φθήσεται ἡ ζητουμένη στερεότης Σ. ἀλλὰ γὰρ εὔδηλον, ὡς ἡ μικρὰ παραβολικὴ κωνοῖς ΗχΕ διεχημάτισαι πρὸς τὸ Δ βίᾳ τῆς κόνεως, τῆς πράγματι ἀπορρᾳγείσης γῆς ὕσης μόνης τῆς κολούρου κωνοίδος ΓΤχΕ· δεῖ ὖν ἀποκόψαι τῆς εὑρημένης Σ στερεότητος, τὴν τοῦ ΗχΕ.

76. Εἰς δέ γε τοῦτο, γνωστὸν μέν ἐστι τὸ ὕψος ΕΗ $= \frac{\sqrt{2v^2 - y}}{2}$· ἐπεὶ δὲ ΕΖ = 2ΕΗ (27), γνωστὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως χΕΖ τῆς κωνοίδος χΗΖ, καὶ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς τῆς βάσεως (Γεωμ. 298), ἣν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ $\frac{ΗΕ}{2}$, ἕξομεν τὴν στερεότητα τοῦ ΗχΖ, ἧς ἀφαιρεθείσης ἀπὸ Σ, καταλειφθήσεται ἡ ἀληθῶς ἀποκρυφθεῖσα γῆ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Ελλείψεως.

77. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Η᾽ ἔλλειψις ἔστι καμπύλη ἀνακάμπτουσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΑΗ > ΗΒ (κ. 67), καὶ πάντα τὰ ἐφεξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοιά εἰσι τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ, αἱ ΑΠ τάχιον αὔξουσιν, ἢ αἱ αὐτῶν ΠΔ· τελευταῖον ὖν ἔσται τις ΕΠ = ΠΔ τῇ ἑαυτῆς· αὕτη ὖν ἡ ΠΔ μετενεχθεῖσα ἐφ᾽ ἑαυτὴν ἐκ τοῦ Ε, πεσεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος κατὰ τὸ η· οἱ δύω ἄρα κλῶνες ΗΜη, ΗΜ΄η συνενωθήσονται κατὰ τὸ η. Ο. Ε. Δ.

78. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τῇ ἐλλείψει ἄρα, δύω μὲν ἔσονται αἱ κορυφαὶ Η, η, εἷς δ' ὡρισμένος ἄξων ὁ Ηη.

79. Αἴτημα. Ἐπὶ τῆς Ηη εἰλήφω ηε = ΗΕ, καὶ ἐπ' αὐτῆς προεκβληθείσης, Ιη = ΗΑ· ἐξάφθω κατὰ τὸ η κάθετος ἡ ηβ = ΗΒ, καὶ διὰ τοῦ β ἤχθω ἡ Ιτ· ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΗ, Ιβη ἴσα, πάντατε τὰ τρίγωνα ΑΠΔ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀντιστοίχοις ΙΠδ ἕκαστον ἑκάστῳ, καὶ αἱ Πδ ἴσαι ταῖς ΠΔ, ταῖς ἀπεχούσαις ἀπὸ τοῦ Η, ὅσον αἱ Πδ ἀπὸ τοῦ η, ἐντεῦθεν ἄρα . . .

80. α'. Τὸ σημεῖον ε ἔστιν ἑστία ὡς καὶ τὸ Ε, καὶ δι' αὐτῆς γραφῆναι δύναται ἡ καμπύλη· δύω ἄρα τῇ ἐλλείψει αἱ ἑστίαι Ε, ε, ἴσον ἀπέχουσαι ἑκατέρα τῆς κορυφῆς Η, ἢ η.

81. β'. Αἱ τεταγμέναι ΠΜ, καὶ αἱ διπλαῖ τεταγμέναι ἑπομένως, αἱ ἰσοδιεστῶσαι τῶν κορυφῶν Η, η ἑκατέρα ἑκατέρας, ἴσαι ἔσονται· ἡ ἔλλειψις ἄρα ἐν δυσίτισιν ἀντιθέτοις σημείοις τὴν αὐτὴν ἔχει καμπυλότητα· καὶ ἐπὶ ΠΜ = ΠΜ' τῇ ἑαυτῆς ἀντιστοίχῳ δήπουθεν, ἡ καμπύλη αὕτη δίχα τέμνεται διὰ τοῦ ἄξονος Ηη.

82. γ'. Ἐλάττων ἄξων καλεῖται ἡ διπλῆ τεταγμένη ΜΚΜ'', ἡ διήκουσα διὰ τοῦ μέσου τοῦ ἄξονος ὃς καλεῖται μείζων ὡς πρὸς τὸν ἐλάττω· ἑκάτερος ἄρα τῶν ἀξόνων δίχα τέμνει τὴν ἔλλειψιν.

