ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως.

116. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Πᾶσα διάμετρος ΜΜ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Κέντρον (σχ. 86).

ΔΕΙΞΙΣ. Τετάχθω ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΜΕ, καὶ ἔστω ΚΔ = ΚΕ· καὶ δὴ ἴσα ἔσται τὰ τρίγωνα ΚΕΜ, ΚΔΜ· παρὰ γὰρ τὰς ὀρθὰς γωνίας Ε, Δ, εἰσὶν ἴσαι καὶ αἱ ο, τ ὡς κατὰ κορυφήν· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· τὰ δύω ἄρα τρίγωνα, ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην τὴν πρὸς δυσὶν ἴσαις γωνίαις, εἰσὶν ἴσα· ἄρα ΜΕ = ΔΜ, καὶ ΚΜ = ΚΜ· ἀλλ' ἡ ΜΕ τεταγμένη ἀπέχει τοῦ κέντρου, ὅσον καὶ ἡ ΜΔ· ἄρα ΜΔ (81) ἐστι καὶ αὕτη τεταγμένη· ἄρα τὸ Μ σημεῖον, πέρας τῆς ΜΔ καὶ δὴ καὶ τῆς ΚΜ, ἐστιν ἐν τῇ καμπύλῃ· ἄρα ΚΜ = ΚΜ ἐστιν ἀληθὲς μέρος τῆς διαμέτρου, κείμενον μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς καμπύλης. Ο. Ε. Δ.

117. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων δύω δεδομένων συζυγῶν διαμέτρων (σχ. 85) τῶν ΜΜ, Μ'Μ'' τεταγμένως ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΕΜ, Μ'Π τὸ ΚΕ² τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τοῦ ἀποσήματος τοῦ κέντρου ἀπὸ τεταγμένης, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων ὑπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης, εἴτ' ἐν τῷ ΠΗ × Πη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω ΚΕ = ρ· ὅθεν Εη = α — ρ, καὶ ΗΕ = α + ρ, καὶ ΕΗ × Εη = α² — ρ²· ἐν οὖν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΤΠΜ, ΚΕΜ ἐστι ΠΜ' : ΕΜ :: ΤΠ : ΚΕ·

ΠΜ'² : ΕΜ² :: ΤΠ² = $\frac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi^2}$ (110) : ΚΕ² = ρ².

Ἀλλὰ ΠΜ'² : ΕΜ² :: ΗΠ × Πη = α² — χ² : ΕΗ × Εη = α² — ρ² (94)· ἄρα (Γεωμ. 327) $\frac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi^2}$: ρ² :: α² — χ² : α² — ρ²· ἄρα (Συμβ. Λογ. 238) $\frac{\alpha^6 - 2\alpha^4\chi^2 + \alpha^2\chi^4 - \alpha^4\rho^2 + 2\alpha^2\rho^2\chi^2 - \rho^2\chi^4}{\chi^2}$ = α²ρ² — ρ²χ²· ἀπαλλαγῇ τοῦ κλάσματος, α⁶ — 2α⁴χ² + α²χ⁴ — α⁴ρ² + 2α²ρ²χ² — ρ²χ⁴ = α²ρ²χ² — ρ²χ⁴· μεταθέσει δὲ τῶν ὅρων α⁴ρ², 2α²ρ²χ², — ρ²χ⁴, καὶ ἀναγωγῇ, α⁶ — 2α⁴χ² + α²χ⁴ = α⁴ρ² — α²ρ²χ²· διαιρέσει διὰ α², α⁴ — 2α²χ + αχ⁴ = α²ρ² — ρ²χ²α (Ρ)· ἐπεὶ δὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς Ρ ἐξισώσεως ἀνασκευμένοις εὑρίσκεται γινόμενον ὑπὸ δύω παραγόντων ρ², α² — χ², διαιρέσει διὰ α² — χ², ἔσται ρ² = α² — χ², εἴτ' οὖν ΚΕ² = ΠΗ × Πη. Ο.Ε.Δ.

118. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπεὶ οὖν πρὸς τὸ δοκοῦν εἴληπται τὸ ΚΕ ἀπόσημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης ΕΜ, καὶ τὸ αὐτοῦ τετράγωνον ΚΕ² ἴσον δέδεικται τῷ περιεχομένῳ ἐκ τῶν ἀποτετμημένων ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΠΜ', ἐὰν ληφθῇ τὸ ΚΠ ἀπόσημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΠΜ', ἔσται ΚΠ² = ΕΗ × Εη.

119. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἀλλὰ γὰρ τεταγμένης τῆς ΕΜ, ἔστι ΚΕ = χ, ΚΕ² = χ²· ὡσαύτως τεταγμένης τῆς ΚΠ, ἔστι ΠΜ' = Χ, καὶ ΚΠ² = Χ²· ἐπεὶ οὖν ΚΕ² = χ² = ΠΗ × Πη, ἡ ἀποτετμημένη ΚΕ = χ ὑπὸ τεταγμένης τῆς ΕΜ ἔσεται μέση ἀνάλογος τῆς ἀποτετμη-

μένης, καὶ τῆς συναποτετμημένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης ΠΜ'' ἔστι καὶ γὰρ ΠΗ : χ :: χ : Πη (Συμβ. Λογ. 299)

120. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὸ ἀφ' ὁποιασῦν τεταγμένης δΙ (χ. 85) ἐπὶ τὴν Μ'Μ'' διάμετρον τετράγωνον ἔστι πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων ΜΙ' × ΙΜ'' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου ΚΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἡμιδιαμέτρου ΚΜ, εἴτ' ἐν $\delta I^2 : M'I \times IM'' :: KM^2 : KM'^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. Τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ Μ'Π, δΠ', ΜΔ, ΜΕ, καὶ ἤχθωσαν αἱ κάθετοι Ιο, ΑΓ.

