ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ

Περιέχων τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπειροστῶν τὰ ἐχόμενα, τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμὸν, καὶ τὴν Γενικὴν Φυσικήν.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗι ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

ΑΩΖ.

ΣΕΙΡΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Τοῦ λογισμοῦ τῶν Ἀπειροστῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῶν Μεγίστων ϗ Ἐλαχίστων.

32. Ὅταν ᾖ $\delta\upsilon = 0$, ἡ ἁπτομένη, ἣν ἐμφαίνει τὸ $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$ παράλληλος γίνεται ταῖς ἀποτετμημέναις (76)· ἐὰν οὖν καμπύλης τῆς ΑΝα (σχ. 1) αἱ τεταγμέναι προϊοῦσαι αὔξωσι μέχρι μονίμου τινὸς σημείου, μεθ' ὃ μειοῦσθαι ἄρχωνται, ἡ μὲν κατὰ τὰ Μ, τὰ μεταξὺ Α ϗ Ν κείμενα σημεῖα, τῆς καμπύλης ἁπτομένη συναντήσῃ τῷ ἄξονι, ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Α προαχθέντι· ἡ δὲ κατὰ τὰ μ, τὰ μεταξὺ α ϗ Ν, πρὸς τ' ἀντίθετα μέρη τοῦ ἄξονος· ἡ ἄρα κατ' αὐτὸ τὸ Ν ἁπτομένη οὐδαμοῦ συναντήσει τῷ ἄξονι, ἀλλ' ἔσται αὐτῷ παράλληλος· πρόδηλον ἄρα, ὅτι τοῦ

γίνεται κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καθ' ὃ αἱ τεταγμέναι, τοῦ αὔξειν παυόμεναι, μειοῦσθαι αὐτίκα ἄρχονται, τοῦτ' ἔστι κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ τεταγμένη ΚΝ μείζων ἐστὶ τῶν προσεχεστάτων αὐτῇ τεταγμένων ΠΜ, πμ, κειμένων, τῆς μὲν ἐν δεξιοῖς, τῆς δ' ἑτέρας κατὰ τὰ λαιά· ἡ δὲ ΚΝ μεγίστη τηνικαῦτα ἀκούει· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη Μ Νμ (σχ. 2) τὰ κυρτὰ ἑαυτῆς ἔχῃ ἐστραμμένα πρὸς τὸν ἄξονα ΠΚ, ἐνδέχεται συμβῆναι τὰς τεταγμένας προϊέσας, μειοῦσθαι μὲν ἕως τοῦ Ν, ἐντεῦθεν δὲ αὔξειν ἄρχεσθαι, ὡς τὴν ΚΝ ἐλάττω ὑπάρχειν τῶν ἑκατέρωθεν προσεχεστάτων αὐτῇ τεταγμένων· τηνικαῦτα οὖν ἡ ΚΝ ἐλαχίστη καλεῖται, ἡ δὲ ἁπτομένη Νν παράλληλος ταῖς ἀποτετμημέναις καθίσταται· κἀντεῦθεν ἄρα προῆλθεν ἐξαίσιόν τι χρῆμα ἡ περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων μέθοδος χρησιμωτάτη τῶν ἐν τῇ ἀναλύσει, οὐχ ὅπως τὰ ἐν ταῖς καμπύλαις ἀνερευνῶσα ἐλάχιστα καὶ μέγιστα, ἀλλὰ καὶ ἐν ἐκ ευαρίθμοις ἄλλοις γεωμετρικοῖς ζητήμασιν, ὡς ἐκ τῶν ἐφεξῆς ἡμῖν ἔσται κατάδηλον.

83. Ἐὰν οὖν ἡ ἁπτομένη ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος ᾖ, δυνατὸν εὑρεῖν ἓν μέγιστον, ἢ ἓν ἐλάχιστον· δυνατὸν δὲ καὶ ἡνίκα ταῖς τεταγμέναις ἡ ἁπτομένη ἐστὶ παράλληλος· ἡ γὰρ ΚΝ (σχ. 3) συμπίπτει τῇ κατὰ τὸ Ν ἁπτομένῃ, μᾶλλον δὲ, ἁπτομένη ἐστὶν ἑκατέρου τῶν κλωνῶν ΜΝ, μΝ· τὸ δ' ἀπειροστὸν τόξον Νι ἐκλαμβάνεται γραμμὴ εὐθεῖα, ἥτις δύναται ἐπινοηθῆναι ὡς συνιστῶσα γωνίαν ἀπειροστὴν μετὰ τῆς τεταγμένης Λι· ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ιΝσ, τιθεμένης τῆς ἀκτῖνος $=1$,

$$\text{ἔστι } \sigma\iota = \delta\upsilon : \sigma\text{N} = \Lambda\text{K} = \delta\chi :: 1 : \text{ἐφ. } \sigma\iota\text{N} = \frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}.$$