83. Τὸ σημεῖον Κ, καθ' ὃ ἀλλήλους οἱ ἄξονες τέμνουσι, Κέντρον καλεῖται τῆς ἐλλείψεως· τὸ δὲ ΚΕ, ἢ Κε ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀφ' ἑκατέρας ἑστίας Ἐκκεντρότης καλεῖται τῆς ἐλλείψεως.

84. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ὁ μείζων ἄξων τῆς ἐλλείψεως ἴσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν σημείου παντὸς μ τῆς

καμπύλης δύω ἀποσημάτων ἀφ' ἑκατέρας τῶν ἑσιῶν· εἶτ' ἔν Ηη = Εμ + εμ.

ΔΕΙΞΙΣ. ΗΕ = ΗΒ = ηβ, καὶ ηΕ = ηΔ (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα Ηη = βηΔ, = μιᾷ τινι Δδ (ἐπεὶ Ιτ παράλληλος τῇ ΑΓ, καὶ Δηδ ἴση μιᾷ τινι Δδ).

Παρὰ ταῦτα Εμ = ΠμΔ' (ἐκ κατασκ.)· καὶ εμ = ΠΜ'''δ, εἴγε τὰ μ, Μ''' σημεῖα εὑρέθησαν μεταφερομένης ἐκ τοῦ ε τῆς ΠΜ'''δ ἐφ' ἑαυτήν (80)· ὥστε Εμ + εμ = ΠμΔ' + ΠΜ'''δ, εἴτ' ἔν τῇ ὅλῃ Δ'μ = Μ'''δ, ἢ μιᾷ τινι Δδ.

Ἐπεὶ τοίνυν Ηη = Δδ, καὶ Εμ + εμ = Δδ· ἄρα καὶ Ηη = Εμ + εμ· Ο. Ε. Δ.

85· ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐντεῦθεν ἄρα εὐχερῶς πάνυ ἔλλειψιν γράφειν μεμαθήκαμεν· εἰλήφθω γὰρ (κ. 80) ἄξων ὁ Ηη, καὶ δύω ἑσίαι Ε, ε, τιθεμένων Η = ηε, καὶ γενέσθω ΑΗ = ΗΕ· καὶ κέντρῳ τῷ ε γεγράφθωσαν ἐφεξῆς τόξα τὰ ΜΟΔ, ΜΟ'Δ'· εἶτα δὲ ἐκ τοῦ Α εἰλήφθω ἕκαστον ἀπόσημα ΑΔ, καὶ μετηνέχθω ἐκ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ἑαυτῷ ἀντίστοιχον τόξον· καὶ δὴ πάντα τὰ ὕτως εὑρεθέντα σημεῖα ἔσονται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

Καὶ γὰρ εΜ' = εΔ' (Γεωμ. 4.) ἀλλὰ ΕΜ' = ΑΔ' = ΗΔ' + εη (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα ΕΜ' + εΜ' = ΗΔ' + εη + εΔ' = Ηη· πάντα ἄρα τὰ ὕτως εὑρεθέντα σημεῖα ἔσαι ἐν ἐλλείψει (84).

86. Καὶ ἁπλουστέρα δὲ ἄλλη πορίζεται μέθοδος τοῦ γράφειν ἔλλειψιν, δοθέντος τοῦ μείζονος ἄξονος Ηη, καὶ τοῦ τῶν ἑσιῶν ἀποσήματος Ε, ε· νήματος γὰρ ἴσου τῷ Ηη, θάτερον μὲν πέρας πεπήχθω ἐπὶ τοῦ Ε, θάτερον δὲ ἐπὶ τοῦ ε· ἧλος δὲ ὁ Μ' ἔνδοθεν τὸ νῆμα τείνων ὀρθὸς πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον περιήχθω· λέγω δὴ ὅτι ὁ

ἥλος Μ΄ ἔλλειψιν καταγράφει· ἐν παντὶ γὰρ σημείῳ τῷ ὑπ' αὐτοῦ γραφομένῳ ἔστιν ΕΜ΄ + εΜ΄ = Ηη (84).

87. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄ Τῶν εὐθειῶν τῶν ἀπὸ τοῦ πέρατος τοῦ ἐλάττονος ἄξονος ἐπὶ τὰς ἑστίας ἐπιζευγνυμένων ἑκάστη ἴση ἐστὶ τῷ μείζονι ἡμιάξονι· ἐν γὰρ (σχ. 67) ΕΜ″ + εΜ″ = Ηη (84)· ἀλλ' ΕΜ″ = εΜ″, ἐπεὶ ὅσης ΚΜ″ πλευρᾶς κοινῆς, καὶ ΚΕ = Κε, καὶ τῆς Κ γωνίας ὀρθῆς, τὰ τρίγωνα ΚΕΜ″, ΚεΜ″ εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 221)· ἄρα $ΕΜ'' = \frac{Ηη}{2} = εΜ''$.

