταὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ προτεθέντος ἀπειροστοῦ κλάσματος, καὶ ὅπως οἱ ἀδιόριστοι συνεργοί.

280. Εἰς οὖν εὕρεσιν τῶν τοῦ παρονομαστοῦ ποιητῶν τὰ αὐτὰ ἐπιτηδευτέον, ἃ καὶ ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν ἐξισώσεων, ἐξισοῦντας τῷ μηδενὶ τὸν παρονομαστήν· ἐπιλύειν γὰρ ἐξίσωσιν (Συμβ. Λογ. 488) ζητεῖν ἐστι τοὺς διωνύμους ποιητὰς, ὑφ' ὧν γέγονεν ἡ ἐξίσωσις.

281. Εἰς δὲ εὕρεσιν τῶν συνεργῶν Α, Β, Γ, ἀνακτέον εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν πάντα τὰ κλάσματα, οἷς οὗτοι ἐνυπάρχουσι· τηνικαῦτα δὲ τῶν δυοῖν μελῶν τῆς ἐξισώσεως, τῆς συνισταμένης ἔκ τε τοῦ προτεθέντος κλάσματος καὶ τῶν καινῶν τῶνδε κλασμάτων, ἐχόντων τὸν

αὐτὸν παρονομαστήν, δυνατὸν αὐτὸν ἑκατέρωθεν ἐκβαλεῖν, καὶ πάντων μετατεθέντων ἐπὶ θάτερον μέλος, ἀνάγκη, μηδεμιᾶς οὔσης σχέσεως πρὸς τὴν χ, τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων τὸν αὐτὸν βαθμὸν τοῦ χ, ὑπάρχειν μηδέν· ἐντεῦθεν τοσαῦται ἀνακύψουσιν ἐξισώσεις, ὅσοι εἰσὶν ἀδιόριστοι συνεργοί· ὅθεν καὶ διορισθήσονται.

282. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὁλοκληρῶσαι τὸ ἀπειροστὸν $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{A\delta\chi}{\alpha+\chi} + \frac{B\delta\chi}{\alpha-\chi}$, ἐπείπερ οἱ δύω ποιηταὶ τοῦ παρονομαστοῦ $\alpha\alpha - \chi\chi$ εἰσὶν $\alpha + \chi$, καὶ $\alpha - \chi$· ἀναγωγῇ οὖν ἐπὶ κοινὸν παρονομαστήν, ἔσται $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{(A\alpha - A\chi + B\alpha + B\chi)\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$. ἀποβολῇ δὲ τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ, διαιρέσει διὰ $\delta\chi$, καὶ μεταθέσει, ἔσται

$$\left\{\begin{array}{rrr} & 1 & + A\chi \\ - & A\alpha & - B\chi \\ - & B\alpha & \end{array}\right\} + 0$$

ἄρα $1 - A\alpha - B\alpha = 0$, καὶ $A - B = 0$· ὅθεν εὐχερῶς ἀνάγεται $A = \frac{1}{2\alpha}$, καὶ $B\ \frac{1}{2\alpha}$· ἔσται ἄρα $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{\frac{1}{2\alpha}\delta\chi}{\alpha+\chi} + \frac{\frac{1}{2\alpha}\delta\chi}{\alpha-\chi}$, ὧν τὰ ὁλόκληρά εἰσιν $O . \frac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi} = \frac{1}{2\alpha}\lambda(\alpha+\chi) - \frac{1}{2\alpha}\lambda(\alpha-\chi) + \Gamma = \frac{1}{2\alpha}\lambda \frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi} + \Gamma$.

283. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** Ὁλοκληρῶσαι τὸ κλάσμα

$$\frac{4\alpha\chi\chi + 9\alpha^2\chi + 4\alpha^3}{(\alpha+\chi)^2(2\alpha+\chi)}\delta\chi.$$