ταύτης δὲ τῆς γωνίας οὔσης ἀπειροστῆς, ὁ λόγος $\delta\chi : \delta\upsilon$

ἔςαι ἀπειροςὸς, τῦτ᾽ ἔςι δυ ἔςι τηνικαῦτα ἀπείρως μείζω τῦ δχ· κρατεῖ δὲ τῦτο ὐδὲν ἧττον κἀπὶ τῦ 4 σχήματος, πλὴν ὅτι ΚΝ, ἐν μὲν τῷ 3 ἐλάχιςω, ἐν δὲ τῷ 4 σχήματι ὑπάρχει μέγιςω· δυνατὸν ἄρα εὑρεῖν τὸ μέγιςν, ἢ τὸ ἐλάχιςον, ὅταν ὁ λόγος δυ : δχ τυῦτης ᾖ, ὥςε τὸ δυ παρατιθέμενον τῷ δχ ὑπάρχειν ποσὸν ἀπείρως μέγιςον. Ἀλλὰ γὰρ ὐκ ἀεὶ, ὄντος δυ = ο, συνάγειν χρὴ, ὅτι πάντως εὑρεθήσεται τὸ μέγιςω, ἢ τὸ ἐλάχιςω· τυτὶ γὰρ μόνον ἐμφαίνει τὴν ἁπτομένην παράλληλον ὖσαν τῇ τῶν ἀποτετμημένων γραμμῇ· δυνατὸν μέντοι τὴν μὲν ἁπτομένην Νν (σχ. 5) παράλληλον εἶναι τῇ τῶν χ γραμμῇ, τὰς δὲ τῷ Ν προσεχεῖς τεταγμένας μὴ ὑπερβάλλειν, ἢ ἐλαττῦσθαι τῆς ΚΝ· τυτὶ δὲ γίνεται, ἡνίκα ἡ καμπύλη ΑΝ τὰ κυρτὰ εἰς κοῖλα, ἢ τὐναντίον, μεταβάλλει· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἡ εὐθεῖα Νν δύναται εἶναι παράλληλος τῇ ΑΠ, καὶ μὴν ἡ ἁπτομένη τῦτε κυρτῦ ΑΝ, ἡ τῦ κοίλυ Νμ· ἐν δὲ τῷ 6 σχήμ. ἡ εὐθεῖα Νν ἐφάπτεται ἑκατέρυ τῶν κλωνῶν μΝ, ΜΝ· τῇ δὲ ΚΝ ὐδεμία τεταγμένη παράκειται δεξιόθεν· ὐκῦν, ὔτε μεγίςη αὕτη ἔςαι, ὔτ᾽ ἐλαχίςη, καθ᾽ ὃν ἡμῖν ἐνταῦθα νῦν ἐκλαμβάνονται τὰ μέγιςα καὶ ἐλάχιςα· ὡσαύτως ἡ τεταγμένη ΝΚ (σχ. 5) = υ (τιθεμένης τῆς μὲν ΑΚ = χ, τῆς δὲ κΝ = υ) παράλληλος δύναται εἶναι ταῖς τεταγμέναις, μήτε μεγίςη, μήτε μὴν ἐλαχίςη, ὑπάρχυσα· τυτὶ δὲ συμβαίνει ἐπὶ μόνυ τῦ τῆς καμπῆς σημείυ (*).

84. Ἵνα δὲ γνωσθῇ τὸ μέγιςω, ἢ τὸ ἐλάχιςω,

(*) Σημεῖον Καμπῆς καλεῖται τὸ Ν (σχ. 5, 7), καθ᾽ ὃ καμπύλη τις τὰ πρὸς τὸν ἄξονα κοῖλα μεταβάλλει εἰς κυρτὰ, ἢ τ᾽ ἀνάπαλιν.

ὑποτεθείσθω πρῶτον $\delta\upsilon = 0$, καὶ ἐντεῦθεν ἀπενεχθήσεται ἡ δύναμις τῆς τῷ μεγίστῳ, ἢ ἐλαχίστῳ, συστοιχούσης ἀποτετμημένης· μηδενὸς δὲ συναγομένου ἐκ τῆς ὑποθέσεως τοῦ $\delta\upsilon = 0$, γενέσθω $\delta\chi = 0$, ἢ $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \infty$, ἤ, ὅ δὴ ταὐτὸν, $\delta\upsilon = \infty$· εἴγε ἐκ τῶν ὑποθέσεων $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{A}{B} = \infty$, καὶ $B = 0$, καὶ $A = \infty$, τὸ αὐτὸ ἀείποτε συνάγεται ἀποτέλεσμα· ἑξῆς δὲ, ἵν' εἰδῶμεν, εἴπερ εἴη τι μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον, ηὐξήσθω πρῶτον, εἶτα ἠλαττώσθω ἡ χ ποσότητι ἀπειροστῇ τῇ $\delta\chi$· καὶ ἐν ταύταις ταῖς δυσὶ περιπτώσεσι τοῦ υ ἐλάττονος ὄντος τοῦ εὑρεθέντος, εὕρηται πάντως τὸ μέγιστον· μείζονος δὲ, τὸ ἐλάχιστον· ἐὰν δὲ, ἐκείνως μὲν ἡ μείζων ἡ δύναμις τοῦ υ, οὕτω δ' ἐλάττων, τῆς ἐν ἀρχῇ εὑρημένης, ἡ εὑρημένη οὔτε μεγίστη, οὔτε μὴν ἐλαχίστη, ὑπάρχει. Πρὶν ἢ δὲ ἐφαρμόσαι τὰ εἰρημένα σημειωτέον, ὅτι καμπύλη, δύναται μὲν ἔχειν μεγίστην, ἐλαχίστην δ' οὔ, οἵα η AN (σχ. 1), ἢ ἐλαχίστην καὶ μεγίστην οὐδεμίαν, οἵα ἡ MN (σχ. 2), ἢ τέλος μεγίστας τε καὶ ἐλαχίστας πολλὰς, οἷαί εἰσιν αἱ KN ἐν τῷ 8 σχήματι.

85. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὴν μεγίστην τῶν τεταγμένων ἐν τῇ ἐλλείψει ANα (σχ. 1).

ΛΥΣΙΣ. Ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις ἐστὶν $\upsilon^2 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ (Τψ. Γ. 92), $2\upsilon\delta\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)$· ὑποτεθέντος $\delta\upsilon = 0$, ἔσται $2\upsilon\delta\upsilon = 2\upsilon \times 0 = 0 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} \times (2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)$, ἢ $2\alpha\delta\chi = 2\chi\delta\chi$, $2\alpha = 2\chi$,

$\alpha = \chi$, τοῦτ' ἔστιν ἡ μεγίστη τεταγμένη συμπίπτει τῇ ΑΚ ἀποτετμημένη $=$ τῷ πρώτῳ ἡμιάξονι, ἤ, ὃ ταὐτὸν, ἡ μεγίστη τῆς ἐλλείψεως τεταγμένη συμπίπτει τῷ κατ' αὐτὴν κέντρῳ.

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^2 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ ὑποτεθῇ $\beta = \alpha$, ἔσται $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi - \chi\chi$ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου, ὅστις ἐστὶν ἔλλειψις, τοὺς ἄξονας ἰσαλλήλους ἔχουσα· ἐν ἄρα τῷ κύκλῳ ἡ μεγίστη τεταγμένη διήκει διὰ τοῦ κέντρου.

86. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὴν μεγίστην τῶν τεταγμένων ἐν καμπύλῃ τῇ ΑΝα (σχ. 9), ἧς αἱ τεταγμέναι ΚΝ $= \psi$ μέσον ἀνάλογον ἔχουσι πρὸς τὰς τεταγμένας Κμ $= \upsilon$, καὶ τὰς τεταγμένας ΑΚ $= \chi$ τοῦ ἡμικυκλίου Αμα.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω διάμετρος τοῦ κύκλου 2α, καὶ ἡ αὐτοῦ ἐξίσωσις $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi - \chi\chi$· ἔσται ἄρα ἡ τῆς καμπύλης ἐξίσωσις $\psi\psi = \chi\upsilon$· καὶ τὰ μὲν τῆς κυκλικῆς ἐξισώσεως ἀπειροστὰ εἰσὶ $2\upsilon\delta\upsilon = 2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi$, $\delta\upsilon = \frac{\alpha\delta\chi - \chi\delta\chi}{\upsilon}$. τὰ δὲ τῆς προτεθείσης καμπύλης, $2\psi\delta\psi = \upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon$ $= \upsilon\delta\chi + \frac{\alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{\upsilon}$ (ἀντικαθισταμένης τῆς τοῦ $\delta\upsilon$ δυνάμεως) $= \frac{\upsilon^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{\upsilon}$. ἀλλὰ πρὸς τῷ τῆς μεγίστης σημείῳ ἐστὶ $\delta\psi = 0$, καὶ $2\psi\delta\psi = 0$· ἄρα $\frac{\upsilon^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{\upsilon} = 0$, $\upsilon^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi = 0$, $\upsilon^2 + \alpha\chi - \chi\chi = 0$· ἀντικαθισταμένης δὲ τῆς τοῦ υ^2 δυνάμεως, τῆς ἐκ τῆς κυκλικῆς ἐξισώσεως ποριζομένης, προκύπτει $2\alpha\chi - \chi^2 + \alpha\chi - \chi^2 = 0$, $3\alpha\chi - 2\chi\chi = 0$, $3\alpha - 2\chi = 0$, $3\alpha = 2\chi$, $\chi = \frac{3\alpha}{2}$· ἐὰν οὖν τεθῇ $AK = \frac{3\alpha}{2}$, ἔςαι τὸ σημεῖον K, ᾧ συςοιχεῖ ἡ τῶν τεταγμένων μεγίςη.

87. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** Εὑρεῖν τὴν μεγίςην τῶν τεταγμένων ἐν ταῖς παντὸς γένους ἐλλείψεσι.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ αὐτῶν ἐξίσωσις ἐςὶν $\frac{\alpha}{\pi} \upsilon^{\mu+\nu} = \chi^{\mu} (\alpha-\chi)^{\nu}$, $(\mu+\nu) \frac{\alpha}{\pi} \upsilon^{\mu+\nu-1} \delta\upsilon = \mu\chi^{\mu-1} (\alpha - \chi)^{\nu} \delta\chi - \nu\chi^{\mu} \delta\chi (\alpha - \chi)^{\nu-1} = 0$ (ὑποτιθεμένου $\delta\upsilon = 0$, ὅπερ τὸ πρῶτον τῆς ἐξισώσεως μέλος, καὶ δὴ καὶ τὸ δεύτερον, ἀπεργάζεται $= 0$)· διαιρέσει ἄρα διὰ $\delta\chi$, καὶ μεταθέσει, $\mu\chi^{\mu-1} \times (\alpha-\chi)^{\nu} = \nu\chi^{\mu} (\alpha-\chi)^{\nu-1}$. διαιρέσει δὲ διὰ $\chi^{\mu-1} \times (\alpha-\chi)^{\nu-1}$, πρόεισι $\mu(\alpha-\chi) = \nu\chi$, $\mu\alpha - \mu\chi = \nu\chi$, $\mu\alpha = \mu\chi + \nu\chi$, $\chi = \frac{\mu\alpha}{\mu+\nu}$.

Ἡ δ' ἐξίσωσις τῶν παντὸς γένους κύκλων, μηδενὶ διαφέρουσα τῆς τῶν ἐλλείψεων, πλὴν ὅτι ἐν τοῖς κύκλοις ἐςὶν $\alpha = \pi$, ὅπερ οὐδέποτε συμβαίνει ταῖς ἐλλείψεσι, κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον τῆς πράξεως διαπερανθείσης, προβαλεῖ μεγίςην τῶν τεταγμένων τὴν συςοιχοῦσαν κἀνταῦθα τῇ ἀποτετμημένῃ $\chi = \frac{\mu\alpha}{\mu+\nu}$· ἐὰν ᾖ $\mu = 5$ καὶ $\nu = 3$, εὑρεσεται $\chi = \frac{5\alpha}{6}$· εἰδ' εἴη $\mu = 6$, ϰ $\nu = 1$, πορισθήσεται $\chi = \frac{6\alpha}{7}$, ϰ ἑξῆς ὡσαύτως, εἴτε περὶ ἐλλείψεως, εἴτε περὶ κύκλου τῶν καθυπερτέρων ὁ λόγος γίνοιτο.

88. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοῦ δὲ τῆς καμπύλης σχήματος ἀγνοουμένου ὅλως οἷόν ἐστι, βουλομένοις εἰδέναι, εἰ δυνατὸν εὑρεῖν ἐν αὐτῇ τὰ μέγιστα ϰ ἐλάχιστα, ἐπιχειρητέον τῷ ζητήματι, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς προβλήμασι.

89. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Εὑρεῖν τὰ μέγιστα ϰ ἐλάχιστα καμπύλης, ἧς ἐξίσωσίς ἐστιν ἡ $\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\alpha}{\chi} = \frac{\upsilon}{\alpha}$.