88. Υ΄ π ό θ ε σ ι ς. Τὸν μὲν μείζονα ἡμιάξονα ἐν τοῖς ἑφεξῆς ἀποκαλέσομεν α΄, καὶ δὴ ΕΜ″ = α (87), τὸν δ' ἐλάττονα β· τὴν δ' ἐκκεντρότητα ΚΕ, ἣ Κε = κ· χ δὲ τὸ ἀπόσημα μιᾶς τινος τεταγμένης ἀπὸ τοῦ κέντρου· ἐκεῖν ἡ ἀποτετμημένη ἐξ ὑποθέσεως ΠΗ = α + χ, ἡ δὲ Πη = α — χ· γινόμενον δὲ ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων ΠΗ × Πη ἐν τῇ ἐλλείψει, $α^2 - χ^2$.

89. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ο΄ ἐλάττων ἡμιάξων ΚΜ″ ἐστι μέσος ἀνάλογον (σχ. 67) τῶν ἀφ' ἑκατέρας τῶν κορυφῶν δύο ἀποσημάτων τῆς ἑτέρας τῶν ἑστιῶν, εἴτ' ἔν ΗΕ = α — Κ : ΚΜ″ = β :: ΚΜ″ = β : Εη = α + Κ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΚΜ″, ἔστι $ΚΜ''^2 (β^2) = ΕΜ''^2 (α^2) - ΚΕ^2 (- κ^2)$, ἢ $β^2 = α^2 - κ^2$· ἐπινοηθήτω νῦν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ὡς $\overline{α + κ} \times \overline{α - κ}$ (Συμβ. Λογ. 44)· ἐπεὶ δὲ πᾶσα ἐξίσωσις ἀναλογίαν παρέχει (Συμβ. Λογ. 240), ἔστιν ἄρα α — κ : β :: β : α + κ. Ο. Ε. Δ.

90. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Τὸ ἀπὸ πάσης τεταγμένης ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάτ-

τονος ἡμιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος ἡμιάξονος.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημὶ δὴ ὡς ἔστι (χ. 81) $\Pi M^2 = \upsilon^2 : H\Pi \times \Pi\eta = \alpha^2 - \chi^2$ (87) :: $KM^2 = \beta^2 : \alpha^2$, ἢ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

Ἔστι γὰρ ἀ. $\Pi E = \chi - \kappa$, καὶ $\Pi\varepsilon = \chi + \kappa$, καὶ $E\mu + \varepsilon\mu = 2\alpha$ (84).

Τεθείσθω νῦν $\varepsilon\mu - E\mu = 2\nu$· καὶ δὴ ἔσται $\varepsilon\mu = \alpha + \nu$, καὶ $E\mu = \alpha - \nu$ (Συμβ. Λογ. 442).

β'· Ἐν τῷ τριγώνῳ $E\Pi\mu$ ἐστι $\Pi\mu^2 (\upsilon^2) = E\mu^2 (\overline{\alpha - \nu}^2 = \alpha^2 - 2\alpha\nu + \nu^2) - \Pi E^2 (\overline{\chi - \kappa}^2 = -\chi^2 + 2\kappa\chi - \kappa^2)$ A.

γ'. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ $\Pi\mu\varepsilon$ ἔστι $\Pi\mu^2 (\upsilon^2) = \mu\varepsilon^2 (\alpha^2 + 2\alpha\nu + \nu^2) - \Pi\varepsilon^2 (\overline{\chi - \kappa}^2 = -\chi^2 - 2\chi\kappa - \kappa^2)$ B.

δ'. Ἀντικαταστάσει ἄρα ἀντὶ υ^2 ἐν τῇ B ἐξισώσει, τῆς ἐν τῇ A εὑρεθείσης δυνάμεως ἔσται $\alpha^2 - 2\alpha\nu + \nu^2 - \chi^2 + 2\kappa\chi - \kappa^2 = \alpha^2 + 2\alpha\nu + \nu^2 - \chi^2 - 2\kappa\chi - \kappa^2$· ἀναγωγῇ δὲ γίνεται $4\alpha\nu = 4\kappa\chi$· ἄρα $\alpha\nu = \kappa\chi$· ἄρα $\nu = \frac{\kappa\chi}{\alpha}$.