ΛΥΣΙΣ. Τοῦτο εὕρηται, ληφθέντων τῶν ἀπειροστῶν ἐκ τῆς ποσότητος (279) $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi} + 2\alpha\lambda(\alpha+\chi) + 2\alpha\lambda(2\alpha+\chi)$· ὑποτεθείσθω τοίνυν $\frac{4\alpha\chi^2 + 9\alpha^2\chi + 4\alpha^3}{(\alpha+\chi)^2(2\alpha+\chi)}\delta\chi$ $= \frac{A\chi+B}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi + \frac{\Gamma\delta\chi}{2\alpha+\chi}$· ἀναχθέντων οὖν τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ ἀποβληθέντος, διαιρέσει ϗ μεταθέσει πορισθήσεται

$$\left.\begin{array}{rrr} 4\alpha\chi^2 & +\ 9\alpha^2\chi & +\ 3\alpha^3 \\ -\ A\chi^2 & -\ 2A\alpha\chi & -\ 2B\alpha \\ -\ \Gamma\chi^2 & -\ B\chi & -\ \Gamma\alpha\alpha \\ & -\ 2\alpha\Gamma\chi & \end{array}\right\} = 0$$

ἄρα $4\alpha - A - \Gamma = 0$, ϗ $9\alpha^2 - 2A\alpha - B - 2\alpha\Gamma = 0$, ϗ $4\alpha^3 - 2B\alpha - \Gamma\alpha\alpha = 0$· ὅθεν $A = 2\alpha$, $B = \alpha^2$, ϗ $\Gamma = 2\alpha$· τὸ τοίνυν προτεθὲν ἀπειροστὸν μεταβάλλει εἰς $\frac{2\alpha\chi + \alpha\alpha}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi + \frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$· ἀλλὰ τοῦ μὲν δευτέρου ὅρου ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $2\alpha\lambda(2\alpha+\chi)$· εἰς δὲ εὕρεσιν τοῦ πρώτου, γενέσθω $\alpha+\chi = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi - \alpha$, ϗ $\delta\chi = \delta\psi$· ἀντικαταστάντος δὲ τούτου ἐν $\frac{2\alpha\chi+\alpha\alpha}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi$, ἔσται $\frac{2\alpha\psi - \alpha\alpha}{\psi\psi}\delta\psi = \frac{2\alpha\delta\psi}{\psi} - \frac{\alpha\alpha\delta\psi}{\psi\psi}$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $2\alpha\lambda.\psi + \frac{\alpha\alpha}{\psi} = 2\alpha\lambda(\alpha+\chi) + \frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi}$.

τὸ ἄρα ὅλον ὁλόκληρον ἔϛαι $\frac{\alpha\alpha}{\alpha + \chi} + 2\alpha\lambda(\alpha + \chi) +$ $2\alpha\lambda(2\alpha + \chi)$, ὥσπερ ἔχειν ἐπάναγκες.

284. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Γενικὴ ὑπάρχει ἡ μέθοδος αὕτη· δυνατὸν δὲ ῥαδιεργῆσαι τὴν τῶν συνεργῶν εὕρεσιν διὰ πλειόνων μεθόδων· δυνατὸν, φέρ' εἰπεῖν, ἀσχέτως ἀλλήλων, εὑρεῖν τὰς συνεργὰς τῶν ἁπλῶν κλασμάτων οὕτως· ἔϛω $\frac{N\delta\chi}{M}$ τὸ προκείμενον κλάσμα· $\eta\chi + \alpha$ εἷς τῶν τοῦ παρονομαςοῦ παιητῶν· καὶ ἔϛω Π πηλίκον, προϊὸν ἐκ τῆς τοῦ Μ διὰ $\eta\chi + \alpha$ διαιρέσεως· καὶ ἐπινοηθήτω τὸ $\frac{N\delta\chi}{M}$ ἀναλελυμένον εἰς $\frac{A\delta\chi}{\eta\chi + \alpha}$ καὶ $\frac{\Xi\delta\chi}{\Pi}$. ἔϛαι τοίνυν $\frac{N\delta\chi}{M}$ $= \frac{A\delta\chi}{\eta\chi + \alpha} + \frac{\Xi\delta\chi}{\Pi}$, εἴτ' οὖν $\frac{N}{M} = \frac{A}{\eta\chi + \alpha} + \frac{\Xi}{\Pi}$· ἀναχθέντων ἄρα ἐπὶ κοινὸν παρονομαςὴν, ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως $\Pi = \frac{M}{\eta\chi + \alpha}$, ἢ $\Pi \times (\eta\chi + \alpha) = M$, ἔϛαι $M =$ $A\Pi + \Xi(\eta\chi + \alpha)$· ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροςῶν τῆς ἐξισώσεως $(\eta\chi + \alpha)\,\Pi = M$, ἔϛαι $\eta\Pi\delta\chi + (\eta\chi + \alpha)$ $\delta\Pi = \delta M$· ἀλλὰ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, ὥσπερ καὶ ἡ $N =$ $A\Pi + \Xi(\eta\chi + \alpha)$, κρατοῦσα ἐπὶ πάσης τοῦ χ δυνάμεως, κρατήσει καὶ, ὁπηνίκ' ἂν ἀντικαταςαθῇ ἡτισοῦν τοῦ χ δύναμις· τεθείσθω ἄρα ἀντὶ χ ἡ δύναμις, ἡ ἐκ τοῦ ἁπλουςέρου ἀποτελέσματος προϊοῦσα, εἴτ' οὖν τὸ $-\frac{\alpha}{\eta}$, ὃ πρόεισιν ὑποτιθεμένου τοῦ παρονομαςοῦ $\eta\chi + \alpha = 0$· πορισθήσεται ἄρα τηνικαῦτα $\eta\Pi\delta\chi = \delta M$, καὶ $N = A\Pi$· τεθείσης οὖν ἐν