β'. Ἔστω ΠΚ = χ, καὶ ΚΜ = υ, καὶ Κο = η, καὶ οΠ = ΑΙ = Ξ· ὅθεν ηΠ = Ξ + α — η, καὶ ΗΠ' = α — Ξ — η, καὶ δὴ ηΠ' × ΗΠ' = $\alpha^2 - \Xi^2 - 2\Xi\eta - \eta^2$.

γ'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΤΠΜ', ΙδΑ (Γεωμ. 220) ἔστι $TΠ = \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ (110) : ΠΜ' = υ :: ΑΙ = Ξ : Αδ = $\frac{\Xi\chi\upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$.

δ'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚΠΜ', Κοι ἔστι α' ΚΠ = χ : ΠΜ' = υ :: Κο = η : Ιο = $\frac{\upsilon\eta}{\chi}$. β'. ΚΠ = χ : ΚΜ' = υ :: ΚΟ = η : ΓΙ = $\frac{\upsilon\eta}{\chi}$. ἔστι δὲ καὶ Μ'Ι = $\upsilon - \frac{\upsilon\eta}{\chi}$, καὶ ΙΜ'' = $\upsilon + \frac{\upsilon\eta}{\chi}$, καὶ δὴ ἀκολούθως ΙΜ' × ΙΜ'' = $\upsilon^2 - \frac{\upsilon^2\eta^2}{\chi^2}$.

ε'. Ἔστι παρὰ ταῦτα δΠ' = Αδ (= $\frac{\Xi\chi\upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$ + Ιο

$(=\frac{\eta\upsilon}{\chi})$· ἄρα $\delta\Pi'^2 = \frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4-2\alpha^2\chi^2+\chi^2} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2}$ (P).

ς΄. Ἔστι δὲ ἡ $\delta\Pi'^2 : \Pi M'^2 = \upsilon^2 :: \eta\Pi' \times \Pi'H = \alpha^2 - \Xi^2 + 2\Xi\eta + \eta^2 : H\Pi \times \eta\Pi = \alpha^2 - \chi^2$ ἄρα $\delta\Pi'^2 = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 + 2\Xi\eta\upsilon^2 - \eta^2\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^1}$ (Σ).

ζ΄. Παραβαλλομένων ἓν τῶν δύω τοῦ $\delta\Pi'^2$ δυνάμεων P, Σ (ε΄., ς΄.) ἀναφύεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4-2\alpha^2\chi^2+\chi^4} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2} = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 - \eta^2\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2}$.

ἡ. Μεταθέσει τοῦ $\frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2-\chi^2}$, γίνεται $\frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4-2\alpha^2\chi^2+\chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2} = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 - \eta^2\chi^2}{\alpha^2-\chi^2}$· ἐντεῦθεν ἄρα ἀπ. αλλαγῇ τῶν κλασμάτων, καὶ μεταθέσει, $\Xi^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2\eta^2}{\chi^2} + \eta^2 - \chi^2$ (T).

θ΄. Ἐκ τῆς T ἐξισώσεως προελθεῖν δύναται ἡ ἀναλογία, $AI^2 = \Xi^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2\eta^2}{\chi^2} - \eta^2 - \chi : KE^2 = \alpha^2 - \chi^2$ (117) :: $MI \times IM'' = \upsilon^2 - \frac{\upsilon^2\eta^2}{\chi^2}$ (δ΄.) : $KM'^2 = \upsilon^2$ (β΄.)· τὸ γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων, ὡς δῆλον, ἐξισοῦται τῷ ἐκ τῶν μέσων.

ι. Τέλος δὲ ἐν τοῖς ὁμοίος τριγώνοις ΙΑδ, ΚΕΜ ἔςιν ΑΙ : ΚΕ : : δΙ : ΚΜ, καὶ $AI^2 : KE^2 :: \delta I^2 : KM^2$.

Ἐντεῦθεν ἡ δεῖξις· εὕρηται μὲν ἄρτι $AI^2 : KE^2 :: \delta I^2 : KM^2$· ἀλλ' εὕρηται καὶ $AI^2 : KE^2 :: M'I \times IM'' : KM'^2$ (θ'.)· ἄρα $\delta I^2 : KM^2 :: M'I \times IM'' : KM'^2$· ἄρα καὶ $\delta I^2 : M'I \times IM'' :: KM^2 : KM'^2$ (Β) Ο. Ε. Δ.

121. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἔςω δΙ = υ, καὶ ΚΜ' = α, καὶ ΚΜ = β· ὅθεν $M'I = \alpha - \chi$, καὶ $IM'' = \alpha + \chi$· ἡ δὲ Β ἐξίσωσις γενήσεται $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

Ἐν τῇ ἐλλείψει ἄρα αἱ δύω συζυγῶν διαμέτρων ἰδιότητες αἱ αὐταί εἰσι ταῖς τῶν δύω ἀξόνων (92), παρ' ὅσον αἱ τεταγμέναι πλαγίως ἴςανται ταῖς διαμέτροις διὰ τὸ καὶ τὰς ἁπτομένας πλαγίας αὐταῖς ἐπικεῖσθαι.

122. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ προέρχεται $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \chi^2 \beta^2}{\alpha^2}$ καὶ $\upsilon = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 \beta^2 - \chi^2 \beta^2}{\alpha^2}}$, τουτέςιν ἑκάςη τεταγμένη δΙ ἀντιςοιχεῖ ἑτέρα ἀποφατικὴ ἴση ἡ Ιζ· β'. καὶ ἀκολούθως πᾶσα διάμετρος δίχα τέμνει τὴν ἐφ' ἑαυτὴν διπλῆν τεταγμένην.

123. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Δυνατὸν ἐπιπεσεῖν τὸ Π τῷ Ε· τηνικαῦτα τοίνυν αἱ ΚΜ, ΚΜ', ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς γωνίας τῶν τριγώνων ΚΠΜ', ΚΕΜ, ἴσαι ἔσονται, εἴτ' οὖν ΚΜ = ΚΜ', καὶ δὴ α = β, ἐπὶ οὖν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως τοῦ α ἀντὶ β εἰσαχθέντος, ἔςαι $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \alpha^2 - \chi^2 \alpha^2}{\alpha^2} = \alpha^2 - \chi^2$, ὑποτιθεμένων ἀμέλει ἴσων τῶν δύω συζυγῶν διαμέτρων· ἀλλ' ἔςιν ἡ αὐτὴ τῇ

τȣ̃ κύκλȣ (93)· ἡ αὐτὴ ἄρα ἐξίσωσις, κυκλικὴ μὲν ἐςὶ τῶν τεταγμένων πρὸς ὀβὰς ἐφεςηκηῶν τῇ διαμέτρῳ· τȣ̃ναντίον δὲ, ἐλλειπτική.

124. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐπείπερ ἡ ἀπτομένη ΗΒ παράλληλός ἐςι τῷ ἐλάττονι ἄξονι (χ. 67) ΜΚΜ΄΄ οἱ δύω ἄξονες εἰσὶ πάντως συζυγεῖς διάμετροι (59)· ἔςιν ἄρα ἡ ἀναλογία „τὸ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὸν ἐλάττονα ἄξονα „τεταγμένης τετράγωνον πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ὑπ' „αὐτῆς ἀποτετμημένων ἔςιν, ὡς τὸ ἀπὸ τȣ̃ μείζονος ἡ„μιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος΄΄· ἐν τῇ ἐλλείψει ἄρα ἰδιότητες εὑρίσκονται αἱ αὐταὶ, εἴτε ὁ μείζων, εἴτε ὁ ἐλάσσων ἄξων ληφθῇ (90).

125. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Εἰς δὲ πλείω τῶν λεγομένων ἐμπεδῶσιν, κείσθω εὑρεῖν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσιν περιέχȣσαν τεταγμένας ἐπὶ τὸν δεύτερον ἄξονα, καὶ ἀποτετμημένας ἀπ' αὐτȣ̃ πρὸς τῷ κέντρῳ· ἐπεὶ τοίνυν (χ. 87) μπ = ΚΠ = χ, καὶ Κπ = Πμ = υ, ἀπόχρη μόνον μεταβαλεῖν τὴν υ εἰς χ, καὶ τȣ̃ναντίον· ὅθεν προκύψει $\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{\alpha^2 - \upsilon^2}$, ἐξίσωσις ἡ ζητȣμένη· ἐκ ταύτης δὲ γίνεται $\chi^2 \times \alpha^2 = \beta^2 \times \alpha^2 - \upsilon^2 \times \beta^2$, μεταθέσει, $\upsilon^2 \times \beta^2 = \beta^2 \times \alpha^2 - \chi^2 \times \alpha^2$, ὅθεν $\upsilon^2 : \beta^2 - \chi^2 :: \alpha^2 : \beta^2$, καὶ $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \times \overline{\beta^2 - \chi^2}$· δῆλον ἄρα, ὅτι ἀληθής ἐςιν ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα ἀναλογία (124).

126. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἡ τȣ̃ δευτέρȣ ἄξονος ὑφαπτομένη ΠΤ ἔςιν $= \frac{\beta^2 - \upsilon^2}{\upsilon}$, κληθείσης υ τῆς ἀ-

πὸ τȣ̃ δευτέρȣ ἄξονος ἀποτετμημένης Κπ· ὁμοίων γὰρ ὄντων τῶν τριγώνων τμΠ, μΤπ, ἔςι τΠ : Πμ = πΚ :: μπ = ΠΚ : πΤ, τȣ̃τ' ἔςιν $\frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ (110) : υ :: χ : πΤ = $\frac{\chi^2 \upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$· ἀλλ' ἔςιν $\alpha^2 - \chi^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta}$, ὡς ῥᾷςα συνάγεται ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἔλλειψιν ἐξισώσεως $\frac{\beta^2}{\alpha^2} \times (\alpha^2 - \chi^2) = \upsilon^2$, ὅθεν ἀποφέρεται καὶ $\chi^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2}$· ἀντικαταςάσει ἄρα τῶν δε τῶν δυνάμεων ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\chi^2 \upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$ γίνεται πΤ = $\frac{\beta^2 - \upsilon^2}{\upsilon}$.

127. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθήσεται βȣληθεῖσι ȣ̃ ἡ ὑποκάθετος, ȣ̃ αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι, ἐν αἷς ἐμφέρειά τε τῶν τύπων φανήσεται, ȣ̃ μὴν ἀλλὰ ȣ̃ ταὐτότης πρός γε τὰς σχέσεις, ὡς περιεργότερον ἐπιςήσασι δῆλον καθίςαται.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Δέδεικται δὲ ὡς τὸ ἀπόςημα τȣ̃ κέντρȣ ἀπὸ τȣ̃ σημείȣ, καθ' ὃ ὁ μείζων ἄξων συμβάλλει τῇ ἁπτομένῃ, τῇ ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα τεταγμένης ἀχθείσῃ, ἔςι τρίτη ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ὑπ' αὐτῆς τῆς τεταγμένης ȣ̃ πρὸς τὸν μείζονα ἡμιάξονα, εἴτ' ȣ̃ν χ : α :: α : ΚΤ (113)· ταὐτὸν ἄρα δειχθήσεται (τῶν ἰδιοτήτων ὡς εἴρηται ταὐτιζομένων) κἀπὶ τεταγμένης ἐπὶ τὸν ἐλάττω ἄξονα, ἢ ȣ̃ πᾶσαν διάμετρον· ἔςω ȣ̃ν (σχ. 88) ἡ ἡμιδιάμετρος ΚΙ = α, ȣ̃ ἡ ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΔΧ ἀποτετμημένη

ΚΔ = χ· καὶ γινομένης ΚΤ ἐνταῦθα τῆς ΚΗ, ἔσται ΚΔ = χ : ΚΙ = α : : ΚΙ = α : ΚΗ.

129. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἐν ἐλλείψει τὸ ὑπὸ δύω συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΙ, ΚΜ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΚΙΒΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων ΚΧ, ΟΡ.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἤχθω ἡ ΜΧ, καὶ ἐκάθω κάθετος ἡ ΠΜ, καὶ διὰ τοῦ Χ ἤχθω ΕΔ παραλλήλως τῇ ΚΜ, καὶ δὴ ἔσται ἴσα τὰ παραλληλόγραμμα ΚΔΕΜ, ΑΧΠΚ τὸ γὰρ τρίγωνον ΚΜΧ = $\frac{\text{ΚΔΕΜ}}{2}$, διὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ΚΜ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόσημα τῶν δύω παραλλήλων ΚΜ, ΔΕ)· ἔστι δὲ καὶ ΚΜΧ = $\frac{\text{ΚΧΑΠ}}{2}$, διὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ΚΙΧ, καὶ τὰς δύω παραλλήλους ΑΠ, ΚΧ· ἄρα (Συμβ. Λογ. 234) ΚΔΕΜ = ΚΧΑΠ.

β΄. Παρὰ δὲ ταῦτα α΄. τὰ παραλληλόγραμμα ΚΔΕΜ, ΚΙΒΜ, ΚΗηΤ, ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ κείμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΚΗ, ΒΤ, ἔσονται ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ΚΔ, ΚΙ, ΚΗ (Γεωμ. 290)· ἀλλ' ἔστι ΚΔ : ΚΙ : : ΚΙ : ΚΗ (128)· ἄρα ΚΔΕΜ : ΚΙΒΜ : : ΚΙΒΜ : ΚΗηΤ. (Α) β΄. τὰ παραλληλόγραμμα ΚΧΑΠ, ΚΧΟΡ, ΚΗητ διὰ τὰς παραλλήλους ΗΟ, ΚΤ εἰσὶν ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ΚΠ, ΚΡ, ΚΤ· ἐπεὶ οὖν ΚΠ : ΚΡ : : ΚΡ : ΚΤ (128), ἄρα ΚΧΑΠ : ΚΧΟΡ : : ΚΧΟΡ : ΚΗηΤ (Β).

Ἀλλ' ἐν ταῖς δυσὶ συνεχέσιν ἀναλογίαις Α, Β ἑκάτερον ἄκρον τῆς ἑτέρας ἴσται ἑκατέρῳ ἄκρῳ τῆς ἑτέρας· εἴγε ΚΔΕΜ = ΚΧΑΠ (α΄.)· ἄρα καὶ τὸ μέσον ἴσται τῷ μέσῳ, εἴτ' οὖν ΚΙΒΜ = ΚΧΟΡ. Ο.Ε.Δ.

130. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀλλὰ τὸ μὲν παραλληλόγραμ-

μον ΚΙΒΜ ἴσῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΚΙ, καὶ τῆς καθέτου ΕΜ (Γεωμ. 282), τὸ δ' ὀρθογώνιον ΚΧΟΡ = ΚΧ (= α) × ΚΡ (= β), ἄρα ΚΙ × ΕΜ = α × β τουτέστι „τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς καθέτου ΕΜ, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ πέρατος διαμέτρου ἐπὶ τὴν αὐτῆς συζυγῆ, „καὶ ὑπ' αὐτῆς τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων."

131. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ἐλλείψεως δοθείσης τῆς ΑΒΓΔ, εὑρεῖν τὸ κέντρον καὶ τοὺς ἄξονας καὶ τὰς ἑστίας αὐτῆς (κ. 89).

ΛΥΣΙΣ. α'. Ἤχθωσαν παραλλήλως δύο χορδαὶ αἱ ΑΒ, ΔΖ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα, καὶ διὰ τῶν μέσων σημείων ο, υ διήχθω εὐθεῖα ἡ ΘΗ, ἥτις ἔσται μία τῶν διαμέτρων (122)· τὸ δὲ μέσον αὐτῆς χ ἔσται κέντρον τῆς ἐλλείψεως. β'. κέντρῳ μὲν τῷ χ, διαστήματι δὲ τῷ Θχ, γεγράφθω κύκλος, ὅστις, ἤτοι οὐ μὴ τεμεῖ ὅλως τὴν ἔλλειψιν· καὶ δὴ τότε ἡ διάμετρος ἔσται [illegible] ΑΓ· ἢ τεμεῖ κατὰ τέσσαρα σημεῖα α, Θ, ι, λ, [illegible] διεστῶτα τῶν κορυφῶν Α, Γ (81)· καὶ δὴ ἐπεζεύχθω ἡ ιλ, ἣν δίχα τεμνέτω ἡ κάθετος Αχ Γ, ἥτις ἔσται ὁ μείζων ἄξων (81)· ἡ δὲ κάθετος Βχ Δ ἀπὸ τοῦ χ ἀχθεῖσα ἔσται ὁ ἐλάττων· τέλος δὲ τὸ ἥμισυ χΓ τοῦ μείζονος ἄξονος, ἀπὸ τοῦ Β πέρατος τοῦ ἐλάττονος ἄξονος μετενεχθὲν ἐπὶ τὸν μείζονα, ἐκδηλώσει τὰς δύο ἑστίας Ε, ε (87) Ο. Ε. Π.

132. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως.

ΛΥΣΙΣ. α'. Ζητηθήτω ἡ ἐπιφάνεια κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ὁ τῆς ἐλλείψεως μείζων ἄξων ΑΚ (Γεωμ. 268, 370)· β'. γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν· ΑΓ : ΒΔ,

ὡς τὸ εὑρεθὲν κυκλικὸν ἐμβαδὸν πρὸς τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως (101).

Η᾽ ζητηθείσης μέσης ἀναλόγου τῶν ΑΚ, ΒΔ, κύκλος ὁ διαμέτρῳ τῇ μέσῃ ἀναλόγῳ γραφεὶς ἔσται ἴσος τῇ ἐλλείψει (102).

133. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὴν στερεότητα τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοειδοῦς (σχ. 82).

ΛΥΣΙΣ. Ἐννοήσωσαν ἥτε ἡμίσεια ἔλλειψις ΗηΜ', καὶ τὸ ἡμικύκλιον ΗηΒ, περιεχθέντα ἄξαξ περὶ τὴν Ηη· ἐκεῖνον μὲν ἡ μὲν ἡμίσεια ἔλλειψις κωνοειδα, τὸ δ' ἡμικύκλιον σφαῖραν ἀπογεννήσει· στοιχεῖα δ' αὐτῶν ἔσονται οἱ κύκλοι, οἱ καταγραφόμενοι διάτε τῶν ἐν τῇ ἐλλείψει τεταγμένων ΠΜ', ΠΜ', καὶ διὰ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ Π'Β, Πβ.

α'. Οὖν αἱ τεταγμέναι ΠΜ' τῆς ἐλλείψεως ἔσονται πρὸς τὰς τοῦ κύκλου Π'Β :: ΠΜ' = β : Π'Η = α (101) κληθείσης ὧν ἐν τῇ ἐλλείψει τῆς Π'Μ' = υ καὶ τῆς Π'Β = Τ τῆς ἐν τῷ κύκλῳ ἀντιστοιχούσης· ἔσται υ : Τ :: β : α· καὶ δὴ $υ^2 : Τ^2 :: β^2 : α^2$.

β'. Κύλινδρος ὁ τῇ ἐλλείψει περιγεγραμμένος, οὗ τὸ ἥμισυ = ΚΔΗη πρὸς κύλινδρον τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον, οὗ τὸ ἥμισυ = ΑΗΡη, ὡς ὁ κύκλος, οὗ ἡ ηΔ, ἢ ὁ ἐλάττων ἡμιάξων β, ἔστιν ἀκτίς, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἀκτὶς ηΡ ὁ μείζων ἡμιάξων α· ἔχοντες καὶ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος Ηη οἱ κύλινδροι, ἔσονται ὡς αἱ βάσεις, ἢ οἱ δύω κύκλοι ἔχοντες, ὁ μὲν Δη = β, ὁ δὲ ηΡ = α, ἀκτῖνας (Συμβ. Λογ. 306)· ἀλλ' οἱ δύω κύκλοι εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα $ηΔ^2 = β^2$, $ηΡ^2 = α^2$ (Γεωμ. 398)· κύλινδρος ἄρα ὁ τῇ ἐλλείψει περιγεγραμμένος πρὸς κύλινδρον τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον :: $β^2 : α^2$.

γ'. Ἕκαστος κύκλος γεγραμμένος διὰ μιᾶς ἐν τῇ

ἐλλείψει τεταγμένης υ ὡς στοιχεῖον τῆς κωνοίδος πρὸς τὸν ἀντίστοιχον κύκλον τὸν διὰ τῆς Τ τεταγμένης ὡς στοιχεῖον σφαιρικὸν γεγραμμένον :: $υ^2 : Τ^2$ (Γεωμ. 398)· ἐκεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν στοιχείων τῆς κωνοίδος πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν στοιχείων τῆς σφαίρας, εἴτ' ἦν ἡ κωνοὶς πρὸς τὴν σφαῖραν :: $υ^2 : Τ^2$, ἢ ἑπομένως (133 ἐν τῇ λύσει) :: $β^2 : α^2$· ἐπεὶ τοίνυν ὁ τῇ κωνοίδι περιγεγραμμένος κύλινδρος πρὸς τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον :: $β^2 : α^2$ (ἀνωτ.)· ἄρα (Γεωμ. 327) ἡ στερεότης τῆς κωνοίδος πρὸς τὴν τῆς σφαίρας, ὡς ὁ τῇ κωνοίδι πρὸς τὸν τῇ σφαῖρᾳ περιγεγραμμένον κύλινδρον.

Ἄρα ἢ ἐναλλάξ· ἡ στερεότης τῆς κωνοίδος πρὸς τὸν αὐτῇ περιγεγραμμένον κύλινδρον, ὡς ἡ στερεότης τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ταύτῃ περιγεγραμμένον κύλινδρον.