ε'. Ἀντικαταστήτω νῦν ἀντὶ ν ἡ αὐτοῦ δύναμις ἐν τῇ A ἐξισώσει, ἥτις γενήσεται $\upsilon^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha\kappa\chi}{\alpha} + \frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2} - \chi + 2\kappa\chi - \kappa^2$· ἀναγωγῇ δὲ, $\upsilon^2 = \alpha^2 + \frac{\kappa^2\chi^4}{\alpha^2} - \chi^2 - \kappa^2$· ἀπαλλαγῇ τοῦ κλάσματος, $\alpha^2\upsilon^2 = \alpha^4 + \kappa^2\chi^2 - \alpha^2\chi^2 - \alpha^2\kappa^2$ (M).

Ἐπεὶ δὲ ἀνασκοπῶσιν εὑρίσκεται ἡ Μ ἐξίσωσις γινομένη ὑπὸ δύω παραγόντων τῶν $\alpha^2 - \chi^2$, $\alpha^2 - \kappa^2$, γεγράφθω $\alpha^2 \upsilon^2 = \alpha^2 - \chi^2 \times \alpha^2 - \kappa^2$ Ν· πρὸς τὸ δύναθαι διαγινώσκειν ἑκάτερον παράγοντα.

ς΄. Ἔστι δὲ $\alpha^2 - \kappa^2 = \beta^2$ (89)· δυνατὸν ἄρα διελεῖν τὴν Ν ἐξίσωσιν διὰ β^2 (Συμβ. 393)· ἡ δὴ γενήσεται $\frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2} = \alpha^2 - \kappa^2$ Π.

ζ΄. Τέλος δὲ ἐπείπερ ἡ Π ἐξίσωσις ἀναλογίαν ἀεὶ προβαλέθαι ἔχει· ἔστι δὲ τὸ κατ' αὐτὴν πρῶτον μέλος $\frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2}$ κλασματικὸν, ὑποτεθῆναι δύναται, ὁ μὲν ἐν αὐτῷ ἀριθμητὴς ὡς παραγόμενον ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων τῆς ἀναλογίας, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς εἷς τῶν μέσων· τὸ δὲ $\alpha^2 - \chi^2$ ὡς τῶν μέσων ὁ ἕτερος· ἐντεῦθεν ἂν $\alpha^2 : \beta^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \upsilon^2$· ἢ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$. Ο. Ε. Δ.

91. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ δὲ ταύτης τῆς ἀναλογίας πρόεισιν ἡ ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \chi^2}{\alpha^2}$· ἡ αὕτη ἐστὶν ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις, περιέχουσα τὰς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτεμνομένας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἄρα $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - \chi^2)}$· ἐὰν δὲ γένηται $\chi = 0$, ἔσται $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - 0^2)} = \upsilon = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha} \alpha = \frac{\beta\alpha}{\alpha} = \beta$.

92. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ ἀποτέμνωνται πρὸς τῇ κορυφῇ Η, ἔσται ΗΠ $= \chi$, καὶ ΗΠ $= 2\alpha - \chi$, καὶ ΗΠ

$\times$ ἡ Π $= 2\alpha\chi - \chi^2$· ἄρα ἡ προεκτεθεῖσα ἀναλογία γενήσεται $\upsilon^2 : 2\alpha\chi - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ὅθεν $\upsilon^2 = \frac{\beta^2(2\alpha\chi - \chi^2)}{\alpha^2}$, ἢ $\upsilon\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως τῶν πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένων περιεκτικήν.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (Ρ), ὑποτεθῇ $\beta^2 = \alpha^2$, εἴτ' ἓν τεθῇ ἴσος ὁ μείζων τῷ ἐλάττονι ἄξονι, ἀπολημφθήσεται $\upsilon^2 = \frac{\alpha^4 - \alpha^2\chi^2}{\alpha^2}$· ἀναγωγῇ δὲ, $\upsilon^2 = \alpha^2 - \chi^2$, ἐξίσωσις τοῦ κύκλου, περιέχουσα τὰς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένας· ἡ γὰρ $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$ (12) περιέχει τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ· σαφὲς ἄρα ἐντεῦθεν ὡς ὁ κύκλος ἔλλειψίς ἐστιν, ἧς ὁ ἐλάττων ἄξων ἀπειροστόντι διαφέρει τοῦ μείζονος, ἢ καὶ ἴσος ἐστὶ τῷ μείζονι· ἡ δ' αὐτοῦ ἐκκεντρότης ἐστὶν $= \frac{1}{\infty} = 0$ (3).

94. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐκ δύω τεταγμένων υ, Υ ἔχομεν α΄. $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· β΄. $\Upsilon^2 : \alpha^2 - X^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἄρα $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \alpha^2 - X^2$, τουτέστιν „ἐν ἐλλείψει καὶ δὴ καὶ ἐν κύκλῳ τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ „τὸν μείζονα ἄξονα τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλλη„λά εἰσιν, ὡς τὰ γινόμενα ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτετμη„μένων καὶ συναποτετμημένων."