τῷ δευτέρῳ τῆς δυνάμεως Π $= \frac{\delta M}{\eta\delta\chi}$, τῆς ἐκ τοῦ πρώτου ἐξισώσης, ἔσται A $= \frac{\eta N\delta\chi}{\delta M}$, τοῦτ' ἔστιν εἰς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ A ἑνός τινος τῶν ἁπλῶν κλασμάτων, διαιρετέον τὸν $N\delta\chi$ ἀριθμητὴν τοῦ προτεθέντος διὰ τοῦ ἀπειροστοῦ δM τοῦ ἐν αὐτῷ παρονομαστοῦ, καὶ ἀντικαταστήσαντας ἀντὶ χ τὴν προϊοῦσαν δύναμιν, εἰ ὁ τοῦ ἁπλοῦ κλάσματος παρονομαστὴς ἰσωθείη τῷ μηδενί, πολλαπλασιαστέον τὸν ὅλον παρονομαστὴν τοῦ ἁπλοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν τοῦ χ συνεργόν· εἰς εὕρεσιν, φέρ' εἰπεῖν, τῶν ἀριθμητῶν A, B τῶν κλασμάτων $\frac{A\delta\chi}{\alpha+\chi}$, καὶ $\frac{B\delta\chi}{\alpha-\chi}$, εἰς ἃ ἀναλέλυται τὸ κλάσμα $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha-\chi\chi}$, εἰλήφθω τὰ τοῦ $\alpha\alpha-\chi\chi$ παρονομαστοῦ ἀπειροστά, εἴτ' οὖν $-2\chi\delta\chi$· καὶ διῃρήσθω ὁ $\delta\chi$ ἀριθμητὴς τοῦ προτεθέντος διὰ τοῦ $-2\chi\delta\chi$· ὅθεν πρόεισιν $-\frac{1}{2\chi}$, ἐν ᾧ ἀντικατασταθέντων ἀλληλοδιαδόχως ἀντὶ χ τῶν $-\alpha$, α (ἃ εὑρίσκονται ἴσα τῷ χ, ἰσουμένων ἐξῆς τῷ μηδενὶ τῶν κατὰ τὰ μερικώτερα κλάσματα παρονομαστῶν $\alpha+\chi$, καὶ $\alpha-\chi$), πολλαπλασιασθέντος τε τοῦ εἰρημένου κλάσματος ἐπὶ τὰς τοῦ η δυνάμεις 1 καὶ -1, πορίζονται $\frac{1}{2\alpha}$, καὶ $\frac{1}{2\alpha}$ δυνάμεις τοῦ A, καὶ B, ὥσπερ ἀνωτέρω εὕρομεν.

285. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ ἀποδοῦναι καὶ γενικοὺς κανόνας πρὸς διορισμὸν τῶν κατὰ τοὺς ἀριθμητὰς τῶν μερικωτέρων κλασμάτων συνεργῶν, ἐπὰν τὰ κλάσματα ἔχωσι παρονομαστὴν τὸ ὑπὸ ῥιζῶν ἰσαλλήλων γινόμενον· τούτων μέντοι ἡμεῖς οὐδενὸς ἐν τῷ παρόντι ἁψόμεθα.

286. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Οἱ περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν λογικῶν κλασμάτων ἡμῖν ἀποδοθέντες κανόνες γενικοὶ μέν εἰσιν· ὅταν δέ τινες τῶν τοῦ παρονομαστοῦ ποιητῶν ὦσιν ἐπίπλασοι, πρόεισιν ὁλόκληρον ποσότητες ἐπιπλάστοις ἀνάμικτοι, οὐκ εὐχερῶς εἰς σχῆμα πραγματικὸν ἐπαναγόμενον· τηνικαῦτα τοίνυν ἐκβλητέον πρῶτον τοῦ παρονομαστοῦ πάντας τοὺς αὐτοῦ πραγματικοὺς ποιητάς· μεθ' ὃ ἀναλυτέον τὸ λειπόμενον οὐχὶ εἰς πρωτοβαθμίους, ἀλλ' εἰς δευτεροβαθμίους ποιητὰς, οἵτινες ἀεί ποτε εἰσὶ πραγματικοί· καὶ σχηματιστέον ὑπὲρ ἑκάστου δευτεροβαθμίου ποιητοῦ, ὃς ἀεὶ παραστάθηναι ἔχει διὰ $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, κλάσμα τοιοῦτο $\frac{A\chi\delta\chi + B\delta\chi}{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma}$, καὶ διοριστέον ἀεὶ τοὺς συνεργοὺς, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται· προκειμένου φέρε εἰς ὁλοκλήρωσιν τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha^4\delta\chi}{\alpha^3 - \chi^3}$, εὑρήσθω πρῶτον ἐξισουμένου μηδενὶ τοῦ παρονομαστοῦ $\alpha^3 - \chi^3$ εἷς τῶν αὐτοῦ ποιητῶν ὁ $\alpha - \chi$· καὶ διαιρεθέντος τοῦ $\alpha^3 - \chi^3$ διὰ $\alpha - \chi$ πρόεισι $\alpha^2 + \alpha\chi + \chi^2$, ὃ περιέχει δύω ἑτέρους ποιητάς· ἐξισουμένου δὲ τούτου τῷ μηδενὶ εἰς εὕρεσιν τῶν αὐτοῦ ποιητῶν, εὑρεθήσονται ποσὰ ἐπίπλαστα· διὸ δὴ οὐκ εἰς τρία, εἰς δὲ δύω μόνον, ἀναλυτέον τὸ προκείμενον κλάσμα, ἔχοντα παρονομαστὰς, τὸ μὲν τὸν ποιητὴν $\alpha - \chi$, θάτερον δὲ, τὸ $\alpha^2 + \alpha\chi + \chi^2$· οὐκοῦν ὑποτεθείσθω $\frac{\alpha^4\delta\chi}{\alpha^3 - \chi^3} = \frac{A\delta\chi}{\alpha - \chi} + \frac{B\chi\delta\chi + \Gamma\delta\chi}{\alpha^2 + \alpha\chi + \chi^2}$· ἀναχθέντων δὲ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ διαιρεθέντων διὰ $\delta\chi$, μεταθέσει πορισθήσεται

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha^4 & -\,\mathrm{A}\alpha\chi & -\,\mathrm{A}\chi^2 \\ -\,\mathrm{A}\alpha^2 & +\,\Gamma\chi & +\,\mathrm{B}\chi^2 \\ -\,\Gamma\alpha & -\,\mathrm{B}\alpha\chi & \end{array}\right\} = 0$$

