τὴν φύσιν τȣ̃ κύκλȣ ἔςι ΠΜ² = Πδ × ΠΟ, ϗ πΜ² = πΤ × πχ (Γεωμ. 343)· ἄρα ΠΜ² : πΜ² : : ΗΠ × ηΠ : Ηπ × ηπ. Ο. Ε. Δ.

16. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐν ὑπερβολῇ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνά εἰσιν, ὡς τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν συςοιχȣσῶν ἀποτετμημένων ϗ συναποτετμημένων, εἴτ' ȣ̃ν ΠΜ² : πΜ² : : ΗΠ × ηΠ : Ηπ × πη.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἔςω κύκλος ὁ ΤΜΜΟ παράλληλος τῇ βάσει ΒΜΜΓ, ϗ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κάθετον τῇ βάσει, ἡ δὲ ὑπερβολὴ ΗΜΜ κάθετος τῷ τȣ̃ τριγώνȣ ἐπιπέδῳ· ὡς ϗ ἀνωτέρω, δείκνυται ὅτι ἡ ΠΜ κοινή ἐςι τεταγμένη ἔντε τῷ κύκλῳ ϗ ἐν τῇ ὑπερβολῇ.

β΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΗΠΤ, Ηπ Β, ἔςιν ΗΠ : ΠΤ : : ΗΠ : πΒ· ἐν δὲ τοῖς ηΠΟ, ηπΓ ὁμοίοις ϗ αὐτοῖς τριγώνοις ἔςιν ηΠ : ΠΟ : : ηπ : ΠΓ· πολλαπλασιασμῷ δὲ, ΗΠ × ηΠ : ΠΤ × ΠΟ : : Ηπ × ηπ : πΒ × πΓ· ἀλλὰ, διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, ἔςι ΠΜ² = ΠΤ × ΠΟ, ϗ πΜ² = πΒ × πΓ· ἄρα ΗΠ × ηΠ : ΠΜ² : : πΒ × πΓ : πΜ²· ἄρα (Συμβ. Λογ. 242) ΠΜ² : πΜ² : : ΗΠ × ηΠ : πΒ × πΓ. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ φύσεως τῶν Κωνικῶν τομῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγεγραμμένων.

17. Πᾶσα καμπύλη (σχ. 66, 67, 68) ΗΜΜ, ΗΜΜη, ἐν ᾗ δύω ἀποςήματα, καθ' ἃ ἀπέχȣσι δύω τινὰ σημεῖα αὐτῆς Η, μ, ἀπό τινος ἐντὸς κειμένȣ σημείȣ, ὃ καλεῖται Ἑςία, ἀνάλογα εἰσὶ δυσὶν ἀποςήματι, καθ'

ἃ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἀπό τινος εὐθείας ΓΓ, ἐκτὸς τῆς καμπύλης κειμένης, ἣν καλοῦμεν Διευθετοῦσαν, τετέσιν, ἐν ᾗ ὑπάρχει ΗΕ : μΕ :: ΗΑ : μΟ, Κωνικὴ τομὴ ἀποκέκληται.

Καὶ ἐὰν μὲν ᾖ ΗΕ = ΗΑ (σχ. 66, 67, 68), ἡ καμπύλη ἐστὶ παραβολή· ἐὰν δὲ ΗΕ < ΗΑ, ἔλλειψις· ἐὰν δὲ τέλος ΗΕ > ΗΑ, ὑπερβολή.

18. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Κωνικὴν τομὴν καταγράψαι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἤχθω (σχ. 66, 67, 68) ἡ διευθετοῦσα ΓΓ, καὶ ἐστάθω αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗΠ· καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς δύω σημεῖα τὰ Η, Ε, τιθεῖσιν ΗΕ = ΗΑ εἰς καταγραφὴν παραβολῆς, καὶ ΗΕ < ΗΑ εἰς καταγραφὴν ἐλλείψεως, καὶ ΗΕ > ΗΑ εἰς καταγραφὴν ὑπερβολῆς· καὶ ἐστάθω κατὰ τὸ Η κάθετος ἡ ΗΒ = ΗΕ· διὰ δὲ τοῦ πέρατος αὐτῆς Α ἤχθω ἡ ΑΒΤ πέρατος ἄνευ· καὶ ἐστάθωσαν κάθετοι τῇ ΑΗΠ προσεχέσται ἀλλήλαις αἱ ΠΔ, ΠΔ περιοριζόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΗΠ καὶ τῆς ἀπεράντου ΑΒΤ· καὶ διὰ τοῦ διαβήτου ἐκ τοῦ Ε ἑκάστῃ ΠΔ μετενεχθήτω ἐπ' αὐτὴν ταύτην τὴν ΠΔ· προκύψουσιν οὖν ἐντεῦθεν σημεῖα ἑξῆς κείμενα τὰ Μ, Μ, ἅτινα μετὰ τῶν ἀπ' εὐθείας αὐτοῖς ἀντιθέτων, καὶ ἴσον ἑτέρωθεν τοῦ ἄξονος ἀπεχόντων, συγκροτήσουσι τὴν ζητουμένην καμπύλην.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν ἑκάστῳ γὰρ τῶν οὕτω καταγραφέντων τριῶν σχημάτων, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΗΒ, ΑΠδ παρέξουσιν ΑΗ : ΗΒ :: ΑΠ : Πδ· ἀλλὰ ΗΒ = ΗΕ, καὶ Πδ = Εμ (ἐκ κατασκευῆς), καὶ ΑΠ = μΟ (Γεωμ. 127)· ἄρα ἀντικατασάσει ἔσται ΑΗ : ΗΕ :: μΟ : Εμ. Ο.Ε.Δ. (17).

19. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀρθία πλευρὰ ἀκούει εὐθεῖα (σχ. 69) ἡ ΕΜ, ἡ ἀπὸ τῆς ἑστίας πρὸς ἓν τῶν τῆς καμπύλης σημείων ἀγομένη· Ἀπτομένη δὲ, ἡ καθ' ἓν μό-

νον σημεῖον τῆς καμπύλης ἐπιψαύουσα, οἵα ἡ ΤΜ. Τὸ δὲ ΤΠ μέρος τοῦ ἄξονος, τὸ ἀπολαμβανόμενον ἀπὸ τῆς ἁπτομένης ΜΤ καὶ τῆς τεταγμένης ΠΜ, ἥτις τάττεται ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς Μ ἐπὶ τὸν ἄξονα, καλεῖται Ὑ φαπτομένη· ἐὰν δὲ τῇ ἁπτομένῃ κατὰ τὸ τῆς ἁφῆς σημεῖον πρὸς ὀρθὰς σταθῇ ἡ ΜΤ, αὕτη καλεῖται ἰδίᾳ Κάθετος, ἢ Κανονική· τοῦ δὲ μέρος ΠΤ τοῦ ἄξονος, τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς σημείου τεταγμένης ἀπολαμβανόμενον, καλεῖται Ὑ ποκάθετος, ἢ Ὑ ποκανονική.

20. Παράμετρος ἀκούει ἡ διπλῆ τεταγμένη, ἡ διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἑστίας διήκουσα.

21. Τὸ ΗΕ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς Η ἀπὸ τῆς ἑστίας Ε ἀεὶ κληθήσεται α· ἡ δὲ τεταγμένη, υ· δύω δὲ τεταγμέναι, ἡ μὲν υ, ἡ δὲ Υ· ἡ δὲ ἀποτετμένη, Χ· δύω δὲ ἀποτετμημέναι διάφοροι, ἡ μὲν χ, ἡ δὲ Χ· τέλος δὲ ἡ παράμετρος κληθήσεται π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Παραβολῆς.

22. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Παραβολῆς (σχ. 66) οἱ δύω κλῶνες ΗΜ, ΗΜ΄, ἐπ' ἄπειρον προϊόντες, ἀποχωροῦσι τοῦ ἄξονος ΗΠ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΗΒ = ΑΗ, καὶ πάντα τὰ ἑξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοια τῷ ΑΗΒ, ἑκάστη ΑΠ ἴση ἐστὶ τῇ ἑαυτῆς ΠΔ· ἄρα πΔ = Απ = ΕΜ'' + Επ (*)· ἀκοῦν

(*) Ὅτι ΕΜ = Μτ (17) = ΛΕ (Γεωμετ. 236)

μεταφερομένη ἡ ΠΔ ἀποσήσει τὸ Μ''' ἀπὸ τῆς ΑΠ μᾶλλον, ἢ ἡ ΕΜ'' ἀπέσησε τὸ οἰκεῖον αὐτῆς Μ''· ἄρα ΕΜ''' > ΕΜ''· ταὐτὸν δὲ νοητέον περὶ πάντων τῶν ἀλληλοδιαδόχων σημείων τῶν εὑρισκομένων ὑφ' ἑκάστης ΠΔ = ΑΠ, μεταφερομένης ἐκ τοῦ Ε ἐφ' ἑαυτήν. Ο. Ε. Δ.

23. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Παραβολῆς μία μόνη ἐστὶν ἡ κορυφὴ Η.

ΔΕΙΞΙΣ. Οἱ γὰρ κλῶνες ΗΜ, ΗΜ' διὰ μόνου τοῦ Η σημείου συνάπτονται τῷ ἄξονι (22)· ἐπεὶ δὲ ΑΗ = ΗΒ, πᾶσαι αἱ ὑπερθεν τοῦ Η λαμβανόμεναι ΠΔ, ἐλάττους ὖσαι ἑκάστη τῆς ἑαυτῆς ΕΠ, οὐ δυνήσονται ὑπὲρ τὸ Η ἐπὶ τῆς ΕΑ προαχθείσης σημεῖα χαράξαι ἐπανήκοντα τῇ καμπύλῃ· ἄρα ἡ καμπύλη ἐν ἑνὶ μόνῳ σημείῳ τῷ Η συμπίπτει τῷ ἄξονι (7). Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Παραβολῆς μία ἔσται οὐ ἡ ἑστία Ε, οὐ ὁ ἄξων αὐτῆς ὑποτεθῆναι δύναται = ∞.

24. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐν παραβολῇ τὸ ἀφ' οἱασοῦν τεταγμένης τετράγωνον ΠΜ² = υ², ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς συστοίχου ἀποτετμημένης ΗΠ = χ καὶ τοῦ τετραπλοῦ ΗΕ = α ἀποσήματος τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἑστίας· εἴτ' ἦν υ² = 4αχ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΠμ, ἔστι Πμ² = υ² = Εμ² — ΕΠ², Α (Γεωμετ. 351)· ἀλλὰ Εμ = Πδ (18) = ΑΠ (22) = ΑΗ + ΗΠ = α + χ (εἴγε ΑΗ = ΗΕ = α) καὶ ΕΠ = α — χ, ἐὰν ᾖ ὑπερθεν τοῦ Ε ἡ ΠΜ, ἢ χ — α, ἐὰν ᾖ ἔνερθεν· τετραγωνισθεισῶν δὲ τῶν δυνάμεων τούτων τῆς τε Εμ, καὶ ΕΠ, ἡ ἐξίσωσις Α γίνεται υ² = α² + 2αχ + χ² — α² + 2αχ — χ²· ἀναγωγῇ δὲ υ² = 4αχ. Ο. Ε. Δ.

25. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐκ τῆς υ² = 4αχ ἐξισώσεως

πρόεισιν $\upsilon^2 : T^2 :: 4\alpha\chi : 4\alpha X :: \chi : X$ (Συμβ. Λογ. 247), τυτέστι „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλ„ληλά εἰσιν, ὡς αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτετμημέναι[66]· ἡ καμπύλη ἄρα αὕτη ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ τοῦ κώνου προκυπτούσῃ ἐν ἐπιπέδῳ μιᾷ αὐτοῦ πλευρᾷ παραλλήλῳ τεμνομένου (4, 14).

26. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Παραβολῆς (κ. 66) ἡ παράμετρος π ἔστιν $= 4HE = 4\alpha$· ἐν γὰρ $\upsilon^2 = 4\alpha\chi$ (24)· ἀλλ' ἐπὶ τῆς παραμέτρου ἔστι $\chi = \alpha$, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα $\upsilon^2 = 4\alpha \times \alpha = 4\alpha^2$· ἄρα $\upsilon = 2\alpha$· καὶ $2\upsilon = \pi = 4\alpha$· ἐντεῦθεν ἄρα

27. α'. Παραμέτρου (κ. 70) τῆς μΕμ δοθείσης, δι' αὐτῆς καταγραφήσεται παραβολὴ ἡ ΗΜΜ, ἐφιεμένης τῷ μέσῳ Ε ταύτης ἀπεράντου εὐθείας τῆς ΕΑ, καὶ τῆς Εμ ἐπ' αὐτὴν μεταφερομένης, καὶ τὸ Α ὁριζούσης· οὗ τὸ μέσον σημεῖον Η τῆς ΑΕ ἔσται τῆς παραβολῆς ἡ κορυφή· καὶ γὰρ οὕτως ἔσται $E\mu = HE = 2\alpha$· τὰ δὲ λοιπὰ ἐκπεραινθήσεται, ὡς προδιώρισται (18).

28. β'. Ἡ $\upsilon^2 = 4\alpha\chi$ εἰσαγωγῇ τῆς παραμέτρου γενήσεται $\upsilon^2 = \pi\chi$· τουτέστιν „ἐν παραβολῇ τὸ ἀπὸ τῆς „τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς „ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένης, καὶ τῆς παραμέτρου."

29. γ'. Ἐκ τῆς $\upsilon^2 = \pi\chi$ προέρχεται $\chi : \upsilon :: \upsilon : \pi$ (Συμβ. Λογ. 241), τουτέστιν, ὃ ταὐτὸν τῷ ἤδη εἰρημένῳ „ἡ παράμετρος ἐστι τρίτη ἀνάλογος ἑκάστης ἀποτετμη„μένης, καὶ τῆς αὐτῇ συστοίχου τεταγμένης."

30. Ὥστε δοθείσης μιᾶς ἀποτετμημένης τῆς Ηπ, καὶ τῆς τεταγμένης πΜ, εὑρεθήσεται ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς, ζητηθείσης τρίτης ἀναλόγου τῶν Ηπ, πΜ (348).

31. Δοθεισῶν ἄρα μιᾶς ἀποτεμημένης τῆς Ηπ, καὶ

τῆς ἀντιτοίχου τεταγμένης πΜ, ἀναγράψαι δυνατὸν ἔσται τὴν αὐταῖς ἐπανήκουσαν παραβολήν· εἴγε, τῆς πρὸς τὰς δοθείσας τρίτης ἀναλόγου εὑρεθείσης, τὸ τέταρτον αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω ἐκ τοῦ μέσου Ε μετενεχθὲν, ἐμφανεῖ τὴν κορυφὴν Η, ἐκ δὲ Η πρὸς τὰ ὑπὲρ αὐτὸ πάλιν μετενεχθὲν, σημανεῖ τὴν διευθετοῦσαν· οὐκοῦν τῆς Ε ἑσίας, τῆς Η κορυφῆς, καὶ τῆς διευθετούσης αὐτῆς, δοθέντων, ἀναγραφήσεται ἡ παραβολή.

32. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Διὰ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τῆς παραβολῆς σημείου Μ ἁπτομένην αὐτῆς ἀγαγεῖν (κ. 69).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ΕΜ, καὶ ἐκβάθω ΜΟ τῇ διευθετούσῃ κάθετος· οὐκοῦν ἡ ΜΤ, ἡ δίχα τέμνουσα τὴν ΕΟ, ἔσται, ἣν ζητοῦμεν, ἡ ἁπτομένη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΜΟ = ΜΕ (17, 18) τὸ ΜΕΟ ἐστι τρίγωνον ἰσοσκελές· οὐκοῦν (Γεωμετ. 137, 217) ΜΤ κάθετος ἐφέστηκε τῇ ΕΟ· πάντα τοίνυν τὰ τῆς ΜΤ σημεῖα ἴσον ἀπέχουσι τῶν Ε, Ο (Γεωμ. 249)· ἐκ δὲ τούτου ἅπαν σημεῖον πλὴν τοῦ Μ, τὸ Β φέρ' εἰπεῖν, οὐκ ἔσται κοινὸν τῇ καμπύλῃ, καὶ δὴ ἡ ΜΤ ἁπτομένη ἔσται τῆς καμπύλης (19)· ἀχθεῖσα γὰρ ἡ κάθετος Βχ, ἐλάττων ἔσται τῆς ΒΟ (Γεωμ. 113), καὶ δὴ Βχ < ΒΕ (ἐπεὶ ΒΕ = ΒΟ)· ἄρα (17) Β οὐκ ἔσται ἐπὶ τῆς καμπύλης· ὡσαύτως δὲ συλλογιούμεθα καὶ περὶ παντὸς ἄλλου σημείου, ὃ κεῖται ὕπερθεν ἢ ἔνερθεν τοῦ Μ· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

33. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ ΑΜβ = ΟΜΤ = ΤΜΕ (Γεωμ. 99, 217)· σῶμάτι προσπίπτον ἐπὶ τοῦ Μ κατὰ φορὰν τὴν ΑΜ παράλληλον τῷ ἄξονι, καὶ τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ΤΜΕ ἴσην ποιοῦν τῇ τῆς προσπτώσεως γωνίᾳ ΑΜβ, ἀνακλασθήσεται ἐπὶ τὴν ἑσίαν· ἐντεῦθεν ἄρα.

34. α΄. Ἀπευθυνθέντος τοῦ ΗΠ ἄξονος τοῦ παραβολοειδοῦς κοίλου σώματος πρὸς τὸ τοῦ ἡλίου κέντρον, ἅπασαι αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες παράλληλοι οὖσαι ἀλλήλαις, (*) ἑπομένως δὲ καὶ τῷ ἄξονι ΗΠ, μετὰ τὸ προσβαλεῖν τοῖς κοίλοις τοῦ παραβολοειδοῦς, ἀνακλασθήσονται πρὸς τὴν Ε ἑστίαν, (**) καὶ κατακαύσουσι τὰς ἐκεῖ τιθεμένας καυσίμους ὕλας.

35. Ἐξέσται δὲ καὶ τὴν ἑστίαν ῥᾷστα θεῖναι, ἐφ' οὗ ἂν βουλώμεθα σώματος, λαμβάνοντας παραβολοειδὲς, ἐφ' οὗ ἡ ἑστία Ε βραχύτι ἀπέχει τοῦ Η, καὶ ἱκανῶς ἀποτέμνοντας αὐτὸ πρὸς τὸ Η, ἵν' ἡ ἑστία ἐκτὸς κέηται τοῦ παραβολοειδοῦς.

36. β΄. Ἐὰν ἐν τῇ ἑστίᾳ παραβολοειδοῦς κοίλου τοῦ ΗΔδ (σχ. 71) λαμπὰς τεθῇ, αἱ φωτιστικαὶ ἀκτῖνες ΕΑ, Εη ἀνακλασθήσονται παραλλήλως τῷ ἄξονι, καὶ ἐν διαστήματι 300, ἢ 400 ποδῶν οὕτω περιλάμψουσιν, ὡς ἐκεῖ σκότους ὄντος εὐπετῶς βιβλίον ἀναγινώσκειν.

(*) Ὁ ἥλιος (αὐτὸ δὲ τοῦτο νοητέον καὶ περὶ παντὸς ἄλλου φωτοβόλου σώματος) πανταχόθεν ἑαυτοῦ βάλλει τὸ φῶς, καὶ ἐν εἴδει σφαίρας, ὡς ὀψόμεθα ἐν τῇ Ὀπτικῇ· ἐὰν οὖν δύο ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ἐπὶ φωτιζομένου σώματος ποδιαίου τὸ πλάτος θεωρηθῶσιν, αἱ δύο αὐτῶν φοραὶ, αἱ ἐν τῷ τοῦ ἡλίου κέντρῳ συνερχόμεναι, μετὰ τοῦ πλάτους τοῦ φωτιζομένου σώματος τρίγωνον συγκροτοῦσιν, οὗ μία μὲν τῶν πλευρῶν ἐστι ποδιαία, ἑκατέρα δὲ τῶν λοιπῶν δύο ἴση περίπου λεύγαις 31000000· ἡ τοίνυν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ ἡλίου γωνία ἐπεὶ ὑποτείνει ὑπὸ πλευρὰν ποδιαίαν, ἀπειροστὴ ἐκλήπτεα· ἤ, ὃ δὴ ταὐτὸν, αἱ δύο ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ἄνευ ἀξιολόγου διαστήματος ἐκλήπτεαι εἰσὶν ὡς παράλληλοι.

(**) Καὶ γὰρ τὸ φῶς τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ΤΜΕ ἀεὶ ἴσην ποιεῖ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως γωνίᾳ ΑΜβ.

37. γ΄. Ἐὰν παραβολοειδὲς (χ. 72) ἀποτμηθῇ πρὸς τῇ κορυφῇ μέχρι τῆς ἑσίας, κἀκεῖ τεθῇ τὸ σόμιον σάλπιγγος· πᾶσαι αἱ φωνητικαὶ γραμμαὶ ΕΜ, ΕΜ (*), ἀποχωροῦσαι τοῦ Ε, καὶ προσβάλλουσαι τοῖς κοίλοις τῆς σάλπιγγος, ἀνακλασθήσονται παραλλήλως τῷ ἄξονι (**), καὶ προαγόμεναι κατὰ τὰς φορὰς ΜΑ ἅλις πόρρω πρὸς τὸ Τ ἀκουσθῆναι ποιήσουσι τὰς κατὰ τὸ Ε ἀπαγγελλομένας φωνάς.

38. δ΄. Ἐὰν πρὸς τῇ τοῦ κοίλου παραβολοειδοῦς ΕΜΜ (χ. 73) ἑσίᾳ, ἕτως ἀποτμηθέντος τὴν κορυφὴν, προσαρμοσθῇ ἀνεμοπορθμεῖον τὸ ΕΠδΜΜ, γενήσεται ἀκουστικόντι ὄργανον κάλλιστον, ὃ οἱ δύσκωφοι τῷ ὠτίῳ ἐντιθέμενοι ἐκ τοῦ Π πέρατος, τὸ δὲ λοιπὸν ὄργανον πρὸς τὸν λαλοῦντα στρέφοντες, τῶν φωνητικῶν ἀκτίνων πρὸς τὸ ὄργανον προσβαλλουσῶν, καὶ πρὸς τὴν ἑσίαν μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἁπασῶν συνιουσῶν, ἀκούσουσιν ἐντελῶς ἅπαντα τὰ λεγόμενα.