95. Ταὐτὶ ἄρα τὸ σχῆμα ταυτόν ἐστι τῇ τοῦ κώνου προελθούσῃ τομῇ (15)· ὑποτιθεμένων, τοῦ μὲν $2\alpha > 2\beta$, τοῦ δὲ $\upsilon^2 < \alpha^2 - \chi^2$.

96. Τελευταῖον δὲ, οὐχ' ὅτι ἐν καμπύλῃ ἐστὶν $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \alpha^2 - X^2$, παρὰ τοῦτο ἔσται ἔλλειψις

ἡ καμπύλη ἀνίσους ἔχουσα ἄξονας· ταύτην γὰρ τὴν ἰδιότητα ὁ κύκλος ἔχων εὑρίσκεται (93)· ἀλλ' ἔσται ἔλλειψις, ἐὰν ἡ καὶ $\upsilon^2 < \alpha^2 - \chi^2$.

97. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἡ παράμετρος (σχ. 67) ΜΕΜ' $= \pi$ τοῦ πρώτου τῆς ἐλλείψεως ἄξονος ἐστιν εὐθεῖα τρίτη ἀνάλογον τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου τῶν ἀξόνων· ὑπὲρ γὰρ τῆς παραμέτρου ὄντος $\chi = \kappa$ (88) ἡ Ρ ἀναλογία (93) γενήσεται $\upsilon^2 : \alpha^2 - \kappa^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἀλλ' $\alpha^2 - \kappa^2 = \beta^2$ (89)· ἄρα $\upsilon^2 : \beta^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἄρα $\upsilon : \beta :: \beta : \alpha$ (Συμβ. Λογ. 263)· καὶ ἑπομένως $2\upsilon = \pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$, ἢ $2\alpha : 2\beta :: 2\beta : \pi$.

98. Ὥστε τύπος τῆς παραμέτρου π ἔσται $= \frac{4\beta^2}{2\alpha} = \frac{2\beta^2}{\alpha}$

99. Κύκλου ἄρα ἡ παράμετρος ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ· ἐπεὶ γὰρ $\beta = \alpha$, ἔσται $\pi = \frac{2\alpha^2}{\alpha} = 2\alpha$.

100. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Ο' τύπος, τῆς μὲν μείζονος ὀρθίας πλευρᾶς εμ ἐστὶν $\alpha + \frac{\kappa\chi}{\alpha}$, τῆς δ' ἐλάττονος Εμ $= \alpha - \frac{\kappa\chi}{\alpha}$ (σχ. 81).

ΔΕΙΞΙΣ. Εἴγε εμ $= \alpha + \nu$, καὶ Εμ $= \alpha - \nu$ (89. ἐν τῇ δείξει)· ἀλλὰ $\nu = \frac{\kappa\chi}{\alpha}$ (89. δ'.) ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

101. ΘΕΩΡΗΜΑ ς'. Τὸ τῆς ἐλλείψεως ΗΜ'ηΜ' ἐμβαδὸν ρ (σχ. 82) πρὸς τὸ τοῦ ΗΒηΟ κύκλου, τοῦ γεγραμμένου ἐπὶ τοῦ μείζονος τῶν ἐκείνης ἀξόνων, ἔστιν ὡς ὁ ἐλάττων ἄξων πρὸς τὸν μείζονα· τουτέστι ρ : Ρ :: Μ'Μ' : ΒΟ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι μὲν γὰρ ἐν τῇ ἐλλείψει ΠΜ² : ΠΜ'²

:: ΗΠ × Πη : ΗΠ′ × Π′η (94)· ἔςι δὲ ὡσαύτως καὶ τῷ κύκλῳ Πβ² : Π′β² :: ΗΠ × ηΠ : ΗΠ × Π′η (ἀντ.)· ἄρα ΠΜ² : Π′Μ′² :: Πβ² : Π′Β²· ἄρα ΠΜ : Π′Μ′ :: Πβ : Π′Β· τουτέςιν, αἱ ἐν τῇ ἐλλείψει τεταγμέναι ἀνάλογόν εἰσι πρὸς τὰς ἐν τῷ κύκλῳ ἀντιςοιχούσας· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν τεταγμένων, εἴτ' ὖν τὸ ἐμβαδὸν ρ τῆς ἐλλείψεως, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τεταγμένων, εἴτ' ὖν τὸ τοῦ κύκλου ἐμβαδὸν Ρ, ὡς μία τεταγμένη ἐν τῇ ἐλλείψει ἡ Π′Μ′ πρὸς μίαν ἀντίςοιχον τεταγμένην ἐν τῷ κύκλῳ τὴν Π′Β, εἴτ' ὖν ρ : Ρ :: Π′Μ′ : Π′Β· ἄρα (Συμβ. Λογ. 234) ρ : Ρ :: 2Π′Μ′ = Μ′Π′Μ′ : 2ΠΒ = Ηη. Ο. Ε. Δ.

102. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ τῆς ἐλλείψεως ἐμβαδὸν ρ ἐξισοῦται τῷ κύκλου Δ, οὗ ἡ διάμετρος χ ἔςι μέση ἀνάλογον τοῦ μείζονος ἄξονος Ηη, καὶ τοῦ ἐλάττονος Μ′Μ′· ἔςω γὰρ τὸ τοῦ ΗΒΟ κύκλου ἐμβαδὸν = Ρ· ὁμοῖον ἔςαι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ∺ Ηη : χ : Μ′Μ′· ἄρα (Συμβ. Λογ. 269) Ηη : Μ′Μ′ :: Ηη² : χ²· ἀλλὰ Ρ : ρ :: Ηη : Μ′Μ′ (10)· ἄρα Ρ : ρ :: Ηη² : χ²· καὶ δὴ Ρ : Δ :: Ηη² : χ² (Γεωμ. 398)· ἄρα Ρ : ρ :: Ρ : Δ (Γεωμ. 327)· ἢ Ρ : Ρ :: ρ : Δ· ἄρα ρ = Δ (Γεωμ. 336. Σχ.)· ὁμοῖον ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐπιφάνεια ρ = Δ ἐπιφανείᾳ τοῦ κύκλου, οὗ διάμετ. κτ.

103. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Τῆς ἐλλείψεως ἀγαγεῖν ἀπτομένην κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ (σ. 83).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπὶ τῆς εΜ προσχθείσης εἰλήφθω ΜΡ = ΕΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΡ· φημὶ δὴ ὡς ἡ εὐθεῖα ΤΜΧ, ἡ δίχα τέμνουσα τὴν ΕΡ, ἔςιν, ἣν ζητοῦμεν, ἡ ἀπτομένη· ἐπεὶ γὰρ ΕΜ = ΜΡ, ἡ ΤΧ, ἡ δίχα τέμνουσα τὴν ΕΡ, κάθετος αὐτῇ ἐπιςήσεται (Γεωμ. 164, 217)· ὁμοῖον ΟΕ = ΟΡ.

Ἐὰν ὖν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΤΧ ἕτερον σημεῖον παρὰ τὸ

Μ. τὸ Ο φέρε, φημὶ δὴ, ὡς τοῦτο οὐκ ἔσται ἐπὶ τῆς καμπύλης· εἰ γὰρ εΡ = εΜ + ΜΕ (ἐκ κατασκευῆς) = Ηη (84)· ἀλλ' εΟ + ΟΕ = εΟΡ > εΡ (Γεωμ. 17), εἰ δὴ μείζων τῆς Ηη· ἄρα (84) Ο οὐκ ἂν εἴη ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ο. Ε. Δ.

104. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ γωνίαι ΕΜΤ, εΜΧ, αἱ περιεχόμεναι ἐπὶ τῆς ἁπτομένης ὑπὸ δύω ὀρθίων πλευρῶν εΜ, ΕΜ, εἰσὶν ἴσαι· εἰ γὰρ ΕΜΤ = ΤΜΡ (Γεωμ. 217), εἰ ΤΜΡ = εΜΧ (Γεωμ. 99)· ἄρα ΕΜΤ = εΜΧ.

105. Ἐπεὶ τοίνυν ἡ γωνία τῆς ἀνακλάσεως ἴση ἐστὶ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, αἱ φωτιστικαὶ ἀκτῖνες, αἱ ἐκ τῆς ἑστίας Ε ἐπὶ τὸ περιφερὲς τῆς ἐλλείψεως προσβάλλουσαι, ἀνακλασθήσονται πρὸς τὴν ἑτέραν ἑστίαν ε· ἐντεῦθεν ἄρα...

106. α'. Ἐὰν τῷ Ε σημείῳ (σχ. 84) παραβολικῆς σάλπιγγος (37) ἐφαρμοσθῇ τὸ ἐλλειψοειδὲς ΙεΠΕ, οὗ ἡ μὲν τῶν ἑστιῶν συμπίπτει τῇ τοῦ παραβολοειδοῦς ἑστίᾳ Ε, ἡ δὲ ἑτέρα ε κεῖται ἐν τῷ τόπῳ, ἔνθα γενέσθαι δεῖ τὴν φωνὴν, αἱ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ἀποχωρῆσαι ἐκ τοῦ ε συναφθήσονται κατὰ τὸ Ε, κἀκ τούτου πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς παραβολικῆς σάλπιγγος προσπίπτουσαι, παραλλήλως τῷ ἄξονι χωρήσουσι· αὕτη τοίνυν ἡ σάλπιγξ αἱρετωτέρα ἐστὶ τῆς περὶ ἧς εἴρηται (37)· αἱ γὰρ φωναὶ αἱ ἐν τῷ ἐλλειπτικῷ στερεῷ γενόμεναι, πρὸς τὸ Ε ἀθροιζόμεναι πᾶσαι, ἰσχυρότερον προχέονται τῆς σάλπιγγος, εἰ ἀκουστότεραι καθίστανται.