ἰσωθέντος δὲ τῷ μηδενὶ τῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων τὸν αὐτὸν βαθμὸν τῦ χ, ἔςαι $\mathrm{B} - \mathrm{A} = 0$, ϗ $\Gamma - \mathrm{A}\alpha - \mathrm{B}\alpha = 0$, ϗ $\alpha^4 - \mathrm{A}\alpha^2 - \Gamma\alpha = 0$· ὅθεν ἀποφέρεται $\mathrm{A} = \frac{\alpha^2}{3}$, ϗ $\mathrm{B} = \frac{\alpha^2}{3}$, ϗ $\Gamma = \frac{2\alpha^3}{3}$· τοιγαρῦν ἔςαι $\frac{\alpha^4\delta\chi}{\alpha^3 - \chi^3} = \frac{\frac{\alpha^2}{3}\delta\chi}{\alpha - \chi} + \frac{\frac{\alpha^2}{3}\chi\delta\chi + \frac{2\alpha^3}{3}\delta\chi}{\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi\chi}$. ϗ τὸ μὲν ὁλόκληρον τῦ πρώτυ κλάσματος τῦ δευτέρυ μέλυς κατάδηλόν ἐςιν ἐκ τῶν προειρημένων· τῦ δὲ δευτέρυ πορίζεται διὰ τῶν νυνὶ λεγομένων.

287. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐὰν ἐν τοῖς δευτεροβαθμίοις ποιηταῖς ἀπαντῶσί τινες ἰσάλληλοι, σχηματιςέον ὑπὲρ ἑκάςης σωρείας τῶν ἴσων ποιητῶν κλάσμα τοιῦτο $\frac{\mathrm{A}\chi^{2\nu-1}\delta\chi + \mathrm{B}\chi^{2\nu-2}\delta\chi \ldots\ldots \Xi\delta\chi}{(\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma)^\nu}$, τῦ ν ἀμφαίνοντος τὸν ἀριθμὸν τῶν ἰσαλλήλων ποιητῶν $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$· ἐὰν, φέρ᾽ εἰπεῖν, προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\chi^4 + 5\alpha\chi^3 + 4\alpha^3\chi}{(\alpha\alpha + \alpha\chi + \chi\chi)(\chi^3 - \alpha^3)}\delta\chi$, εὑρεθήσεται ἀναλυόμενος ὁ παρονομαςὴς εἰς τρεῖς τύτυς τὺς ποιητὰς, $\chi - \alpha$, $\chi^2 + \alpha\chi + \alpha^2$, $\chi^2 + \alpha\chi + \alpha^2$· τὸν ὖν δεύτερον καὶ τρίτον εἰς ἁπλυςέρυς ποιητὰς, οἳ ἔσονται ἐπίπλασοι, μὴ ἀναλύσαντες, χρησόμεθα αὐτοῖς, ὡς εὕρηνται· ἐπεὶ δέ εἰσιν ἰσάλληλοι, εἰλήφθω τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν γινόμενον $(\alpha^2 + \alpha\chi + \chi)^2$, ϗ γεγονέτω παρονομαςὴς ἑνὸς μόνυ κλάσ-

ματος, ὃ τῷ ἀριθμητῇ εἰσαχθήσονται πάντες οἱ τοῦ χ βαθμοὶ, ἥττονες τοῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ παρονομαστῇ ἁπαντόντων, τοῦτ' ἔστιν, ἐπεὶ ἐνταῦθα ὁ μείζων τῶν τῷ παρονομαστῇ βαθμῶν ἐστι χ^4, εἰσαχθήσονται τῷ ἀριθμητῇ πάντες τοῦ χ βαθμοὶ οἱ τοῦ χ^4 ἥττονες· ὅθεν ὑποτεθείσθω

$$\frac{\chi^4 + 5\alpha\chi^3 + 4\alpha^3\chi}{(\alpha^2 + \alpha\chi + \chi\chi)(\alpha^3 - \chi^3)} = \frac{A\delta\chi}{\chi - \alpha} +$$

$$\frac{B\chi^3\delta\chi + \Gamma\chi^2\delta\chi + \Delta\chi\delta\chi + E\delta\chi}{(\alpha\alpha + \alpha\chi + \chi\chi)^2},$$ καὶ διωρίσθων οἱ συνεργοὶ, ὥσπερ ἤδη εἴρηται· εἶτα γενέσθω ἡ ὁλοκλήρωσις κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

288. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** Ὁλοκληρῶσαι τὸ ἀπειροστὸν $\frac{A\chi\delta\chi + B\delta\chi}{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma}$.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω, διὰ τὸ ἁπλούστερον, ἀνηγμένη εἰς τὸ σχῆμα $\frac{A'\chi\delta\chi + B'\delta\chi}{\chi^2 + \alpha'\chi + \beta'}$, ὅπερ ἀεὶ γενέσθαι δυνατὸν, διαιρουμένου ἀριθμητοῦ τε καὶ παρονομαστοῦ διὰ α· καὶ ἐξηφανίσθω ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ παρονομαστοῦ, τεθέντος $\chi + \frac{1}{2}\alpha' = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi - \frac{1}{2}\alpha'$, καὶ $\delta\chi = \delta\psi$· ἀντικαταστάσει οὖν πορισθήσεται τοιάδε τις ποσότης $\frac{\Gamma\psi\delta\psi + \Delta\delta\psi}{\psi\psi + \xi\xi}$, ἧς τὸ μὲν πρῶτον μέρος ὁλοκληροῦται διὰ τῶν λογαρίθμων (263), θάτερον δὲ διὰ τόξου κύκλου, οὗ ἡ μὲν ἀκτίς ἐστι ξ, ἡ δὲ ἁπτομένη ψ.

289. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἐπὶ δὲ τῶν τοιῶνδε ποσῶν $\frac{A\chi^{2\nu-1}\delta\chi + B\chi^{2\nu-2}\delta\chi \ldots \Xi\delta\chi}{(\chi^2 + \alpha\chi + \beta)^\nu}$ ἐξηφανίσθω καὶ ἐνταῦθα ὁ δεύτερος τοῦ παρονομαστοῦ ὅρος· οὕτω πορισθήσεται τι.

σότης τοιαύτη $\frac{M\psi^{2\nu-1}\delta\psi + N\psi^{2\nu-2}\delta\psi + \dots T\delta\psi}{(\psi\psi + \xi\xi)^{\nu}}$, ἥτις ὁλοκληρωθήσεται, ἀναγομένη εἰς $\frac{\delta\psi}{\psi\psi + \xi\xi}$, κατὰ τὴν ἀποδοθεῖσαν μέθοδον (272) ἐν τῷ ἀθροίσματι τῶν ὅρων, ἔνθα ψ ἔχει δείκτας ἀρτίȣς· οἱ δὲ ἔχοντες δείκτας περιττȣ̀ς ὁλοκληρωθήσονται κατὰ τὰ εἰρημένα (205).

Ἅπαν ἄρα λογικὸν κλάσμα, ἤτοι ἀκριβῶς ὁλοκληρȣ̃ται, ἢ μόνον ἐξέχεται τόξων κυκλικῶν ϗ λογαρίθμων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περί τινων μεταμορφώσεων ῥᾳδιȣργȣσῶν τὰς ὁλοκληρώσεις.

290. Ἀμήχανον μέν ἐςιν ἐπὶ ταύτης τῆς ὕλης κανόνας γενικȣ̀ς ἀποδȣ̃ναι, ἡ δ᾽ ἀνερεύνησις τῶν ποσοτήτων, ἥ τε συχνὴ χρῆσις, ϗ τȣ̃ μετιόντος ἡ δεξιότης, τὰ πρακτέα ἐφ᾽ ἑκάςης περιπτώσεως ὑπαγορεύȣσι· σκοπὸς δὲ τῶν, περὶ ὧν ὁ λόγος, μεταμορφώσεων, ἵνα λογικὰ τὰ προκείμενα ἀπειροςὰ γενόμενα ὁλοκληρώσεως τύχωσιν· εἰς δὲ τȣ̃το ἐκθετέον τὰς ἐφεξῆς παρατηρήσεις.

291. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Α΄. Ἐὰν ὦσι ῥιζικὰ μονώνυμα, ἀνακτέον πρῶτον αὐτὰ εἰς δείκτας κλασματικȣ̀ς, ϗ ἀνακτέον αὐτȣ̀ς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςήν· εἶτα, ἐὰν $\chi^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ ἐμφαίνῃ μίαν τῶν ȣ̃τω προπαρασκευασθεισῶν ποσοτήτων, ὑποθετέον $\chi^{\frac{1}{\lambda}} = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi^{\lambda}$, ϗ $\delta\chi = \lambda\psi^{\lambda-1}\delta\psi$· ἀντικαταςάσει δὲ, πορισθήσεται ποσότης ὅλως λο-