ΛΥΣΙΣ. Εκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔστι $\frac{\delta\chi}{\alpha} - \frac{\alpha\delta\chi}{\chi^2} = \frac{\delta\upsilon}{\alpha} = 0$· ὑποτεθέντος δὲ $\delta\upsilon = 0$, ϰ ἑπομένως $\frac{\delta\chi}{\alpha} = \frac{\alpha\delta\chi}{\chi^2}$, $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\chi^2}$, $\frac{\chi^2}{\alpha} = \alpha$, $\chi^2 = \alpha^2$, $\chi = \pm\sqrt{\alpha^2} = \pm\,\alpha$· ἄρα ἁπτόμεναι αἱ συστοιχοῦσαι τῇ τε ὑπαρκτικῇ ἀποτετμημένῃ $+\,\alpha$, ϰ τῇ λειπτικῇ $-\,\alpha$, ἔσονται παράλληλοι ταῖς ἀποτετμημέναις· ἵνα δὲ γνωστὸν γένοιτο, εἴπερ ἡ τῇ ἀποτετμημένῃ $+\,\alpha$ συστοιχοῦσα τεταγμένη μεγίστη εἴη, ἢ γοῦν ἐλαχίστη, ἀντικατασταθήτω α ἀντὶ χ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει· ϰ δὴ ἔσται $\frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\upsilon}{\alpha}$, ἢ $2 = \frac{\upsilon}{\alpha}$, ϰ $\upsilon = 2\alpha$· αὐξηθείσης τῆς ἀποτετμημένης α ποσότητι ἀπειροστῇ τῇ $\delta\chi$, ϰ ἀντικατασταθέντος ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει τοῦ $\alpha + \delta\chi$

ἀντὶ χ, προέρχεται $\frac{α+δχ}{α} + \frac{α}{α+δχ} = \frac{υ}{α}$, ἢ (ἀναχθέντων τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, καὶ συναφθέντων, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ α ἀφανισθέντος) $\frac{2αα + 2αδχ + δχ^2}{α+δχ} = υ$, εἴτ' οὖν $2α + \frac{δχ^2}{α+δχ}$ υ, ποσότης μείζων τοῦ 2α· ἐὰν δὲ ἡ ἀποτετμημένη α ἀπομειωθῇ τῷ ποσῷ δχ, καὶ εἰσαχθῇ α — δχ ἀντὶ χ, εὑρεθήσεται $υ = 2α + \frac{δχ^2}{α-δχ}$, ἥτις ἔτι μείζων ἐστὶ τοῦ 2α· ἐπεὶ ἄρα αἱ τεταγμέναι ἑκατέρωθεν αὔξουσι, πρόδηλον ὅτι ἡ τεταγμένη 2α, ἡ τῇ ἀποτετμημένῃ α συστοιχοῦσα, ἐστὶν ἐλαχίστη.

Τῇ δ' αὐτῇ ἐφόδῳ τῆς πράξεως, λαμβανομένης τῆς ἀποτετμημένης χ λειπτικῆς καὶ = — α, ποσωθήσεται υ = — 2α· ἀντικατασταθέντος δὲ ἀντὶ χ τοῦ — α + δχ, εὑρεθήσεται $υ = -2α + \frac{δχ^2}{-α+δχ} = -2α - \frac{δχ^2}{α-δχ}$ (μεταβαλλομένων πάντων τῶν συμβόλων τοῦτε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, ἤ, εἰ βούλει, πολλαπλασιαζομένων τοῦτε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ — 1)· ἀντικαθισταμένου δὲ τοῦ — α — δχ ἀντὶ τοῦ χ, εὑρίσκεται $υ = -2α - \frac{δχ^2}{α+δχ}$. ἐπεὶ ἄρα αἱ τῇ — 2α τεταγμένῃ προσεχεῖς ἑκατέρωθεν λειπτικαὶ τεταγμέναι μείζους εἰσὶ τῆς — 2α, ἡ τεταγμένη — 2α ἐστὶν ἐλαχίστη τῶν λειπτικῶν.

90. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὰ μέγιστα, καὶ ἐλά-

χιςα ἐν καμπύλῃ, ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν ἡ $aau = \chi^3 - 3a\chi^2 + 3a^2\chi$.

ΛΥΣΙΣ. Τῶν ἀπειροςῶν τῆς ἐξισώσεως ληφθέντων, ϗ τεθέντος $\delta u = 0$, εὑρίσκεται $3\chi\chi\delta\chi - 6a\chi\delta\chi + 3aa\delta\chi = 0$, ἢ (διαιρέσει διὰ $3\delta\chi$) $\chi^2 - 2a\chi + aa = 0$, ἢ (ἐξαγωγῇ ῥίζης) $\chi - a = 0$, $\chi = a$· ἄρα ἡ τῆς καμπύλης ἁπτομένη κατὰ σημεῖον συςοιχῶν τῇ ἀποτετμημένῃ $\chi = a$, ἐςὶ ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος· ἀλλ' ὐ παρὰ τῦτο ἡ συςοιχῦσα τεταγμένη ἔςαι μεγίςη, ἢ ἐλαχίςη· ϗ γὰρ ἀντικαταςαθέντος a ἀντὶ χ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει, πρόεισιν $u = a$· ἐξῆς δὲ ἀντικαταςαθέντος μὲν τῦ $a + \delta\chi$ ἀντὶ χ, εὑρίσκεται $u = a + \frac{\delta\chi^3}{aa}$, ἀντικαταςαθέντος δὲ $a - \delta\chi$, προκύπτει $u = a - \frac{\delta\chi^3}{aa}$· ἐπεὶ ἄρα αἱ τεταγμέναι, ἔνθεν μὲν αὔξυσιν, ἔνθεν δ' ἀπομειῦνται, ἡ τεταγμένη $u = a$ ὐκ ἔςιν ὔτε μεγίςη, ὔτε ἐλαχίςη.

91. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'. Εὑρεῖν τὴν μεγίςην ϗ ἐλαχίςην τεταγμένην ἐν τῇ παραβολῇ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ἐςιν $u^2 = \pi\chi$, $2u\delta u = \pi\delta\chi$· ὑποτεθέντος δὲ $\delta u = 0$, εὑρίσκεται $\pi\delta\chi = 0$, ὅθεν ὐδεμία τῦ χ ἀποφέρεται δύναμις· ὑποτεθείσθω τοίνυν $\delta u = \infty$· ϗ δὴ ἔςαι $\pi\delta\chi = \infty$· ὅθεν ὐδὲν ἧττον ὐδεμία ἐξαρύεται τῦ χ δύναμις· ὐκ ἔςιν ἄρα τῇ παραβολῇ ὔτε μεγίςη τις ὔτ' ἐλαχίςη τεταγμένη.

92. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Ἀπὸ σημείυ Λ δοθέντος ἐπὶ ἄξονος καμπύλης τινὸς, ἀγαγεῖν πρὸς τὴν καμπύλην τὴν ἐλαχίςην εὐθεῖαν ΛΜ (σχ. 10.).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΛ $= \beta$, καὶ ΑΠ $= \chi$, καὶ ΠΜ $= \upsilon$· ἄρα ΠΛ $= \beta - \chi$· ἔστι δὲ ὀρθογώνιον τὸ τρίγωνον ΜΑΠ, ἄρα $\text{ΜΛ}^2 = \text{ΠΛ}^2 + \text{ΠΜ}^2 = \beta\beta - 2\beta\chi + \chi\chi + \upsilon\upsilon = \psi\psi$, ὑποτιθεμένης τῆς ΜΛ $= \psi$· Ἐὰν οὖν ἐκληφθῇ ψ ὡς ἐνηρμοσμένη τῇ καμπύλῃ, καὶ τεθῇ $\delta\psi = o$ ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἐλαχίστου, ποριωθήσεται $- 2\beta\delta\chi + 2\chi\delta\chi + 2\upsilon\delta\upsilon = 2\psi\ \delta\psi = o$, $\upsilon\delta\upsilon = \beta\delta\chi - \chi\delta\chi$ (μεταθέσει δήπου καὶ διαιρέσει διὰ 2)· ἄρα $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi} = \beta - \chi =$ ΠΛ· ἀλλὰ (κατὰ τὰ προειρημένα) $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$ ἔστι τύπος τῆς ὑποκαθέτου· ἄρα ΠΛ ἔστιν ὑποκάθετος· ἐὰν οὖν ἐκ τοῦ σημείου Γ, κειμένου ἐντὸς τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κοιλότητος, ἀγαγεῖν προτεθῇ τὴν ἐλαχίστην ΓΜ, ἀχθεισῶν τῆς μὲν ΓΜ παραλλήλου, τῆς δὲ Γπ καθέτου τῷ ἄξονι, γενέσθω Απ $= \varphi$, καὶ Κπ $=$ μΠ $= \gamma$· οὖν ἔσται Μμ $= \upsilon - \gamma$, καὶ Γμ $=$ ϖΠ $= \varphi - \chi$, καὶ τιθεμένης ΓΜ $= \chi$, προκύπτει $\psi\psi = \text{Μμ}^2 + \text{Γμ}^2 = \upsilon^2 - 2\gamma\upsilon + \gamma^2 + \varphi\varphi - 2\varphi\chi + \chi\chi$· τῶν δὲ ἀπειροστῶν ληφθέντων, καὶ ὑποτεθέντος $\delta\psi = o$, ἔσται $o = 2\upsilon\delta\upsilon - 2\gamma\delta\upsilon - 2\varphi\delta\chi + 2\chi\delta\chi$· μεταθέσει δὲ καὶ διὰ 2 διαιρέσει, προέρχεται $\delta\upsilon \times (\upsilon - \gamma) = \delta\chi \times (\varphi - \chi)$, $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{\varphi - \chi}{\upsilon - \gamma}$, πολλαπλασιασμῷ δὲ ἐπὶ υ, $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{\upsilon \times (\varphi - \chi)}{\upsilon - \gamma}$. ὅθεν Μμ $= \upsilon - \gamma$: Γμ $= \varphi - \chi$ :: $\upsilon =$ ΠΜ : ΠΛ $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$. ἄρα ΓΜ ἔστι κάθετος.

Ἐκτὸς δὲ τῆς καμπύλης κειμένου τοῦ σημείου Ν, ἀφ' οὗ πρόκειται ἀγαγεῖν τὴν ἐλαχίστην εὐθεῖαν, ἐστάθω τῷ ἄξονι κάθετος ἡ NB, ἥτις ὡς γνωστὴ (τοῦ γὰρ σημείου N δοθέντος, τὸ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἀπόστημα δεδομένον ἐκλαμβάνεται) ἔστω $= \gamma$, καὶ $AB = \varphi$, καὶ ἤχθω Mν παράλληλος τῷ ἄξονι AΠ· ἐκεῖθεν ἔσται $M\nu = B\Pi = \chi - \varphi$, καὶ $N\nu = \gamma - \upsilon$, καὶ τιθεμένης τῆς $NM = \psi$, προέρχεται $\psi^2 = N\nu^2 + M\nu^2 = (\gamma - \upsilon)^2 + (\chi - \varphi)^2$· ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροστῶν, ἔσται $2\psi\delta\psi = - 2\delta\upsilon(\gamma - \upsilon) + 2\delta\chi \times (\chi - \varphi)$. ὑποτιθεμένου δὲ $\delta\psi = 0$, διαιρέσει διὰ 2 καὶ μεταθέσει, προκύπτει $\delta\chi \times (\chi - \varphi) = \delta\upsilon \times (\gamma - \upsilon)$, $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{\chi - \varphi}{\gamma - \upsilon}$, $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{(\chi - \varphi)\upsilon}{\gamma - \upsilon}$, ὅθεν $\gamma - \upsilon = N\nu : \chi - \varphi = \nu M :: \upsilon = M\Pi : \Pi\Lambda = \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἡ ἄρα NM ἐστὶ κάθετος.