107. β'. Ἐὰν κατὰ τὸ ε ἀποτμηθῇ τὸ ἐλλειψοειδὲς ΕΜε (σχ. 85), ὡς πίπτειν τὸ ε ἐκτὸς τοῦ καταλοίπου ἐλλειψοειδοῦς, ἐφ' ἧς ἂν βουλώμεθα ὕλης, λαμπάδος τῆς ἐν τῷ Ε ἐπιτεθείσης, πᾶσαι αἱ φωτιστικαὶ ἀκτῖνες κατὰ τὸ ε συναφθήσονται, εἰ πάντα τὰ ἐκεῖθι ἐλάχιστα μόρια ὁρα-

βήσονται· οἱ τοίνυν ἀσχολούμενοι περὶ τὰ ἐλάχιστα μόρια, χρήσαιντ' ἂν τῷ ἐλλειψοειδεῖ τούτῳ ὡς λαμπάδι φωτεινοτάτῃ.

108. γ'. Ἐὰν ἡ θαλάμου τινὸς ΣΟΑ ἐλλειψοειδὴς ἦ ὡς ΕΣΜ· καί τις ἐν τῷ Ε λαλῶν ἥσυχον προΐηται τὴν φωνήν· ἕτερος ἐν τῷ Σ καθήμενος ἐπακοῦσαι αὐτοῦ δυνήσεται, καὶ τἀνάπαλιν, καίτοι τῶν μεταξὺ καθημένων πρὸς τῷ Κ ἐπαίειν αὐτῶν μὴ δυναμένων· αἱ γὰρ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ἐκ τοῦ Ε ἀποχωροῦσαι, καὶ ἀνακλώμεναι ἐκ τῆς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς κοιλότητος, συνάπτονται πᾶσαι κατὰ τὸ Σ, καὶ ἀνάπαλιν.

109. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Ὁ τῆς ὑποκαθέτου τύπος ἔστι $ΠΤ = \frac{β^2 χ}{α^2}$ (σ. 83).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΜΤ παράλληλος τῇ ΡΕ (Γεωμ. 137), ἔστι (Γεωμ. 318) ΣΡ = 2α (103 ἐν τῇ δείξει) : ΣΕ = 2κ :: ΜΡ = ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς) $= α - \frac{κχ}{α}$ (100) $= \frac{α^2 - κχ}{α}$: $ΕΤ = 2κ \times \frac{α^2 - κχ}{α} : 2α = \frac{2α^2 κ - 2κχ}{2α^2}$ $= \frac{α^2 κ - κχ}{α^2}$ (Α)· τῆς Α δὲ δυνάμεως ἀφῃρήσθω κ — χ, εἴτ' ἔσται $\frac{α^2 κ - α^2 χ}{α^2}$· καὶ δὴ ἔσται ΕΤ — ΕΠ = ΠΤ = $\frac{α^2 κ - κ^2 χ - α^2 κ + α^2 χ}{α^2} = \frac{α^2 χ - κ^2 χ}{α^2} = \frac{(α^2 - κ^2) χ}{α^2}$· ἀλλὰ $α^2 - κ^2 = β^2$ (89)· ἄρα $ΠΤ = \frac{β^2 χ}{α^2}$. Ο. Ε. Δ.

110. ΘΕΩΡΗΜΑ Η'. Η' ὑφαπτομένη ἐςὶ ΤΠ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΜΤΤ (19), διὰ τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ ὑποτεινούσῃ ΤΤ ἰσαμένην ΜΤ (7), ἐςὶ ΠΤ $= \frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$: ΠΜ $= \upsilon$: : ΠΜ $= \upsilon$: ΤΠ (Γεωμ. 341)

$= \upsilon^2 : \frac{\beta^2\chi}{\alpha^2} = \upsilon^2 \times \frac{\alpha^2}{\beta^2\chi}$. ἀλλὰ $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^2\chi^2}{\alpha^2}$ (91). ἄρα ΤΠ $= \frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^2\chi^2}{\alpha^2} \times \frac{\alpha^2}{\beta^2\chi} = \frac{\alpha^4\beta^2 - \alpha^2\beta^2\chi^2}{\alpha^2\beta^2\chi} = \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$. Ο. Ε. Δ.

111. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ ΠΤ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ ὑποτεθῇ $\chi = 0$, ἔςαι ΠΤ $= \frac{\alpha^2}{0} = \infty$ (Συμβ. Λογ. 539). ὑκῶν ἡ κατὰ τὸ πέρας τοῦ ἐλάσσονος ἄξονος τῆς ἐλλείψεως ἁπτομένη ἄπειρός ἐςι, καὶ τῷ μείζονι ἄξονι παράλληλος· τιθεμένης δὲ λειπτικῆς τῆς χ, καὶ ἡ ΠΤ καθίςαται λειπτική· ὃ δὴ τεκμήριον ὑπάρχει σαφὲς τοῦ πᾶσαν ποσότητα ἐξ ὑπάρξεως ἐπὶ λεῖψιν μεταβαίνουσαν, νῦν μὲν διήκειν διὰ τοῦ ἀπείρου, νῦν δὲ διὰ τοῦ μηδενὸς, ὡς καταφαίνεται ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ ÷ 4. 2. 0. — 2. — 4 κτ.· ὁ δὲ τούτου λόγος, ὅτι ποσότης ἐξ ὑπάρξεως ἐπὶ λεῖψιν μεταβαίνουσα ὀφείλει εὑρίσκεσθαι ἐν ὅρῳ, ὃς μὴ μᾶλλον εἴη ὑπαρκτικὸς, ἢ λειπτικός· ἀλλὰ τότε μηδὲν καὶ τὸ ἄπειρον οὐδὲν μᾶλλόν ἐισι λειπτικὰ, ἢ ὑπαρκτικά· ποσότης μέντοι ἡ $\sqrt{\alpha - \chi}$ οὐδύναται ἐκ πραγματικῆς γενέσθαι ἀνύπαρκτος, ὅτε μὴν ἐξ ἀνυπ-

ἄρκτυ πραγματικὴ, εἰ μὴ ἡ $\alpha - \chi$ ποσότης, ἐκείνως μὲν ἐξ ὑπαρκτικῆς λειπτική, ἔτω δὲ ἐκ λειπτικῆς ὑπαρκτικὴ γένοιτο· ποσότης ἄρα πᾶσα ἐκ πραγματικῆς ἀνύπαρκτος, ἢ ἐξ ἀνυπάρκτυ πραγματικὴ γενέσθαι ὑ δύνατα· εἰ μὴ διέλθοι διὰ 0, ἢ διὰ ∞· ὅπερ ἀκριβῶς ἐςι σημειωτέον.

112. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα ΚΤ ἀπόσημα τῦ κέντρυ ἀπὸ τῦ σημείυ, καθ' ὃ ἡ ἁπτομένη συμβάλλει τῷ ἄξονι, ἐςὶν $= \frac{\alpha^2}{\chi}$· ἐ γὰρ ΚΤ = ΤΠ + ΠΚ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi} + \chi$ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2 + \chi^2}{\chi} = \frac{\alpha^2}{\chi}$.

113. Ὥςε α'. $\chi : \alpha :: \alpha :$ ΚΤ (Συμβ. Λογ. 406), τυτέςιν „ἡ ΚΤ τρίτη ἀνάλογός ἐςι πρὸς τὴν ἀποτετμημένην, ἐ τὸν μείζονα ἡμιάξονα."

114. β'. Μιᾶς ἀποτετμημένης, ἐ τῦ ἡμιάξονος ΗΚ, δοθέντων, εὑρεθήσεται ἡ ΚΤ τρίτη ἀνάλογος ἴσα τῶν δύω προτέρων· εὑρεθήσεται δὲ ἐ ἡ ὑφαπτομένη ΤΠ, ἀφαιρεθείσης τῆς $\chi =$ ΠΚ ἀπὸ τῆς ΚΤ τῆς ἤδη εὑρημένης.

115. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν εὑρεῖν τῆς ἐν τῇ ἐλλείψει κυρτότητος, ἀναφερομένην εἰς τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ἁπτομένην, ἐ τῷ ἄξονι κάθετον ΗΝ (σχ. 76).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΗΝ $= \chi$, ἐ ΝΜ $= \upsilon =$ ΗΔ· ὑκῶν Δη $= 2\alpha - \upsilon$· ἐ ΗΔ × Δη $= \overline{2\alpha - \upsilon} \times \upsilon = 2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon$· ἐπεὶ δὲ $\Delta M^2 = HN^2 : H\Delta \times \Delta\eta :: \beta^2 : \alpha^2$ (90)· ἄρα $\chi^2 : 2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon :: \beta^2 : \alpha^2$· ἐ δὴ $\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon)$. Ο. Ε. Π.