39. ε΄. Ἐὰν οἱ δύω παρασάται καμίνου τινὸς παραβολικὸν ἔχωσι σχῆμα, γεννώμενον ἀμέλει ὑπὸ τῶν κλωνῶν ΒΔ, Βδ παραλλήλως ἑαυτοῖς κινηθέντων, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἱσαμένων τῷ ἐδάφει· ὁ δὲ τόπος, ἐν ᾧ ἐστὶ τὸ πῦρ, κατὰ τὴν ἑσίαν τῆς γεννητρίας παραβολῆς κέηται, ἡ κάμινος ἐν βραχυτάτῳ χρόνῳ τὸν θάλαμον θερμαινεῖ· κατὰ γὰρ ταύτην τὴν κατασκευὴν, ἐὰν ἐπὶ τοῦ Ε κάθετος ἐπινοηθῇ, ἐπ' αὐτῆς κείσονται ἐφεξῆς πᾶσαι αἱ ἑσίαι τῶν παραβολῶν ἁπασῶν, ἃς καταγράφει ἡ

(*) Τοῦτ' ἔστιν αἱ εὐθεῖαι, καθ' ἃς φέρεται ὁ ἦχος.

(**) Ὁ γὰρ ἦχος, καθὰ δὴ καὶ τὸ φῶς, ἀνακλώμενος ποιεῖ τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ἴσην τῇ τῆς ἐπιπτώσεως.

κινηθεῖσα γεννήτρια παραβολή· ὑκῦν ἡ κατὰ ταύτην τὴν εὐθεῖαν αἰρομένη φλόξ, κατὰ πλευρὰν τῇ καμίνῳ προσβάλλουσα ἀνακλᾷ τὰς καυστικὰς αὐτῆς ἀκτῖνας ΕΑ, ΕΗ παραλλήλως τῇ ΕΤ πρὸς τὸ ἔδαφος τοῦ θαλάμου, ὃς ἐν ἀκαριαίῳ χρόνῳ θερμανθήσεται· ἀλλὰ γὰρ, κατὰ τὴν κοινὴν τῶν καμίνων κατασκευὴν, αἱ ἀκτῖνες ἀνακάμπτονται πρὸς τὸ μέσον τῆς καμίνου, καὶ διὰ τοῦ ὀχετοῦ ἐκρέουσι μάτην.

40. ϛ΄. Ἔστωσαν δύω παραβολοειδῆ ἀντίθετα τὰ ΗΜΜ, ΗΜΜ, κοινὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν ΗΗ (σχ. 74)· ἐὰν ἐν ἀκτινοβόλῳ τι τεθῇ ἐπὶ τοῦ Ε, πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἀθροισθήσονται κατὰ τὸ Δ, κἀκεῖ ἀναγνῶναι γράμματα καθαρῶς ἐξέσται, κἂν μέγα τύχῃ ὂν τὸ ἀπὸ Ε ἀπόσημα· ὡσαύτως, ἐὰν πῦρ τεθῇ ἐν τῷ Ε, αἱ φλογιστικαὶ ἀκτῖνες ἐν τῷ Δ ἀθροισθήσονται, καὶ ἐν μετρίῳ ἀπὸ τοῦ Ε ἀποσήματι σῶμάτι καυθήσεται.

41. Ἐὰν τὰ διαληφθέντα παραβολοειδῆ φυσικαὶ ὦσι στοιχεῖα, ἢ καὶ χειροποίητοι· δύω τινὲς, ὁ μὲν ἐπὶ τοῦ Ε, ὁ δ' ἐπὶ τοῦ Δ, ἰσάμενοι προσδιαλεχθῆναι ἀλλήλοις δυνηθήσονται, κἂν μέγα ᾖ τὸ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόσημα ΕΔ· ἑτέρου τινὸς, ἐπὶ τοῦ μέσου Τ ἱσαμένου, μηδ' ἀκούειν αὐτῶν τοὺς λόγους ὅλως ἔχοντος· καὶ γὰρ αἱ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ΕΜ ἀπὸ τοῦ Ε ἀποχωροῦσαι κατὰ τὸ Δ συνάπτονται, καὶ τοὐναντίον, καὶ δὴ τὴν τῶν λόγων ἀκρόασιν ἐπαιωθητοτάτην κατὰ τὸ Δ ἐργάζονται· αὐταὶ δὲ αἱ ἀκτῖνες ἐκ τοῦ Ε προϊοῦσαι κατὰ τὸ Τ λίαν εἰσὶν ἀσθενεῖς, καὶ μικρὰν, ἢ οὐδεμίαν, προσβολὴν τῷ ἀκουστικῷ ἐμποιοῦσιν ἐκεῖ ὀργάνῳ.

42. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἡ ὑποκάθετος ΠΤ ἀεί ἐστιν ἄτρεπτος, ἐξισουμένη τῷ $\frac{\pi}{2}$, εἴτ' ὖν τῇ ἡμιπαραμέτρῳ (σχ. 69).

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ ΕΟ, ΤΜ εὐθεῖαι (32), αἱ τρίτῃ τινὶ τῇ ΤΜ κάθετοι, καὶ ὑπὸ δύω παραλλήλων ΤΤ, ΟΑ περατούμεναι, εἰσὶ παράλληλοι (Γεωμ. 137) καὶ ἴσαι (Γεωμ. 127)· ἐκεῖν τὰ τρίγωνα ΠΤΜ, ΔΕΟ, διὰ τὰς δύω ἴσας πλευρὰς ΕΟ, ΤΜ, καὶ διὰ τὰς ἴσας γωνίας (καὶ γὰρ Μ = Ο (Γεωμ. 132) καὶ Π = Δ, καὶ ἑπομένως Τ = Ε) εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 221)· ἄρα ΠΤ = ΔΕ = 2α = $\frac{\pi}{2}$· Ο. Ε. Δ.

43. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔστιν οὖν ἡ κανονικὴ ΜΤ = $\sqrt{\pi\chi + \frac{\pi^2}{4}}$· ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΠΤΜ ἔστιν $TM^2 = \Pi M^2 + \Pi T^2$ (Γεωμ. 349) = $\upsilon^2 + \frac{\pi^2}{4}$ = $\pi\chi + \frac{\pi^2}{4}$ (28)· ἄρα ΜΤ = $\sqrt{\pi\chi + \frac{\pi^2}{4}}$.

44. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τὸ τοῦ σημείου Τ, καθ' ὃ ἡ κανονικὴ συμβάλλει τῷ ἄξονι, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Η ἀπόσημα ΗΤ ἔστιν = $\chi + \frac{\pi}{2}$ = ΗΠ + ΠΤ.

45. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ἡ ὑφαπτομένη ΤΠ ἔστι διπλῆ τῆς ἀποτετμημένης ΗΠ, εἴτ' οὖν = 2χ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΤΤΜ διὰ τὴν ΠΜ κάθετον ἔστι (Γεωμ. 341) ΠΤ = (*) 2α : ΠΜ = υ :: ΠΜ = υ : ΤΠ· ἄρα ΤΠ = $\frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha}$ = $\frac{4\alpha\chi}{2\alpha}$ (28) = 2χ· Ο. Ε. Δ.

46. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ ΤΠ = 2χ, καὶ ΗΠ = χ· ἄρα ΗΤ = χ = ΗΠ.

47. Ἵν' οὖν ἁπτομένη κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἀχθῇ, ἀποχρήσει τεταγμένως ἀγαγόντας τὴν ΠΜ, λαβεῖν ΗΤ = ΗΠ, καὶ τὴν ΤΜ ἐπιζεῦξαι.

(*) ΠΤ = $\frac{\pi}{2}$ (42)· π = 4α (26)· ἄρα ΠΤ = 2α.

48. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τύπος τῆς ἀπτομένης ΤΜ ἔστιν ὁ $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$· ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΤΠΜ ἔστι $TM^2 = \Pi M^2 (= \pi\chi)$ (28) $+ T\Pi^2 (= 4\chi^2)$· ἄρα $TM = \sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$.

49. ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ΄. Τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου ΕΓ, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τῆς ἑστίας ἐπὶ τὴν ἀπτομένην ΤΜ, ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΕΜ, τῆς ἐπὶ τὸ τῆς ἁφῆς σημεῖον ἀγομένης, καὶ τοῦ τεταρτημορίου τῆς παραμέτρου· εἶτ' ἂν $E\Gamma^2 = EM \times \frac{\pi}{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΕΓΤ, ΕΓΗ ἔστι ΤΕ : ΕΓ :: ΕΓ : ΕΗ· ἐκεῖν $E\Gamma^2 = TE \times HE$· ἔστι δὲ παρὰ ταῦτα γωνία ἡ ὑπὸ ΤΜΕ = ΟΜΤ (32) = ΜΤΕ (Γεωμ. 133)· τοιγαροῦν τὸ τρίγωνον ΤΕΜ ἔστιν ἰσοσκελές· ἄρα ΤΕ = ΕΜ· ἔστι δὲ $HE = \frac{\pi}{4}$ (27)· ἀντικαταστάσει ἄρα τῶν δε τῶν δυνάμεων ἀντὶ ΤΕ, καὶ ΕΗ, ἡ ἐξίσωσις $E\Gamma^2 = TE \times EH$ γενήσεται $E\Gamma^2 = EM \times \frac{\pi}{4}$ Ο. Ε. Δ.

50. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ ἀπὸ τῆς ἑστίας ἐπὶ δύω ἀπτομένας ἱστάμεναι κάθετοι ἀνάλογόν εἰσι ταῖς τετραγωνικαῖς ῥίζαις τῶν ὀρθίων πλευρῶν, τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὰ τῆς ἁφῆς σημεῖα· καὶ γὰρ ἔστιν $E\Gamma^2 = EM \times \frac{\pi}{4}$· ἐκεῖν $E\Gamma^2 : \varepsilon\gamma^2 :: EM \times \frac{\pi}{4} : \varepsilon\mu \times \frac{\pi}{4}$· ἄρα $E\Gamma : \varepsilon\gamma :: \sqrt{EM} : \sqrt{\varepsilon\mu}$ (Συμβ. Λογ. 263).

51. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Τύπος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΕΜ ἔστιν ὁ $\chi + \frac{\pi}{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ. ΕΜ = ΜΟ (17) = ΗΠ + ΔΗ (Γεωμ. 127) = $\chi + \frac{\pi}{4}$ Ο. Ε. Δ.

52. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν εὑρεῖν τῆς κυρτῆς παραβολῆς, ἀναφερομένην πρὸς τὴν ΗΡ ἀπτομένην, τὴν τῷ ἄξονι κατὰ τὸ σημεῖον Α κάθετον (κ. 75).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΗΡ = χ, καὶ ΡΜ = υ· ἔστιν ἓν διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς (28) ΠΜ² = ΗΡ² = $\pi \cdot \chi$ ΗΠ, εἴτ' ἓν $\chi^2 = \pi\upsilon$· ἀπόχρη ἄρα ἐν τῇ εὑρεθείσῃ (28) ἐξισώσει τὸ υ εἰς χ μεταβαλεῖν, καὶ τ' ἀνάπαλιν, εἰς εὕρεσιν τῆς τὴν κυρτὴν παραβολὴν, ὡς τὸ πρόβλημμα ἀπαιτεῖ, ἐμφαινούσης ἐξισώσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς παραβολῆς.

53. Κέντρον κωνικῆς τομῆς ἀκούει (κ. 67) σημεῖον Κ τοῦ ἄξονος, ἐν ἴσῳ ἀφιστάμενον ἑκατέρας τῶν κορυφῶν· τοιγαροῦν κέντρον πραγματικοῦ ἡ παραβολὴ ἠμοίρησεν (23).

54. Ἀλλὰ γὰρ τῆς παραβολῆς ἐλλείψεως ὅσης, ἧς ἡ ἑτέρα κορυφὴ Η τῆς ἑτέρας ἀπείρως ἀφίσταται (5), δυνατὸν ὑποθέσθαι τὸ κέντρον ἀπὸ τῆς Η κορυφῆς ἀπέχον ἀποστήματι = $\frac{\infty}{2}$.

55. Διάμετρος ἔστιν εὐθεῖα διὰ τοῦ τῆς τομῆς

κέντρου διήκουσα, καὶ πρὸς ἀυτῇ τῇ τομῇ ἑκατέρωθεν πε-
ρατουμένη.

56. Ὥστε α΄. καὶ ὁ ἄξων αὐτὸς ὑπάρχει διάμετρος· β΄. εὐθεῖα ἀπὸ σημείου Μ τῆς παραβολῆς ἀγομένη, καὶ μία τῶν αὐτῆς διαμέτρων ὑποτιθεμένη, τῷ κέντρῳ ὑ μὴ συναντήσει, πρὶν ἢ προαχθῆναι ἐπ' ἄπειρον· διάμετρος ὖν ἐν αὐτῇ ἔσται αὐτός τε ὁ ἄξων, καὶ πᾶσα εὐθεῖα τῷ ἄξονι παράλληλος ἡ ΑΜ (σχ. 69).

57. Ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένη ὀνομάζεται εὐθεῖα ἡ νδ, ἢ ΗΒ (σχ. 75, 76), ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς καμπύλης ἀπολαμβανομένη, καὶ παράλληλος ὖσα τῇ διὰ τῆς Μ ἀρχῆς τῆς διαμέτρου διηκούσῃ ἐφαπτομένῃ.

58. Τὸ Μδ μέρος (σχ. 75.) τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἀρχῆς Μ μιᾶς τινος διαμέτρου, καὶ τῆς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένης νδ, καλεῖται Ἀποτετμημένη· ἐν γένει δὲ ἐπὶ τῶν καμπύλων, ἀφ' ἧς ἂν γραμμῆς ἀποτμηθῶσιν αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ, ἐκείνη ἑνὶ τῶν τριῶν τῶνδε διασημαίνεται ὀνομάτων, Ἄξων τῶν ἀποτετμημένων, Διάμετρος τῶν ἀποτετμημένων, Γραμμὴ τῶν ἀποτετμημένων.

59. Διάμετρος συζυγὴς ἡ ΜΜ (σχ. 76) ἑτέρᾳ διαμέτρῳ τῇ Μ' Μ'' καλεῖται, ὅταν ἡ ἑτέρα παράλληλος ᾖ τῇ ἁπτομένῃ ΤΜ, τῇ διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς ἑτέρας διηκούσῃ· ἀμφότεραι δὲ ἥτε ΜΜ καὶ Μ' Μ'' καλοῦνται διάμετροι συζυγεῖς.

60. Συζυγῶν ἄρα διαμέτρων ἄμοιρος ἡ παραβολὴ (23).

61. Παραβολῆς διαμέτρου παράμετρός ἐστιν εὐθεῖα τετραπλῆ τοῦ ἀποσήματος ΜΓ (σχ. 75), καθ' ὃ ἀπέχει ἡ τῆς διαμέτρου ἀρχὴ Μ ἀπὸ τῆς διευθετούσης ΑΓ.

62. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐν παραβολῇ ἡ ἡστινοσοῦν

διαμέτρυ ΜΒ παράμετρος Π ἰσῦται τῇ τῦ ἄξονος παραμέτρω π σὺν τῇ τετραπλῇ ἀποτετμημένη ΗΠ, ἥτις ἀντιςοιχεῖ τῇ Μ ἀρχῇ τῆς διαμέτρυ· ἔςι δηλονότι Π = π + 4χ.