Τῆς δὲ καμπύλης καὶ ἕτερον κλῶνα ἐχούσης τὸν Aσ, οὗ τὰ συστοιχοῦντα τοῖς τοῦ AM σημεῖα ἴσον ἀπέχουσι τοῦ ἄξονος AΠ, δῆλον ὅτι ἡ Pς κάθετος τῷ κλωνὶ Aσ ἔσται ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀχθῆναι δυναμένων ἀπὸ τοῦ σημείου P τοῦ κειμένου ὑπὸ τὸν ἄξονα ἐν τῷ κλωνὶ Aσ.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ῥᾶστα δὲ κατανοεῖται, ὡς τῆς AM εὐθείας ἀντὶ καμπύλης οὔσης, ἡ ἐλαχίστη εὐθεῖα τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου, Λ, Γ, N ἀγομένων, ἔσται ἡ κάθετος.

94. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα δὲ ἀπειράριθμα μικρὰ προβλήματα, ἐξεχόμενα τῆς τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων μεθόδου, ἐπιλυθεῖεν, ἐμφαινέτω συνέκθεσίς τις τοῦ χ τὴν ποσότητα, ἣν δέοι μεγίστην εἶναι ἢ ἐλαχίστην, καὶ ἰσωθήτω βαθμῷ τινι τοῦ υ, καὶ εἰλήφθω ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὰ ἀπει-

ροςά· τὰ δ' ἄλλα γινέσθω, ὡς εἰ ζητοῖτο ἡ μεγίςη ἢ ἐλαχίςη τῶν καμπύλη ἐνηρμοσμένων.

95. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'. Εὑρεῖν ὀρθογώνιον μέγιςον ἁπάντων, ὧν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τὸ ἄθροισμα ἐςὶν $= 2α$.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω $χ$ ἡ βάσις τῦ ζητυμένυ ὀρθογωνίυ· τοιγαρῦν τὸ αὐτῦ ὕψος ἐςὶ $2α - χ$, ὅπερ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $χ$, ποιεῖ $2αχ - χχ$ ἐπιφάνειαν τῦ ζητυμένυ ὀρθογωνίυ· γενέσθω ὖν $2αχ - χχ = υυ$· ληφθέντων δὲ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως τῶν ἀπειροςῶν, ϗ τεθέντος ἴσυ $= 0$, πορισθήσεται $2αδχ - 2χδχ = 0$, $2α = 2χ$, $α = χ$· ἐςὶν ἄρα ἡ βάσις ἴση τῷ ὕψει· τὸ δὲ ὀρθογώνιον μεταβάλλει εἰς τετράγωνον, ὗ πλευρὰ $= α$ ἡμίσειά ἐςι τῦ ἀθροίσματος $2α$.

96. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρόδηλον δὲ, ὅτι τ' αὐτὸν ἂν ἀποτελεσθείη, λαμβανομένων τῶν ἀπειροςῶν τῦ $2αχ - χχ$, ϗ τιθεμένων $= 0$· δυνατὸν ἄρα παραλείπειν τὴν $υ$.

97. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τῦ $2α$ ἐμφαίνοντος εὐθεῖαν, ἣν δεῖ ὕτω δίχα τεμεῖν, ὅπως τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων $χ$, $2α - χ$ ὑπάρχῃ τὸ μέγιςον ὀρθογώνιον, εὑρεθήσεται $χ = α$, τῦτ' ἔςι δεήσει τὴν εὐθεῖαν εἰς δύω ἰσάλληλα μέρη τεμεῖν· τῦ δ' αὐτῦ $2α$ παριςῶντος ἀριθμὸν, ὃν πρόκειται διελεῖν εἰς δύω μέρη $χ$, $2α - χ$, ὅπως ὁ γινόμενος ὑπ' αὐτῶν ᾖ ὁ μέγιςος, ἔςαι $χ = α$, τῦτ' ἐςιν ἔσονται τὰ δύω μέρη ἰσάλληλα ϗ ἑκάτερον τῦ προτεθέντος ἀριθμῦ τὸ ἥμισυ· ὡς εἴπερ ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς εἴη 12, ἑκάτερον τῶν δύω μερῶν ἔςαι $= 6$, ὁ δ' ὑπ' αὐτῶν παραγόμενος 36 ἔςαι ὁ μέγιςος τῶν δυναμένων γενέσθαι ὑπ' ἄλλων ὡντινωνῦν δυοῖν τμημάτων τῦ 12 εἰς δύω τμηθέντος.

98. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Εἰ δέ τις ἀμφιβάλλει, ὡς ἄρα τὸ εὑρεθὲν μὴ εἴη μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἀντικαταστησάτω $\alpha + \delta\chi$ ἐν τῇ ἐξισώσει $2\alpha\chi - \chi^2 = \upsilon^2$· καὶ δὴ ἕξει $2\alpha^2 + 2\alpha\delta\chi - \alpha\alpha - 2\alpha\delta\chi - \delta\chi^2 = \alpha\alpha - \delta\chi^2$· ἀντικαταστησάτω εἶτα $\alpha - \delta\chi$ ἀντὶ χ· καὶ δὴ ἕξει $2\alpha\alpha - 2\alpha\delta\chi - \alpha\alpha + 2\alpha\delta\chi - \delta\chi^2 = \alpha\alpha - \delta\chi^2$· ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δύο ἀποτελεσμάτων ἐστὶν ἔλαττον ἢ $\alpha\alpha$, ὃ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ὑποθέσεως τοῦ $\delta\upsilon = 0$· ἄρα τὸ εὑρεθὲν ἐστὶ μέγιστον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄. Κύκλῳ ἐγγράψαι τὸ μέγιστον ἁπάντων τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων ὀρθογωνίων (Σχ. 11).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω τὸ ΑΒνμ τὸ ζητούμενον· ἐὰν οὖν αἱ ΖΘ, νι διάμετροι ἐπιζευχθῶσι παραλλήλως ταῖς τοῦ ὀρθογωνίου πλευραῖς, τὸ ὀρθογώνιον διαιρεθήσεται εἰς τέσσαρα ὀρθογώνια ἰσάλληλα (*), ὧν ἓν ἐστὶ τὸ ΛΚϑΒ, οὗ τὸ τετραπλάσιον προδήλως ἐξισωθήσεται τῷ ζητουμένῳ ὀρθογωνίῳ· ἔστω οὖν ἡ τοῦ κύκλου ἀκτὶς $= \alpha$, καὶ ληφθεισῶν τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένων, ἡ τεταγμένη Βϑ ἔσται $= \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· καὶ δὴ τὸ ὀρθογώνιον ΛΚϑΒ $= \chi \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, οὗ τὸ τετραπλοῦν $4\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \beta\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ὑποτεθέντος $4 = \beta$, ἔσται τὸ ζητούμενον μέγιστον ὀρθογώνιον· ταύτης οὖν τῆς ποσότητος τοῦ ἀπειροστοῦ ληφθέντος, καὶ τεθέντος $= 0$, ἔσται $\beta\delta\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} - \beta\chi\chi\delta\chi(\alpha\alpha - \chi^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$, διαιρέσει δὲ διὰ $\beta\delta\chi$, καὶ μεταθέσει, $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \chi\chi . (\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$,