134. Ἀλλ' ἡ στερεότης τῆς σφαίρας ἐστὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ αὐτῇ περιγεγραμμένου κυλίνδρου (Γεωμ. 463)· ἄρα καὶ ἡ στερεότης τῆς κωνοίδος ἐστὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ αὐτῇ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

Ἄρα ἡ τῆς κωνοίδος στερεότης εὑρεθήσεται ζητηθέντος κυλίνδρου, ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, ὃ ἐστιν ἀκτὶς ὁ ἐλάττων ἡμιάξων Δ'η, ἢ Π'Μ', ὕψος δὲ τὸν μείζονα ἄξονα Ηη (Γεωμ. 452), καὶ τῆς αὐτοῦ στερεότητος $\frac{2}{3}$ ληφθέντων. Ο. Ε. Π.

135. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο' ἄρα τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοίδος, καθὰ δὴ καὶ τῆς παραβολικῆς (73), κυβισμὸς τοῦ κατὰ τὸν κύκλον τετραγωνισμοῦ ἐξήρτηται· ἀμήχανον γὰρ ἄλλως αὐτῶν εὑρεῖν τὴν στερεότητα, πρὶν ἢ τοὺς πολλαπλασιαστοὺς κύκλους τετραγωνίσαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς χρήσεως τῶν τῆς ἐλλείψεως ἰδιοτήτων.

136. Ὅταν τὸ φῶς ἀπὸ μέσου διαφόρου ἐπὶ μέσον διάφορον πλαγίως ἐμβάλλῃ, ἀπ' ἀέρος φέρ' εἰπεῖν εἰς ὕελον, ἀφίσταται τῆς οἰκείας φορᾶς, θραυνόμενον, ὡς λέγειν εἰώθασι· ἡ δ' ἐπιστήμη, ἡ περὶ ταύτην τὴν τοῦ φωτὸς θραῦσιν ἀσχολουμένη, καλεῖται Διοπτρική, περὶ ἧς ἡμῖν εἰρήσεται ὕστερον.

137. Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΕΜΔ (σχ. 90) κάθετος τῇ ΒΓ ἐπιφανείᾳ τοῦ μέσου ΗΜη κατὰ τὸ σημεῖον Μ, ἔνθα εἰσδύει φωτοφυὴς ἀκτὶς ἡ ΠΜ· καλεῖται ἐν γωνίᾳ ἐπιπτώσεως ἡ ὑπὸ ΠΜΔ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς καθέτου ΔΜ καὶ τῆς φορᾶς ΠΜ τῆς ἀκτῖνος· γωνία δὲ θράυσεως ἡ ὑπὸ ΖΜΕ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς νέας φορᾶς ΜΕ, καθ' ἣν τῆς προτέρας ἀποχωρεῖ, καὶ τῆς καθέτου ΜΕ· διὰ πείρας τοίνυν δεδειγμένα εἰσὶ τὰ ἑξῆς.

138. α'. Ἐὰν φωτοφυὴς ἀκτὶς ἡ ΔΜ διὰ τοῦ αὐτοῦ μέσου διήκῃ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ τοῦ μέσου, ὁδεμίαν ὑφίσταται θραῦσιν, εἴτ' ἂν φέρεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀεὶ ὁδόν.

139. β'. Τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς ἐπιπτώσεως, καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θράυσεως, τὸν αὐτὸν ἔχουσιν ἀεὶ λόγον, τῆς μεταβάσεως ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ τελουμένης μέσου· ἐὰν φέρε γνωσθῇ ἡ γωνία τῆς θράυσεως, ἣν ὑφίσταται τὸ φῶς, ἀπὸ τοῦ ἀέρος μεταπίπτον ἐπὶ

τὴν ὕελον· εἶτα, ἑτέρας ἐπιπτώσεως δοθείσης, δι' ἀναλογίας γνωσθήσεται ἡ οἰκεία αὐτῆς θραῦσις.

140. γ'. Ὁ λόγος τῶν ἡμιτόνων τῶν τῆ φωτὸς γωνιῶν, ἀπ' ἀέρος εἰσιόντος ἐς ὕελον, ἔστι χεδὸν :: 3 : 2, ἀφ' ὑελέυ δ' ἐπ' ἀέρα :: 2 : 3· τεθείωθωσαν δὲ ἀκριβεῖς οἱ λόγοι ὗτοι.

141. Ἔστω ἤδη ἔλλειψις, ἐν ᾗ Ηη : Εε :: 3 : 2, καταγραφομένη προδήλως τῷ ἀποτμηθῆναι εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη τὴν εὐθεῖαν Ηη, ἢ ὡς ἄξων μείζων λαμβάνεται, καὶ μετενεχθῆναι ἀφ' ἑκάστυ πέρατος ἐπ' αὐτὴν τὸ ἑνός τινος τῶν δὲ τῶν τμημάτων ἥμισυ ΕΗ = εη, εἰς εὕρεσιν τῶν ἑστιῶν τῆς γραφησομένης ἐλλείψεως· τοιγαρῦν ὅσης Ηη = 3, καὶ εΕ = 2, ἔσται Ηη : Εε :: 3 : 2· μετὰ ταύτην δὲ τὴν κατασκευὴν φημί.

142. Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τῆ φωτὸς αἱ παράλληλοι τῷ ἄξονι Ηη, ὡς ἡ ΠΜ, διιῦσαι διὰ τῆς ἐλλειπτικῆς περιφερείας, συλλεχθήσονται κατὰ τὴν ἑστίαν Ε, τὴν μᾶλλον ἀπέχυσαν τῆ ἀκτινοβόλυ σώματος.