ΔΕΙΞΙΣ. Η᾽ γὰρ παράμετρος Π = 4 ΜΓ (61) ἀλλὰ 4 ΜΓ = 4ΑΠ = 4 ΑΗ + 4 ΤΗ = π + 4χ (17, 27, 7)· Ο. Ε. Δ.

63. ΠΟΡΙΣΜΑ. Η᾽ πάσης διαμέτρυ ΜΒ παράμετρος Π τρίτη ἀνάλογός ἐςι πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ΗΠ, ϗ τὴν ἀπτομένην ΤΜ· ἔςι γὰρ Π = π + 4χ, ϗ ΗΠ = χ, ϗ ΤΜ = $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$ (48)· ἄρα χ : $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$ :: $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$: π + 4χ (Συμβ. Λογ. 240).

64. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων νδ, ΗΒ ἐπί τινα διάμετρον ΒΜ τετράγωνα εἰσὶν, ὡς αἱ ἀντίςοιχοι ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτετμημέναι, τυτέςι· $\nu\delta^2$: HB^2 :: ΜΔ : ΜΒ (χ. 75).

ΔΕΙΞΙΣ. Τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΠΜ, Ιν· ἐκεῖν ά. τὰ τρίγωνα ΖΡΜ, ΤΗΖ προδήλως ὅμοια (Γεωμ. 220) εἰσὶν ἔτι ϗ ἴσα, ὅτι ΜΡ = ΗΠ (Γεωμ. 127) = ΗΤ (Γεωμ. 148), ϗ γωνίαι αἱ αὐταῖς προσκείμεναι ἴσαι.

β΄. Τὸ τρίγωνον ΗΒΡ ἴσον ἐςὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΤΗΒΜ· καὶ γὰρ παρὰ τὸ ἑκατέρῳ κοινὸν ΗΖΜΒ τὸ ΖΡΜ = ΤΗΖ.

γ΄. Τὸ τρίγωνον ΟνΙ ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΙΡΕ· ἔςι γὰρ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΤΠΜ, ΟνΙ, ὡς τὸ ΤΠΜ : ΟνΙ :: ΠM^2 : $I\nu^2$ (Γεωμ. 389)· ἀλλὰ ΠM^2 : $I\nu^2$ :: ΗΠ : ΗΙ (14) ἄρα ΤΠΜ : ΟνΙ :: ΗΠ : ΗΙ, ἢ ΤΠΜ : ΗΠ :: ΟνΙ : ΗΙ (Ρ)· ἀλλὰ ΙΕ = ΠΜ (Γεωμ. 127)· ἐκ τῆς Ρ ἄρα πρόεισι καὶ ἡ ἀνάλογία· ΤΠΜ :

ΗΠ × ΠΜ :: ΟνΙ : ΗΙ × ΙΕ (Συμβ. Λογ. 246)· ἀλλὰ ΤΠΜ = ΗΠ × ΠΜ (Γεωμ. 285 καὶ ἐνταῦθα 46)· ἄρα καὶ ΟνΙ = ΗΙ × ΙΕ, εἴτ' ἓν τῷ παραλληλογράμμῳ ΗΙΡΕ (Γεωμ. 283).

δ'. Τὸ τρίγωνον ΟΗκ ἴσον ἐστὶ τῷ τραπεζίῳ κνΡΕ· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῶν ἴσων ΟνΙ ΗΙΡΕ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΗκΙν, ἔσονται ἴσα τὰ κατάλοιπα ΟΗκ, κνΡΕ.

ε'. Τὸ τρίγωνον νδΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ παραλληλογράμμῳ δΜΟΤ· ἀποχρήσει ἓν εἰς τοῦτο ἵνα παρὰ τὸ κοινὸν νΤδΜ ἡ ΤΕΜ = ΤΟνΤ· ἀλλὰ ΤΗΡ = ΖΡΜ (α'.)· ἐὰν ἄρα τοῖς ΓΗΖ, ΖΡΜ, τὸ αὐτὸ ποσὸν κΖνΤ προσθέντες, ἀφέλωμεν ἀπὸ τῶν ἴσων ὅλων τὰς ἴσας ποσότητας ΟΗκ, κνΡΕ (δ'.), ἕξομεν ΤΟνΤ = ΤΕΜ· ἄρα τὸ τρίγωνον νδΕ = τῷ παραλληλογράμμῳ δΜΟΤ.

ς'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις νδΕ, ΗΒΡ (Γεωμ. 220) ἐστι (Γεωμ. 389) νδΕ : ΗΒΡ :: $\nu\delta^2$: $ΗΒ^2$ ἐπεὶ δὲ νδΕ = δΜΟΤ (ἀνωτ) καὶ ΗΒΡ = ΤΗΒΜ (β'.), ἔσται δΜΟΤ : ΤΗΒΜ :: $\nu\delta^2$: $ΗΒ^2$.

ζ'. Τέλος δὲ τὰ παραλληλόγραμμα δΜΟΤ, ΤΗΒΜ, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΗΤ, ΒΜ ὄντα, εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις Μδ, ΜΒ (Γεωμ. 290).

Ἐντεῦθεν ἄρα αὐτόματος προχεῖται ἡ δεῖξις· δΜΟΤ : ΤΗΒΜ :: $\nu\delta^2$: $ΗΒ^2$ (ς'.)· ἀλλὰ δΜΟΤ : ΤΗΒΜ : Μδ : ΒΜ· ἄρα $\nu\delta^2$: $ΗΒ^2$ :: Μδ : ΜΒ· Ο. Ε. Δ.

65. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔστω νδ = υ, καὶ ΗΒ = Τ, καὶ Μδ = χ, καὶ ΜΒ = Χ· πορισθήσεται τοίνυν $\upsilon^2 : T^2 :: \chi : X$· ἄρα $\upsilon^2 = \frac{T^2 \times \chi}{X}$. τοιγαροῦν.

66. ἀ. $\upsilon = \pm \sqrt{\frac{T^2 \times \chi}{X}}$ (Συμβ. Λογ. 127)· ἀ.

πάσῃ ἄρα τεταγμένῃ νδ ἀντιστοιχεῖ ὡς λείπουσα (εἴτ' ἓν κατ' ἀντίθετον ἔννοιαν) ἑτέρα τεταγμένη ἴση ἡ δΨ· ἅπασα ἄρα διάμετρος διχῇ τέμνει τὰς ἐφ' ἑαυτὴν διπλᾶς τεταγμένας, νδ = δψ· καὶ τοῦτο ἄρα διάμετρος ἀκέσιν ἐκληρώσατο.

67. β'. $\upsilon^2 = \frac{T^2 \chi}{X}$ ἐστὶν ἐξίσωσις τῶν ἐφ' ἅπασαν διάμετρον πλὴν τοῦ ἄξονος τεταγμένων· ἀλλ' ἔστιν ἐν τοῖς ἐπὶ τὸν ἄξονα τεταγμέναις $\upsilon^2 : T^2 :: \chi : X$ (25), ὅθεν ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρω προκύπτει ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \frac{T^2 \chi}{X}$· ὥστε ἐν παραβολῇ ἡ τῶν ἐφ' ἅπασαν διάμετρον τεταγμένων ἐξίσωσις ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ τῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα· διάμετρος ἄρα πᾶσα τὰς αὐτὰς ἔχει τῷ ἄξονι ἰδιότητας, πλὴν ὅσον αἱ ἐπ' ἐκείνας τεταγμέναι πλαγίως ἴσανται· γίνεται δὲ τοῦτο, ὅτι ἡ τοῦ ἄξονος ἁπτομένη Hκ, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν αὐτῷ· αἱ δὲ τῶν ἄλλων διαμέτρων ἁπτόμεναι πλαγίως ἐπ' αὐτὰς πίπτουσι· πᾶσα δὲ τεταγμένη παράλληλος ὑπάρχει τῇ τῆς ἑαυτῆς διαμέτρου ἐφαπτομένῃ (57).

68. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Παραβολῆς δοθείσης, τὸν ἄξονα αὐτῆς εὑρεῖν (σ. 77).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν δύω παράλληλοι αἱ δε, Βζ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ σημεῖα ο, τ· διὰ δὲ αὐτῶν ἤχθω ἡ εὐθεῖα ΠΞ, ἣ γενήσεται μία τῶν διαμέτρων τῆς παραβολῆς (66), καὶ ἐκάθωσαν ἐπὶ τὴν ΠΞ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΠΡ, δΥ, περατούμεναι ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς παραβολῆς· αὗται ἂν ἔσονται αἱ διπλᾶι τεταγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὅτι ἡ ΠΞ, διάμετρος οὖσα, παράλληλος ἔσαι τῷ ἄξονι (56)· δίχα οὖν τεμοῦσα ταύτας τὰς δύω εὐθείας

κάθετος ἡ ΑΜ (Γεωμ. 106) ἔσεται ἄξων ὁ ζητούμενος. Ο. Ε. Δ.

69. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Παραβολῆς δοθείσης τῆς ΗΜΜ', εὑρεῖν αὐτῆς τὴν παράμετρον (σχ. 66).

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω ὁ ἄξων ΗΠ (ἀνωτ.) καὶ ἀπότινος σημείου Μ''' ἤχθω τεταγμένως ἡ πΜ''', καὶ ζητηθήτω τρίτη ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀποτετμημένην Ηπ, καὶ τὴν τεταγμένην πΜ''' (Γεωμ. 348)· αὕτη ὖν ἔσαι ἡ ζητουμένη παράμετρος (30).

70. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τετραγωνίζειν ἡμιπαραβόλιον τὸ ΗΔΕ (σχ. 78).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ΤΔ ἁπτομένη κατὰ τὸ Δ (32), καὶ τετάχθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ αὐτῷ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΟ, ἥτις διηρήσθω εἰς μέρη ἰσάλληλα ἐλάχιστα τὰ ΓΑ, ΑΓ κτλ., καὶ ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΔΕ διὰ τῶν χ, Ι σημείων αἱ ΑΒ, ΓΠ, τῇ δὲ ΔΟ αἱ ΘΚ, ΖΥ· ἐπεὶ ὖν τὰ ΤΔΕ, χΔΚ τρίγωνα (Γεωμ. 220) ὅμοιά εἰσιν, ἔστι ΤΕ : ΔΕ :: χΚ : ΔΚ· ἀλλὰ ΤΕ = 2ΗΕ (45) = 2ΔΟ, καὶ χΚ=ΒΕ· ἄρα 2ΔΟ : ΔΕ :: ΒΕ : ΔΚ· ἄρα 2ΔΟ × ΔΚ = ΔΕ × ΒΕ· εἶτ' ὖν τὸ ἐκτὸς τῆς παραβολῆς ὀρθογώνιον ΑΔΒΕ διπλῆν ἐστὶ τοῦ ἐκτὸς αὐτῆς ὀρθογωνίου ΚΘΔΟ (*)· ἐπεὶ ἄρα ἅπαν ὀρθο-

(*) Τιθέμεθα τὸ ΑΔΒΕ ὡς ὅλον ἐντὸς κείμενον τῆς παραβολῆς, ὅπερ ἀσφαλῶς ποιῆσαι δύναμαι· καὶ γὰρ τὸ ἐκτὸς κείμενον τριγωνίδιον Αχ Δ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἀπειροστοῦ $\frac{\text{Α Δ}}{2}$ καὶ τοῦ ἀπειροστοῦ Αχ ἀπειροστόν ἐστι δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527), ὅπερ ὡς πρὸς τὸ πρωτοταγὲς ἀπειροστὸν ΑΔΒΕ ἐκλαμβάνεται ἴσον μηδενί (Συμβ. Λογ 520)· διὰ τὸν αὐτὸν

γώνιον, ὃ συντίθησι τὴν ΗΔΕ μερίδα τοῦ ΗΟΔΕ ὀρθογωνίου, διπλοῦν ἐστὶ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ἐν τῇ ΔΟΗ μερίδι τοῦ ἐκτὸς τοῦ ἡμιπαραβολίου· ἄρα τὸ ὅλον ἐσωτερικὸν ἐμβαδὸν ΗΔΕ διπλοῦν ἐστι τοῦ ὁλικοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμβαδοῦ· ἄρα τὸ ΗΔΕ τοῦ ἡμιπαραβολίου ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις τοῦ ὀρθογωνίου ΗΟΔΕ, τοῦ βάσιν μὲν τὴν τεταγμένην ΔΕ, ὕψος δὲ τὸν ΗΕ ἄξονα ἔχοντος. Ο. Ε. Π.

ΑΛΛΩΣ. Ἐπείπερ ΔΕ = 'υ' = $\sqrt{\pi\chi}$ (28)· ἐὰν τεθῇ π=1, ἔσται υ=$\sqrt{\chi}$, εἴτ' οὖν υ=$\chi^{\frac{1}{2}}$· τοιγαροῦν ὅπως ἂν εὑρεθείη τὸ ἄθροισμα τῶν μεταξὺ Η καὶ ΔΕ τεταγμένων, συναπτέον τὴν σειραν $1^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{2}}$ . . . . . $\chi^{\frac{1}{2}}$· ἀλλὰ τὸ ταύτης ἄθροισμα. (Συμβ. λογ. 568.) ὑπάρχει $\frac{\chi^{\frac{1}{2}}+1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\chi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\chi^3} = \frac{2}{3}\chi\sqrt{\chi}$, εἴτ' οὖν (ἐπεὶ υ = $\sqrt{\chi}$) = $\frac{2}{3}\chi\upsilon$· Τὸ ἄρα παραβολικὸν χωρίον ΗΔΕ δυσὶν ἴσοται τριτημορίοις τοῦ ἕκτε τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἀποτετμημένης γενομένου, εἴτ' οὖν τοῦ ὀρθογωνίου ΗΟΔΕ· ὅρα δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως ἔτι δεικνύμενον ἐν Τόμ. Β'. σελ. 116 τῶν μαθηματικῶν στοιχείων Νικηφόρου τοῦ Θεοτόκου.

71. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα τὸ τοῦ ἡμιπαραβολίου ἐμβα-

λόγον ὅλον τὸ ΟΘΔΚ ἐκτὸς τῆς παραβολῆς ὑποτίθημι· ὡσαύτως ὡς ἐντὸς μὲν ὅλον ἐκδέχομαι τὸ ὀρθογώνιον ΒΠξχ, ὡς ὅλον δὲ ἐκτὸς τὸ ΤΘνχ· δείκνυται δὲ εὐπετῶς καὶ ἐν τούτοις, ὅτι ΒΠξχ = 2ΤΘνχ.

δὸν εὑρεθήσεται, πολλαπλασιαθείσης τῆς ἐσχάτης τεταγμένης ἐπὶ δύω τριτημόρια τῦ ΗΕ ἄξονος.

72. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὴν στερεότητα τῆς παραβολικῆς κωνοϊδος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν τῷ τὴν καμπύλην (σχ. 66) ΗΜΜ΄ περὶ τὴν ΗΠ περιάγεσθαι, καὶ ἀπογεννᾶν τὴν κωνοϊδα, πᾶσαι αἱ τεταγμέναι ΠΜ κύκλυς καταγράφυσιν· οἱ δὲ κύκλοι ὗτοι ἀπὸ τῆς Η κορυφῆς προϊόντες αὔξυσιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΠΜ τετράγωνα (Γεωμ. 398)· ταῦτα δὲ, ὡς αἱ ἀποστεμνμέναι (23)· αἱ δὲ ὡς 1. 2. 3. 4. . . . ∞, ἢ ὡς ÷ 0. 1. 2. 3. 4. . . . ∞, Α· ἄρα οἱ κύκλοι, εἴτ' ὖν τὰ στοιχεῖα τῆς κωνοϊδος αὔξυσι, κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον Α· καὶ δὴ τῶν αὐτῶν τὸ ἄθροισμα ἐμφαίνεται διὰ τῦ ἀθροίσματος τῆς ἀριθμητικῆς προόδυ Α.

Ἀριθμὸς δὲ τῶν ὅρων ταύτης τῆς προόδυ ἐστὶν ὁ ἄξων ΗΠ· ὁ δὲ ἔσχατος ὅρος ∞ ἐμφαίνει τὸν κύκλον, ὃς ἐστι βάσις τῆς παραβολικῆς κωνοϊδος, καὶ ὃν ἡμεῖς καλῦμεν ἤδη Β· ἄρα τῦτο τὸ ἄθροισμα ἐστὶ (Συμβ. Λογ. 217) $\frac{B \times H\Pi}{2}$· ἀλλὰ Β × ΗΠ κύλινδρός ἐστι, βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον Β, ὕψος δὲ ΗΠ (Γεωμ. 456)· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων, εἴτ' ὖν ἡ στερεότης τῆς παραβολικῆς κωνοϊδος, ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῦ κυλίνδρυ, ὃ βάσις μὲν ἡ τῆς παραβολικῆς κωνοϊδος, ὕψος δὲ ὁ ἄξων. Ο. Ε. Π.

73. Ἵν' ἄρα εὑρεθῇ ἡ τῆς παραβολικῆς κωνοϊδος στερεότης, θηρευτέον τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτῦ βάσεως, καὶ πολλαπλασιαστέον αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἡμιάξονα· σαφὲς ἄρα, ὡς ὁ ἀπόλυτος τῆς παραβολικῆς κωνοϊδος κυβισμὸς ἐξήρτηται τῦ ἀπολύτυ κυκλικῦ τετραγωνισμῦ (Γεωμ. 363. κτλ.).

Περὶ τοῦ ὅπως ὑπόνομοι κοιλαίνονται.

Τ' πόνομός ἐςιν ὑπόγειον κοίλωμα, ἐν ᾧ κόνις πυρίτις τίθεται πρὸς τὸ δι' αὐτῆς ἀναῤῥῆξαι τὴν ὑπερκειμένην γῆν· ὑκεῖν ἡ ἱκανοῦσα τῆς κόνεως ποσότης ὁριωθήσεται οὕτω.

Δῆλον ἐκ πείρας ὡς ἐν γῇ πάντη ὡσαύτως ἀνθεσαμένης τὸ κατὰ τὴν ἀνάῤῥηξιν καταλειπόμενον κενὸν ἔςιν (κ. 79) οἷα ἡ ΤΗΓ παραβολικὴ κωνοῖς· ὁριωθείσης οὖν τῆς τοῦτο ςερεότητος ἀποτελουμένης ἐκ τοῦ ὑπονόμου, γνωωθήσεται ᾗ ἡ ἱκανοῦσα κόνις, γινομένης πείρας τὸ πρῶτον, ὅση ἱκανὴ ἔςαι εἰς ἀνάῤῥηξιν γῆς κυβικοῦ ποδός.

74. Εἰσὶ δ' ἐκ πείρας βέβαια καὶ ταῦτα· α'. ἡ ἐξ ὑπονόμου σχηματιζομένη παραβολικὴ κωνοῖς ΓΗΤ, ἔχει τὴν ἑςίαν ἐν τῷ μέσῳ τοῦ χώρου, ἐν ᾧ ἡ κόνις· β'. ἡ ΒΕ κάθετος ἐγχωννυμένη τῷ ὑπονόμῳ, ᾗ μέρος ἀποτελουμένη τοῦ κατὰ τὴν κωνοῖδα ἄξονος, ἴση εὑρίσκεται τῇ ἀκτῖνι ΒΓ τοῦ μεγίςου τῶν ἐν τῇ κωνοῖδι κύκλων· ἔςω οὖν διευθετοῦσα ἡ ΟΔ· ὅθεν ΓΕ=ΓΟ (17) = ΒΔ· ἔςω δὲ ᾗ ΒΓ=ΒΕ, ὡς ἤδη εἴρηται = ν· ἐπεὶ οὖν τὸ ΒΓΖ τρίγωνον ἐςὶν ὀρθογώνιον· ἄρα ΓΕ² (ΒΔ²) = ν² = 2ν²· ἄρα ΒΔ = $\sqrt{2\nu^2}$· ἄρα ΕΔ = $\sqrt{2\nu^2} - \nu$· ἄρα ΕΗ = $\frac{\sqrt{2\nu^2} - \nu}{\alpha}$ (17)· ἄρα ΒΗ = $\nu + \frac{\sqrt{2\nu^2} - 2}{2}$ (Π).

75. Γνωωθείσης οὖν τῆς καθέτου ΒΕ = ν, καθ' ἣν ἐςιν ὑπορωρυγμένος ὁ ὑπόνομος, ἅπαν γνωςὸν ἔςαι διὰ τῆς Π ἐξισώσεως· πολλαπλασιαωθέντος δὲ τοῦ κύκλου, οὗ ἀκτὶς ΒΓ = ν, ἐπὶ τὸ $\frac{\text{ΒΗ}}{2}$ οὕτως εὑρημένον, ἀπολη-

φθήσεται ἡ ζητουμένη στερεότης Σ. ἀλλὰ γὰρ εὔδηλον, ὡς ἡ μικρὰ παραβολικὴ κωνοῖς ΗχΕ διεχημάτισαι πρὸς τὸ Δ βίᾳ τῆς κόνεως, τῆς πράγματι ἀπορρᾳγείσης γῆς ὕσης μόνης τῆς κολούρου κωνοίδος ΓΤχΕ· δεῖ ὖν ἀποκόψαι τῆς εὑρημένης Σ στερεότητος, τὴν τοῦ ΗχΕ.

76. Εἰς δέ γε τοῦτο, γνωστὸν μέν ἐστι τὸ ὕψος ΕΗ $= \frac{\sqrt{2v^2 - y}}{2}$· ἐπεὶ δὲ ΕΖ = 2ΕΗ (27), γνωστὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως χΕΖ τῆς κωνοίδος χΗΖ, καὶ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς τῆς βάσεως (Γεωμ. 298), ἣν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ $\frac{ΗΕ}{2}$, ἕξομεν τὴν στερεότητα τοῦ ΗχΖ, ἧς ἀφαιρεθείσης ἀπὸ Σ, καταλειφθήσεται ἡ ἀληθῶς ἀποκρυφθεῖσα γῆ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Ελλείψεως.

77. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Η᾽ ἔλλειψις ἔστι καμπύλη ἀνακάμπτουσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΑΗ > ΗΒ (κ. 67), καὶ πάντα τὰ ἐφεξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοιά εἰσι τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ, αἱ ΑΠ τάχιον αὔξουσιν, ἢ αἱ αὐτῶν ΠΔ· τελευταῖον ὖν ἔσται τις ΕΠ = ΠΔ τῇ ἑαυτῆς· αὕτη ὖν ἡ ΠΔ μετενεχθεῖσα ἐφ᾽ ἑαυτὴν ἐκ τοῦ Ε, πεσεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος κατὰ τὸ η· οἱ δύω ἄρα κλῶνες ΗΜη, ΗΜ΄η συνενωθήσονται κατὰ τὸ η. Ο. Ε. Δ.