---

(*) Διάμετρος γὰρ χορδῇ κάθετος ἐφισταμένη, δίχα ταύτην τέμνει (Γεωμ. 157).

πολλαπλασιασμῷ δὲ ἐπὶ $(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, γίνεται $\alpha\alpha - \chi\chi = \chi\chi \cdot (\alpha\alpha - \chi\chi)^{0} = \chi\chi$· ἄρα $\alpha\alpha = 2\chi\chi$, $\chi\chi = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· ἀντικατασταθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν $4\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, πρόεισι $4\sqrt{(\alpha\alpha - \frac{\alpha\alpha}{2})} \times \frac{\alpha\alpha}{2} = \mathrm{AB}\mu\nu$, καὶ $\mathrm{B\Theta} = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \sqrt{(\alpha\alpha - \frac{1}{2}\alpha\alpha)} = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}} = \chi$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΒΘΚΛ ἔχει δύω πλευρὰς τὰς ΒΘ, ΚΘ ἴσας· ἄρα αὐτό τε καὶ ἑπομένως τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ ἐστι τετράγωνον· ἄρα τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον τῶν κύκλῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων ἐστι τετράγωνον.

100. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Η' ἄρτι εὑρημένη δύναμις τοῦ χ ἡ αὐτὴ ἔσται καὶ εἰ, πρὶν λαβεῖν τὰ ἀπειροστά, ἀποβληθῇ ὁ ἄτρεπτος πολλαπλασιαστὴς 6. οὐκοῦν ὡσαύτως ἂν ποιήσειέ τις, ὁσάκις ἂν προκέηται εὑρεῖν τι μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον· ἐμφαινέτω γὰρ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}\upsilon$ ποσότητα τὴν μεγίστην, ἢ ἐλαχίστην, τῶν ἐν τῷ προβλήματι· οὐκοῦν τὸ αὐτῆς ἀπειροστὸν, ὑποτεθέντος $\delta\upsilon = 0$, ἔσται $\frac{\alpha}{\beta}\delta\upsilon = \frac{\alpha}{\beta} \times 0 = 0$, ὅπερ ἂν εὑρεθείη πάντως, ἀποβληθέντων πρῶτον τῶν ποιητῶν α, $\frac{1}{\beta}$· ἐὰν δὲ τὸ ἀπειροστὸν ὑποτεθῇ $\frac{\alpha}{\beta}\delta\upsilon = \frac{\mu(\gamma - \chi)^{\mu}\delta\chi}{(\alpha - \chi)^{\nu}}$, καὶ ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = \infty$, πορισθήσεται $(\alpha - \chi)^{\nu} = 0$, $\alpha - \chi = 0$, $\chi = \alpha$· τὸ αὐτὸ ὡς εἴπερ μόνη ἡ υ εἴη ἡ μεγί-

ςη, ἡ ἐλαχίςη· ἄχρηςοι ἄρα οἵ τε πολλαπλασιαςαὶ, ϗ οἱ διαιρέται οἱ ἄτρεπτα τῆς ζητεμένης μεγίςης, ἡ ἐλαχίςης, ποσότητος· διὸ πρὶν ἢ λαβεῖν αὐτῆς τὰ ἀπειροςὰ ἀπεῤῥίφθων· ὅπερ καὶ τὸν λογισμὸν ἁπλέςερον ἀπεργάζεται.

101. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι΄.** Γωνίας ὀρθῆς τῆς ὑπὸ ΖΒΜ ἐντὸς τῶν ἀδιορίςων σκελῶν ΖΒ, ΒΜ σημείε δοθέντος τε Δ, εὑρεῖν τὴν δι' αὐτε μὲν ἀγομένην ἐλαχίςην εὐθεῖαν, ὑπὸ δὲ τῶν σκελῶν ἀπολαμβανομένην (σχ. 12).

ΛΥΣΙΣ. Συςαθέντος τε ὀρθογωνίε ΔΓΒΑ ἔςω ΑΒ $= \alpha$, ϗ ΒΓ $= \beta$, ϗ ΑΖ $= \chi$, ὑκῦν ἔςαι $Z\Delta^2 = AZ^2 + A\Delta^2 = AZ^2 + B\Gamma^2 = \chi^2 + \beta^2$, ϗ $Z\Delta = \sqrt{(\beta^2 + \chi\chi)}$· ἀλλὰ διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΖΑΔ, ΖΒΜ, ἔςι $ZA : Z\Delta :: ZB : ZM$, ἢ $\chi : \sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)} :: \alpha+\chi :$ $ZM = \frac{\alpha+\chi}{\chi} \times \sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)}$· ὑποτεθείσης ταύτης τῆς ποσότητος $= \upsilon$, ϗ τῶν ἀπειροςῶν ληφθέντων, προέρχεται

$$\delta\upsilon = \frac{(\chi\delta\chi - \alpha\delta\chi - \chi\delta\chi)}{\chi^2} \times \sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)} + \frac{(\alpha+\chi)}{\alpha} \times \tfrac{1}{2} \times 2\chi\,\delta\chi . (\beta\beta+\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha\delta\chi}{\chi\chi} \times \sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)} + \frac{\alpha\chi\delta\chi + \chi\chi\delta\chi}{\chi\sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)}}$$