Εἰς δέγε τὴν τύτυ δεῖξιν, ἁ. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΕΜ προαχθείσης ΜΡ = εΜ· ὅθεν ΕΡ = Ηη (84)· ἡ δὲ κατὰ τὸ Μ ἁπτομένη ΜΤ ἐπιςήσεται πρὸς ὀρθὰς τῆ Ρε εὐθείᾳ (103).

β'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς τῆ ἁπτομένη ΜΤ καθέτυ ΔΜ, ληφθῆ ΔΜ = ΕΜ = ΜΤ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Μ, ἀκτῖνι δὲ τῆ ΜΔ, κύκλος γραφῆ διερχόμενος διὰ Δ, Π, Ε, ἡ κάθετος ΠΙ ἡμίτονον ἔσεται τῆς γωνίας τῆς ἐπιπτώσεως ΠΜΔ, ἡ δὲ κάθετος ΕΖ, ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΕΜΖ (Γεωμ. 482).

Φημὶ δὴ ὡς ἡ ὑπὸ ΕΜΖ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῆ τῆς θράυσεως γωνίᾳ, ἐὰν ἡ τῆ φωτὸς ἀκτὶς ΜΠ διελθῦσα διὰ

Μ φέρηται πρὸς τὸ Ε· ἐπὶ γὰρ ὀρθῶν ἐσῶν τῶν γωνιῶν ΠΙΜ, ΕΖχ, ἐπὶ τῆς ὑπὸ ΠΜΙ = Εχζ (αἱ γὰρ παράλληλοι ΠΜ, Ηη τέμνονται ὑπὸ τῆς ΔΕ εὐθείας), τὰ τρίγωνα ΠΙΜ, Εχζ ὅμοιά εἰσι· ἐπὶ δὴ ΠΙ : ΕΖ :: ΠΜ = ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς) : Εχ.

Οὐσῶν δὲ παραλλήλων ἐπὶ τῶν Μχ, Ρε ὡς τῇ ΜΤ καθέτων (103) εἰσὶ καὶ τὰ ΕΜχ, ΕΡε τρίγωνα ὅμοια· ἐπὶ δὴ ΕΜ : Εχ :: ΕΡ = Ηη : Εε· ἄρα ΠΙ : ΕΖ :: Ηη : Εε· ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς Ηη : Εε :: 3 : 2· ἐὰν ἄρα τεθῇ ΠΙ = 3, ἔσται κατὰ τὸν νόμον τῆς θράυσεως ΖΕ = 2, ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θράυσεως· ἄρα ἡ γωνία τῆς θράυσεως ΖΜΕ ἔσται τοιάδε, ὡς τὴν ἀκτῖνα ΠΜ φέρεσθαι πρὸς τὸ Ε. Ο.Ε.Δ.

143. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα ἔλλειψις, ἐν ᾗ ἔστι Ηη : Εε :: 3 : 2 περιενεχθεῖσα ἀπογεννήσῃ ἐλλειπτικὴν κωνοῖδα, πᾶσαι αἱ δι' αὐτῆς διελθοῦσαι τοῦ φωτὸς ἀκτῖνες, παραλλήλως τῷ ἄξονι ἀναθρανωθεῖσαι, συλλεχθήσονται ἐν τῇ ἑστίᾳ Ε.

144. Ἐὰν τοίνυν ἐν τῇ γεννητρίᾳ ἐλλείψει ΗΟηχ, ἐκ τοῦ Ε γραφῇ τόξον κύκλου τὸ Μυτ, καὶ τὸ σχῆμα Μυτη περιαχθῇ περὶ τὴν ηη ὡς περὶ ἄξονα, ἀπογεννηθήσεται μέρος τῆς εἰρημένης κωνοῖδος τὸ Μυτη, ἐν ᾧ πᾶσαι αἱ τῷ ηη ἄξονι παραλλήλως ἐμβάλλουσαι ἀκτῖνες ΠΜ συλλεχθήσονται κατὰ τὸ Ε σημεῖον, τὸ ἐκτὸς τῆς κωνοῖδος κείμενον· εἰσιοῦσαι γὰρ φέρονται πᾶσαι πρὸς τὸ Ε, ὡς ἤδη δέδεικται, ἐξιοῦσαι δὲ κατὰ τὰς φορὰς ταύτας ἀκτῖνες καθίσανται τοῦ Μυτ κύκλου, τοῦ ἐκ τοῦ Ε γραφέντος, ἐξιοῦσαι φημὶ καθέτως τῇ κοίλῃ τοῦ ἀέρος ἐπιφανείᾳ, ὑδόλως θρανωθήσονται (138), καὶ πᾶσαι τενοῦσι πρὸς τὸ Ε.

145. Ἀποκαθίσεται ἄρα τὸ εἰρημένον μέρος, ὑέλινος κανονικὸς φακὸς ἐξαίσιος.

146. Ἵνα μὴ ἡ πυκνότης τῆς ὑέλου ἐξασθενίζῃ πάμπαν τὸ φῶς, λεπτέον ὕελον λεπτοτάτην· ὅπερ ἔσται λαμβανομένης γεννητρίας ἐλλείψεως μεγάλης, καὶ ταύτης τόξου λίαν μικροῦ εἰς χρῆσιν τιθεμένου.