· ἀναγωγῇ δὲ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα πορισθήσεται $\delta\upsilon =$

$$\frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi - \alpha\chi\chi\delta\chi + \alpha\chi\chi\delta\chi + \chi\chi\chi\delta\chi}{\chi^2\sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)}}$$

, ἀναγωγῇ δὲ, ϗ ὑποθέσει τε $\delta\upsilon = 0$, ϗ διαιρέσει διὰ $\delta\chi$, προέρχεται, $-\alpha\beta\beta + \chi^3 = 0$, $\chi^3 = \alpha\beta\beta$, $\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta\beta}$· ἐὰν ὦν ζητῶσι δύω μέσαι ἀνάλογοι μεταξὺ β ϗ α, ἡ πρώτη ἔϛαι $= \chi$ (*)· ληφθείσης ἄρα τῆς ΑΖ ἴσης τῇ πρώτῃ ταύτῃ μέσῃ ἀναλόγῳ, διὰ τῶν σημείων Ζ, Δ ἀχθεῖσα ἡ εὐθεῖα ΖΔΜ ἔσεται ἡ ζητυμένη ἐλαχίϛη· ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ $\frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi - \alpha\chi\chi\delta\chi + \alpha\chi\chi\delta\chi + \chi\chi\chi\delta\chi}{\chi^3 \sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)}} =$ $\delta\upsilon = \frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi + \chi^4\delta\chi}{\chi^3\sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)}}$ ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = \infty$, πορισθήσεται $\chi^3\sqrt{(\beta\beta+\chi\chi)} = o$, $\beta\beta+\chi\chi = o$, $\chi\chi = -\beta\beta$, $\chi = \pm\sqrt{-\beta\beta}$, ποσότης ἀνύπαρκτος, συνιδεῖν παρεχομένη, μηδὲν ἄλλο ὑπάρχειν ἐλάχιϛον, ὅτι μὴ τὸ ἐμφαινόμενον διὰ $\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta\beta}$.

102. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.** Εἰς εὕρεσιν τῆς χ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν ΑΜ παραμέτρῳ $= \beta$ ἡ ΑΔΠ παραβολὴ (σχ. 13), ϗ εἰλήφθω $AB = \frac{\beta}{2}$, ϗ ΒΚ ἐϛάσθω κάθετος τῷ ἄξονι $AM = \frac{\alpha}{2}$· ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαϛήματι δὲ τῷ ΚΑ, γεγράφθω κύκλυ τόξον τὸ ΑΝΔ, τέμνον τὴν ΑΠ παραβολὴν καθ' ἓν σημεῖον τὸ Δ· φημὶ δὴ τὴν τεταγμένην ΔΜ ὑπάρχειν $= \chi$· ϗ γὰρ $\Delta Z = \Delta M - KB = \chi - \frac{\alpha}{2}$· ἀλλὰ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς, ἔϛιν $AM \times \beta = \Delta M^2$, ἢ $AM = \frac{\chi\chi}{\beta}$· ἄ.

(*) Ἔϛω χ μὲν ἡ πρώτη, ψ δὲ ἡ δευτέρα μέση ἀνάλογος· κἀκεῖν ἔϛαι $\div\!\!\div\ \beta : \chi : \psi : \alpha$, ϗ (Συμβ. λογ. 270) $\beta^3 : \chi^3 :: \beta : \alpha$, $\beta^3\alpha = \chi^3\beta$, $\chi^3 = \beta^2\alpha$, ϗ $\chi = \sqrt[3]{\beta^2\alpha}$.

ρα $BM = \frac{\beta}{2} - \frac{\chi\chi}{\beta}$· ϗ ἐπείπερ $KE = BM$, ἔςαι $K\Delta^2 = (\chi - \frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\beta}{2} - \frac{\chi\chi}{\beta})^2$, ποσότης ἀναγομένη εἰς $-\alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\chi^4}{\beta\beta} + \frac{\beta^2}{4}$· ἔςι δὲ ϗ $K\Delta = KA$, ϗ $KA^2 = AB^2 + KB^2 = \frac{\beta\beta}{4} + \frac{\alpha\alpha}{4}$· ἄρα $\frac{\beta\beta}{4} + \frac{\alpha\alpha}{4} = -\alpha\chi + \frac{\chi^4}{\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha}{4} + \frac{\beta^2}{4}$· μεταθέσει ἄρα ϗ ἀναγωγῇ, $\frac{\chi^4}{\beta\beta} = \alpha\chi$, $\chi^4 = \beta\beta\alpha\chi$, $\chi^3 = \beta\beta\alpha$, $\chi = \sqrt[3]{\beta\beta\alpha}$· ἄρα $\Delta M = \chi$.

103. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐκ τῆς προόδου $\div\!\div$ $\beta : \chi : \psi : \alpha$ (ὡς ἀνωτέρω ὑποσεσημείωται) προέρχεται $\beta : \alpha :: \beta^3 : \chi^3$, εἴτ' οὖν $\chi^3 : \beta^3 :: \alpha : \beta$· ἐὰν ἄρα α ᾖ διπλοῦν, τριπλοῦν, τετραπλοῦν κτ· τοῦ β, ὁ ἐκ τοῦ χ κύβος ἔςαι διπλάσιος, ἢ τριπλάσιος κτ' τοῦ ἐκ τοῦ β· εὐπετῶς ἄρα ἐπιλύεται τὸ περὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου πρόβλημα διὰ κύκλου ϗ παραβολῆς, ὃ φθάσαντες δι' ὑπερβολῆς ϗ παραβολῆς ἐπελύσαμεν (Ὑψ. Γεωμ. 309).

104. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ΄. Ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒμ ἐγγράψαι τὸ μέγιςον τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων τριγώνων (χ. 14).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ διάμετρος $A\mu = \alpha$, ϗ ἡ πλευρὰ $AB = \chi$· ἐπεὶ δὲ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία Β ἐςὶν ὀρθὴ (Γεωμ. 180), τὸ τρίγωνον ΑΒμ ἔςαι ὀρθογώνιον· ϗ δὴ ἔςαι $B\mu^2 = A\mu^2 - BA^2$, $B\mu = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· τὸ