147. Καὶ τῶν ἑπτὰ δὲ χρωμάτων, ἃ συντιθέασι μίαν τινὰ δέσμην τοῦ φωτὸς, διαφόρως θραυομένων ἐπὶ τὴν αὐτὴν τῆς ἐπιπτώσεως γωνίαν, ὡς ἀποδεικνύουσιν αἱ πεῖραι τοῦ ὑελίνου τριγωνικοῦ πρίσματος, περὶ οὗ ἐροῦμεν, ἐν τῇ διαληφθείσῃ περιπτώσει, οἱ συλλέγονται πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἀκριβῶς κατὰ τὴν ἑστίαν Ε, ἀλλ' ὡς ἔγγισα κατ' αὐτήν.

148. Ἔστω σχῆμα ἀποτελούμενον ἀπὸ τῆς μερίδος Μντ τῆς ἐλλείψεως, καὶ ἀπὸ τοῦ Χυτόξου κύκλου, τοῦ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, ἀκτῖνι δὲ μείζονι, ἡ Εη, γεγραμμένου, συνημμένων διὰ τῶν εὐθειῶν υΜ, Χτ· φημὶ δὴ, ὡς τοῦτο τὸ σχῆμα, περιεχθὲν περὶ ἄξονα τὸν ην, ἀπογεννήσει στερεὸν, οἷον ἅπασαι αἱ τῷ ἄξονι παράλληλοι ἀκτῖνες ΜΟ, εἰσελθοῦσαι εἰς τὴν κοιλότητα Μντ, συγκροτήσουσι, μετὰ τὴν αὐτῶν ἔξοδον ἐκ τοῦ στερεοῦ φερόμεναι πρὸς τὸ ψ, ἀποχωροῦσαι ἀλλήλων (131), ὥσπερ εἰ πᾶσαι ἀπὸ τοῦ Ε ἐκινήθησαν· ἡ ΟΜ φέρε χωρήσει τὴν φορὰν ΜΡ, προαγωγὴν οὖσαν τῆς ΜΕ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ ἀκτὶς ΜΟ, εἰσιοῦσα εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν κοιλότητα Μντ κατὰ τὸ Μ, ἀποχωρεῖ τοσοῦτον τῆς τῇ καμπύλῃ καθέτου ΜΔ, ὅσον ἡ προαγωγὴ αὐτῆς ΜΠ εἰσδύουσα εἰς τὴν κυρτότητα Μντ, ἀφίσταται τῆς ΜΖ προαγωγῆς τῆς ΔΜ· καὶ γὰρ τῆς κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας ΟΜΕ ἴσης οὔσης τῇ κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίᾳ ΠΜΔ, ὡς κατὰ κορυφὴν, ἡ τῆς θράυσεως γωνία ΔΜΡ

ἴση ἔσεται τῇ τῆς θράυσεως γωνίᾳ ΕΜΖ (139)· ἄρα ἡ φορὰ ΡΜ, ἣν θραυσθεῖσα φέρεται ἡ ΜΟ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται εὐθείας, ἐφ' ἧς καὶ ἡ ΜΕ· ἄρα ἡ ΜΟ θραυσθεῖσα κινηθήσεται ὡς φερομένη ἀπὸ τοῦ Ε· ἀλλ' ἐξιοῦσα διατηρήσει πρὸς τὸ Ρ τὴν φορὰν ΜΡ, ὡς τοῦ ΙΧ ἀκτὶς ΡΕ, κάθετος τῇ τοῦ ἀέρος ἐπιφανείᾳ ΙΧ· ἔξεισιν ἄρα τῆς ὑέλου, καθάπερ εἰ ἐφέρετο ἐκ τοῦ Ε.

149. Φακὸς ἄρα ὁμοιόχημος τῷ διαληφθέντι ὑέλινος ξυντελεῖ λίαν τοῖς ἀμβλύωψι· καὶ γὰρ αἱ ἀκτῖνες αἱ ἀπὸ σώματος λίαν ἀφεξῶτος ἀποπεμπόμεναι πρὸς αἴσθησιν, ὖσαι παράλληλοι, μετὰ τὸ διελθεῖν τὴν τῆς ὑέλου κοιλότητα εἰσχωρήσουσιν εἰς τὸν κατὰ τὸ Υ κείμενον ὀφθαλμὸν, ὡς εἰ ἐφέροντο πᾶσαι ἀπὸ τῆς ἑσίας Ε· δυνήσεται ἄρα ἰδεῖν τὸ ἀφεξῶς ὁρατὸν, ὡς εἰ ἔκειτο κατὰ τὸ Ε.

150. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Σαφὲς ἄρα ἐκ τῆς προεκτεθείσης δείξεως, ὡς ἐν καμπύλῃ οἱαδήποτε τῇ ΗΟθκ, ἡ γωνία τῆς ἐπιπτώσεως ΟΜΕ = ΠΜΔ ἡ αὐτή ἐστιν ἐπὶ ἀκτῖνος τῆς ΟΜΠ, τῆς εἴτε εἰς τὴν κυρτότητα, εἴτε εἰς τὴν κοιλότητα τῆς καμπύλης εἰσιούσης· καὶ δὴ καὶ ἡ γωνία τῆς θράυσεως ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περιπτώσεων ἡ αὐτὴ ἔσεται ΕΜΖ = ΡΜΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῆς Υπερβολῆς.

151. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Οἱ ὑπερβολικοὶ κλῶνες ΗΜ, ΗΜ΄ ἐπ' ἄπειρον ἀποχωροῦσι τοῦ ἄξονος ΗΠ (κ. 68).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΗΒ > ΑΗ (17), καὶ τὰ ἐφεξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοια τῷ τριγώνῳ ΑΗΒ, ἑκάστη